Het vezelproduct

Van compatibele paren naar gehele groepsringen

1 Van de algemene definitie naar compatibele paren

Een *vezelproduct*, ook *pullback* genoemd, voegt twee objecten samen via hun afbeeldingen in een gemeenschappelijk doel. We beginnen in een categorie $\mathcal{C}$: daarin zijn zowel de toegelaten objecten als de morfismen vastgelegd.

Definitie 1.1

Zij $\mathcal{C}$ een categorie, met objecten A, B, C en morfismen $f : A \to C$ en $g : B \to C$. Een *vezelproduct* van f en g is een object P, met morfismen $p_A : P \to A$ en $p_B : P \to B$, waarvoor

$$f \circ p_A = g \circ p_B,$$

en met de volgende *universele eigenschap*: voor elk object T en alle morfismen $u : T \to A$, $v : T \to B$ met $f \circ u = g \circ v$ bestaat precies één morfisme $h : T \to P$ met

$$p_A \circ h = u, \qquad p_B \circ h = v.$$

We schrijven $P = A \times_C B$; de morfismen f, g en de projecties behoren tot de gegevens.

In dit artikel gebruiken we de volgende categorieën:

- **Verzamelingen:** de objecten zijn verzamelingen en de morfismen zijn alle afbeeldingen.
- **Groepen:** de objecten zijn groepen en de morfismen zijn groepshomomorfismen.
- **Ringen:** de objecten zijn associatieve ringen met eenheid en de morfismen zijn ringhomomorfismen die de eenheid bewaren.

2 Vezelproduct van verzamelingen

- Voor verzamelingen A, B, C en afbeeldingen $f : A \to C$, $g : B \to C$ wordt de algemene definitie gerealiseerd door

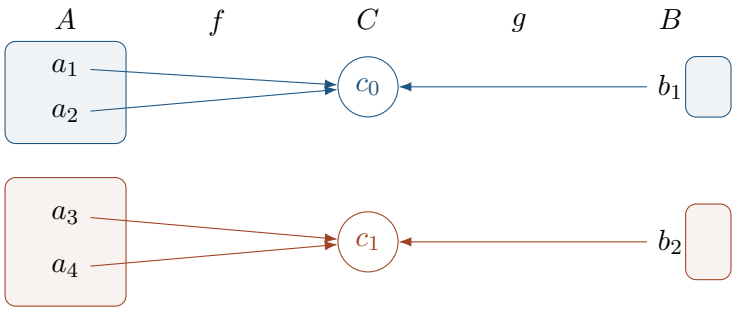
$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\},$$

met de gewone projecties op de twee componenten. Een direct product laat alle paren toe; hier zijn alleen de *compatibele paren* toegelaten.

- Voor $c \in C$ heet $f^{-1}(c)$ de *vezel boven* c. Het vezelproduct koppelt alleen elementen uit vezels boven hetzelfde punt:

$$A \times_C B = \coprod_{c \in C} f^{-1}(c) \times g^{-1}(c).$$

Hier betekent $\coprod$ een disjuncte vereniging. Een lege vezel levert geen paren.



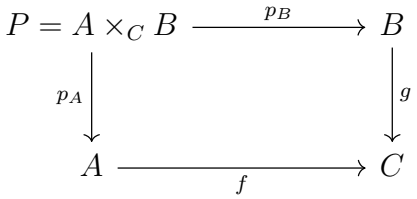
Figuur 1. Elke kleur stelt vezels boven hetzelfde punt voor.

In deze tekening zijn de toegelaten paren precies

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_1), \quad (a_3, b_2), \quad (a_4, b_2).$$

Het paar (a_1, b_2) is uitgesloten. Bij eindige verzamelingen volgt meteen $|A \times_C B| = \sum_{c \in C} |f^{-1}(c)|\,|g^{-1}(c)|$.

- Schrijf $P = A \times_C B$. De projecties zijn $p_A(a, b) = a$ en $p_B(a, b) = b$. De definitie zegt precies dat $f \circ p_A = g \circ p_B$: het onderstaande vierkant *commuteert*.

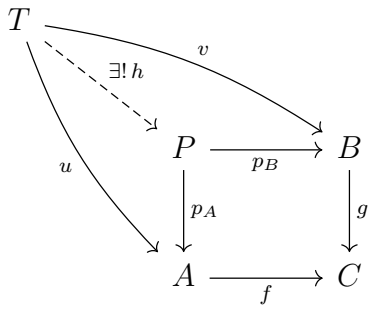


Figuur 2. Langs beide wegen krijgt (a, b) dezelfde afbeelding in C.

- De universele eigenschap geeft dan: Zijn $u : T \to A$ en $v : T \to B$ afbeeldingen met $f \circ u = g \circ v$, dan bestaat precies één afbeelding $h : T \to P$ waarvoor

$$p_A \circ h = u, \qquad p_B \circ h = v.$$

Zij wordt gegeven door $h(t) = (u(t), v(t))$.



Figuur 3. De gestippelde pijl bestaat en is uniek.

Een commuterend vierkant heet een *vezelproductvierkant* of een *cartesisch vierkant* wanneer het deze eigenschap heeft. Alleen commutativiteit is onvoldoende: zij zegt nog niet dat alle compatibele paren op precies één manier worden voorgesteld.

Deze eigenschap bepaalt P op uniek isomorfisme na, mits de projecties worden gerespecteerd. Twee oplossingen geven immers unieke afbeeldingen naar elkaar; hun samenstellingen hebben dezelfde projecties als de identiteit en zijn dus zelf de identiteit.

3 Vezelproducten van groepen

- Zijn $f : G_1 \to H$ en $g : G_2 \to H$ groepshomomorfismen, dan is

$$M = G_1 \times_H G_2 = \{(x, y) : f(x) = g(y)\}$$

een deelgroep van $G_1 \times G_2$. Om de geslotenheid onder vermenigvuldiging te zien, neem $(x, y), (x', y') \in M$. Dan

$$f(xx') = f(x)f(x') = g(y)g(y') = g(yy').$$

Dus ook hun product (xx', yy') voldoet aan de compatibiliteitsvoorwaarde en ligt in M. Verder ligt $(1, 1)$ in M, en $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = g(y)^{-1} = g(y^{-1})$, zodat ook inversen in M liggen. De projecties zijn groepshomomorfismen.

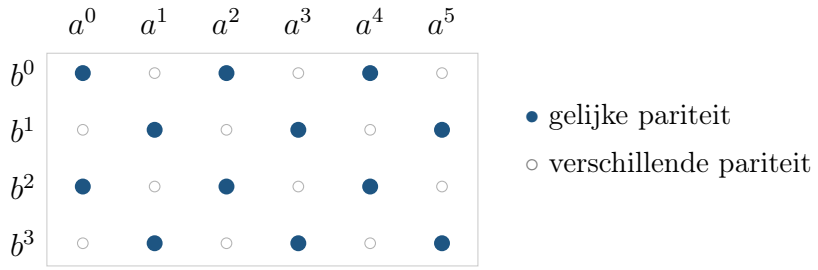
Voorbeeld

- Neem $G_1 = C_6 = \langle a \rangle$, $G_2 = C_4 = \langle b \rangle$ en $H = C_2 = \langle c \rangle$, met $f(a) = g(b) = c$. Dan

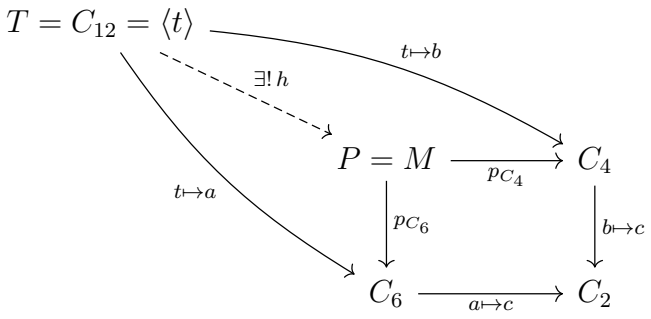
$$M = \{(a^i, b^j) : i \equiv j \pmod 2\}.$$

Er zijn 12 zulke paren. Het element $x = (a, b)$ heeft orde $\mathrm{kgv}(6, 4) = 12$; al zijn machten liggen in M. Bijgevolg

$$\boxed{C_6 \times_{C_2} C_4 = \langle (a, b) \rangle \cong C_{12}.}$$



Figuur 4. De twaalf volle punten vormen het vezelproduct, een cyclische groep.



Figuur 5. De unieke pijl is het isomorfisme $h : C_{12} \to M$, $h(t^k) = (a^k, b^k)$.

- De kernen van de twee projecties zijn expliciet

$$N_1 = \ker(p_{C_6}) = \{(1, 1), (1, b^2)\} = \{1, x^6\},$$
$$N_2 = \ker(p_{C_4}) = \{(1, 1), (a^2, 1), (a^4, 1)\} = \{1, x^4, x^8\}.$$

Hun doorsnede is $N_1 \cap N_2 = \{1_M\} = \{(1,1)\}$, en hun product is

$$\begin{aligned} N_1N_2 &= \{(1,1),(a^2,1),(a^4,1),(1,b^2),(a^2,b^2),(a^4,b^2)\} \\ &= \{1,x^2,x^4,x^6,x^8,x^{10}\} = \langle x^2\rangle. \end{aligned}$$

Dit is precies de kern van de gemeenschappelijke pariteitsafbeelding $M \to C_2$. Daarom

$$M/N_1 \cong C_6, \quad M/N_2 \cong C_4, \quad M/(N_1N_2) \cong C_2.$$

en geldt:

$$M \cong (M/N_1) \times_{M/(N_1N_2)} (M/N_2) \cong C_6 \times_{C_2} C_4.$$

Algemeen geldt:

Stelling 3.1

Voor normale deelgroepen $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ is

$$G/(N_1 \cap N_2) \cong (G/N_1) \times_{G/(N_1N_2)} (G/N_2).$$

Voor $N_1 \cap N_2 = \{1\}$ is de linkerkant dus G zelf. De pijlen naar $G/(N_1N_2)$ zijn de natuurlijke quotiënthomomorfismen.

$$\begin{array}{ccc} G/(N_1 \cap N_2) & \longrightarrow & G/N_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/N_2 & \longrightarrow & G/(N_1N_2) \end{array}$$

Figuur 6. Een groep reconstrueren via twee normale deelgroepen.

Bewijs. Het product N_1N_2 is een normale deelgroep. De natuurlijke afbeelding

$$G \longrightarrow (G/N_1) \times (G/N_2), \qquad z \longmapsto (zN_1, zN_2)$$

heeft kern $N_1 \cap N_2$, en haar beeld bestaat uit compatibele paren.

Omgekeerd: als aN_1 en bN_2 dezelfde afbeelding in $G/(N_1N_2)$ hebben, dan is $a^{-1}b = n_1n_2$ met $n_i \in N_i$. Het element

$$z = an_1 = bn_2^{-1}$$

heeft de gewenste nevenklassen $zN_1 = aN_1$ en $zN_2 = bN_2$. De afbeelding is dus surjectief op het vezelproduct; de eerste isomorfiestelling voltooit het bewijs. □

4 Vezelproducten van ringen

Propositie 4.1

Voor ringhomomorfismen $f : A \to C$ en $g : B \to C$ is $P = A \times_C B$ een deelring van $A \times B$, met

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \qquad (a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

De eenheid is $(1_A, 1_B)$.

Bewijs. Voor compatibele paren geldt bijvoorbeeld $f(aa') = f(a)f(a') = g(b)g(b') = g(bb')$. Optellen en tegengestelden werken analoog. Voor ringhomomorfismen $u : T \to A$ en $v : T \to B$ met $f \circ u = g \circ v$ bewaart de unieke afbeelding $h(t) = (u(t), v(t))$ eveneens de ringbewerkingen en de eenheid. □

De volgende stelling verklaart waarom vezelproducten bij gehele groepsringen verschijnen: twee quotiënten kunnen samen de oorspronkelijke ring beschrijven, met een resterende congruentie als verbindingsvoorwaarde.

Stelling 4.2

Zijn I, J tweezijdige idealen van een ring R, dan is

$$R/(I \cap J) \;\cong\; (R/I) \times_{R/(I+J)} (R/J),$$

via $r + (I \cap J) \mapsto (r + I, r + J)$. De afbeeldingen naar $R/(I + J)$ zijn de natuurlijke quotiëntafbeeldingen.

$$\begin{array}{ccc} R/(I \cap J) & \longrightarrow & R/J \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \longrightarrow & R/(I + J) \end{array}$$

Figuur 7. Dit vierkant is altijd een vezelproductvierkant.

Bewijs. De afbeelding $R \to R/I \times R/J$ heeft kern $I \cap J$. Haar beeld ligt in het vezelproduct. Voor een compatibel paar $(a + I, b + J)$ geldt $a - b \in I + J$. Schrijf $a - b = i + j$ met $i \in I$, $j \in J$. Dan heeft

$$r = a - i = b + j$$

precies de gewenste restklassen: $r + I = a + I$ en $r + J = b + J$. Dit bewijst de surjectiviteit op het vezelproduct. □

Gevolg 4.3 — Chinese reststelling. Als $I + J = R$, is het gemeenschappelijke quotiënt de nulring. Elk paar is dan compatibel en

$$R/(I \cap J) \cong R/I \times R/J.$$

In de categorie van ringen laten we hier de nulring toe. Wanneer $I + J \neq R$, blijft de congruentie in het gemeenschappelijke quotiënt essentieel.

Voorbeeld. Neem $R = \mathbb{Z}$, $I = 4\mathbb{Z}$ en $J = 6\mathbb{Z}$. Dan

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}).$$

Van de $4 \cdot 6 = 24$ paren hebben er 12 dezelfde pariteit. Het paar $(1 + 4\mathbb{Z}, 3 + 6\mathbb{Z})$ komt van $9 + 12\mathbb{Z}$; het paar $(0 + 4\mathbb{Z}, 1 + 6\mathbb{Z})$ is niet compatibel.

Voorbeeld: $\mathbb{Z}C_2$

Neem $C_2 = \langle s : s^2 = 1 \rangle$. Ieder element van $\mathbb{Z}C_2$ heeft de unieke vorm $a + bs$. We bouwen de vezelproductbeschrijving in vier stappen op.

Stap 1: de afbeeldingen naar het gemeenschappelijke doel. Neem twee exemplaren van $\mathbb{Z}$, met de reducties

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2, \quad u \mapsto \overline{u}, \qquad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2, \quad v \mapsto \overline{v}.$$

Dit zijn ringhomomorfismen. Het gemeenschappelijke doel vergelijkt dus de pariteit van twee gehele getallen.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{F}_2 \end{array}$$

Stap 2: het vezelproduct en zijn projecties. Vorm de ring van compatibele paren

$$P = \mathbb{Z} \times_{\mathbb{F}_2} \mathbb{Z} = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : u \equiv v \pmod 2\},$$

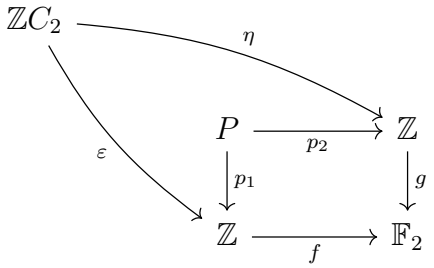
met $p_1(u, v) = u$ en $p_2(u, v) = v$. Dan geldt $f \circ p_1 = g \circ p_2$.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{F}_2 \end{array}$$

Stap 3: de evaluaties vanuit $\mathbb{Z}C_2$. Evalueren in $s = 1$ en $s = -1$ geeft ringhomomorfismen

$$\varepsilon(a + bs) = a + b, \qquad \eta(a + bs) = a - b.$$

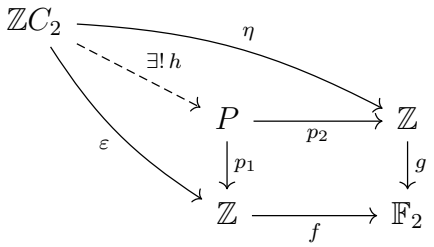
Omdat $(a + b) - (a - b) = 2b$, geldt $f \circ \varepsilon = g \circ \eta$. De twee evaluaties passen dus boven het vierkant uit stap 2:



Stap 4: de universele eigenschap en het isomorfisme. De universele eigenschap van P geeft precies één ringhomomorfisme

$$h : \mathbb{Z}C_2 \to P, \qquad h(a+bs) = (a+b, a-b),$$

waarvoor $p_1 \circ h = \varepsilon$ en $p_2 \circ h = \eta$.



Hier is h bovendien een isomorfisme. Voor $(u, v) \in P$ zijn immers

$$a = \frac{u+v}{2}, \qquad b = \frac{u-v}{2}$$

gehele getallen, en deze coëfficiënten zijn uniek. De inverse is dus

$$h^{-1}(u,v) = \frac{u+v}{2}\,1 + \frac{u-v}{2}\,s.$$

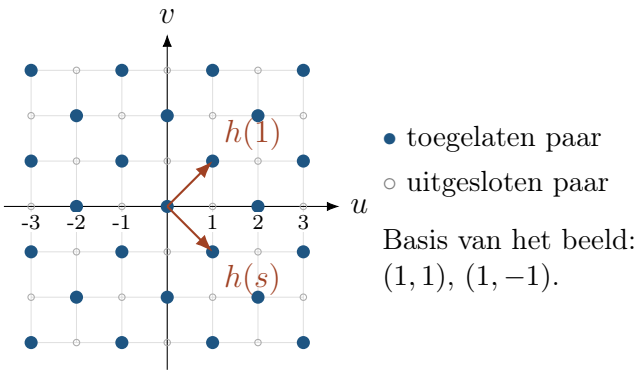
Stelling 4.4

Samengevat krijgen we het vezelproductvierkant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}C_2 \cong \mathbb{Z} \times_{\mathbb{F}_2} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\eta:\, s\mapsto -1} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle \varepsilon:\, s\mapsto 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{F}_2. \end{array}$$

Hier zijn f en g reductie modulo 2.

- Het beeld van h kan als een rooster worden getekend:



Figuur 8. Het beeld is een deelrooster van index 2 in $\mathbb{Z}^2$.

5 Vezelproducten van gehele groepsringen over cyclische groepen van priemorde

Het vorige voorbeeld is het geval $p = 2$ van een algemene constructie. Laat p een priemgetal zijn, $C_p = \langle s \rangle$ en ζ een primitieve p-de eenheidswortel. Met

$$N(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$$

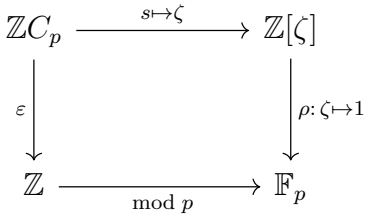
hebben we $X^p - 1 = (X-1)N(X)$, $\mathbb{Z}C_p \cong \mathbb{Z}[X]/(X^p-1)$ en $\mathbb{Z}[\zeta] \cong \mathbb{Z}[X]/(N)$. De laatste identificatie gebruikt dat het cyclotomische polynoom N minimaal is voor ζ.

Stelling 5.1

Er is een ringisomorfisme

$$\mathbb{Z}C_p \cong \mathbb{Z} \times_{\mathbb{F}_p} \mathbb{Z}[\zeta], \qquad \alpha \longmapsto \big(\varepsilon(\alpha), \alpha(\zeta)\big).$$

Hier is $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ reductie modulo p, en is $\rho : \mathbb{Z}[\zeta] \to \mathbb{F}_p$ gegeven door $\rho(q(\zeta)) = q(1) \bmod p$.



Figuur 9. De augmentatie en de cyclotomische component passen samen modulo p.

Bewijs. Pas Stelling 4.2 toe op $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = (X-1)$, $J = (N)$. Als $h = Nk$ ook deelbaar is door $X - 1$, dan $0 = h(1) = p\,k(1)$, dus $k(1) = 0$. Hieruit volgt

$$I \cap J = ((X-1)N) = (X^p - 1).$$

Verder is $N(X) - p$ deelbaar door $X - 1$, zodat

$$I + J = (X - 1, p), \qquad R/(I+J) \cong \mathbb{F}_p.$$

Dit identificeert alle vier de hoeken. Ook is ρ welgedefinieerd: een veelvoud van N verandert de waarde in 1 met een veelvoud van p. □

Voorbeeld: $\mathbb{Z}C_3$

Neem $C_3 = \langle g \rangle$ en $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, met $\omega \neq 1$. Schrijf $R = \mathbb{Z}C_3$,

$$I = \Delta(C_3), \qquad J = (1 + g + g^2).$$

Zet $\nu = 1 + g + g^2$. Omdat $g\nu = \nu$, geldt voor elk element $a + bg + cg^2$ van R

$$(a + bg + cg^2)\nu = (a + b + c)\nu.$$

Het ideaal J bestaat dus precies uit de gehele veelvouden $k\nu$. Als zo'n element ook in $I = \ker \varepsilon$ ligt, dan

$$0 = \varepsilon(k\nu) = 3k.$$

Dus $k = 0$, wat $I \cap J = 0$ bewijst.

Verder is de augmentatie van elk element van $I + J$ deelbaar door 3: voor $i \in I$ is $\varepsilon(i + k\nu) = 3k$. Omgekeerd, als $\varepsilon(\alpha) = 3k$, dan heeft $\alpha - k\nu$ augmentatie nul en ligt dit verschil in I. Bijgevolg

$$I + J = \{\alpha \in R : 3 \mid \varepsilon(\alpha)\}.$$

De drie quotiënten kunnen nu afzonderlijk worden herkend:

- De augmentatie $\varepsilon : R \to \mathbb{Z}$ is surjectief en heeft kern I. Daarom $R/I \cong \mathbb{Z}$.
- De evaluatie $\eta : R \to \mathbb{Z}[\omega]$, $g \mapsto \omega$, is een surjectief ringhomomorfisme, want $\omega^3 = 1$. Voor de kern gebruiken we $\omega^2 = -1 - \omega$:

  $$\eta(a + bg + cg^2) = (a - c) + (b - c)\omega.$$

  Omdat $1, \omega$ lineair onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}$, is dit nul precies als $a = b = c$. De kern bestaat dus uit de veelvouden van ν, en is J. Daarom $R/J \cong \mathbb{Z}[\omega]$.
- De afbeelding $R \to \mathbb{F}_3$, $\alpha \mapsto \overline{\varepsilon(\alpha)}$, is surjectief en heeft volgens de bovenstaande beschrijving kern $I + J$. Daarom $R/(I + J) \cong \mathbb{F}_3$.

Met Stelling 4.2 volgt dus

$$\mathbb{Z}C_3 \cong \mathbb{Z} \times_{\mathbb{F}_3} \mathbb{Z}[\omega].$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}C_3 & \xrightarrow{g \mapsto \omega} & \mathbb{Z}[\omega] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \omega \mapsto 1} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[\text{mod } 3]{} & \mathbb{F}_3 \end{array}$$

Expliciete reconstructie. Voor een compatibel paar $(m, b + c\omega)$, dus $m \equiv b + c \pmod 3$, neem

$$k = \frac{m - b - c}{3}, \qquad \alpha = b + cg + k(1 + g + g^2).$$

Dan zijn $\varepsilon(\alpha) = m$ en $\alpha(\omega) = b + c\omega$. Dit geeft een concrete inverse van het vezelproductisomorfisme.

Bijvoorbeeld: $(5, 1 + \omega)$ is compatibel en komt van $2 + 2g + g^2$. Het paar $(4, 1 + \omega)$ is niet compatibel en heeft dus geen inverse afbeelding in $\mathbb{Z}C_3$.

6 Een eindige normale deelgroep gebruiken

Wat kunnen we doen als de groep G niet meer cyclisch van priemorde is? We gebruiken een eindige normale deelgroep om ook dan een vezelproductbeschrijving van $\mathbb{Z}G$ te verkrijgen.

Voor een groep G en $K \trianglelefteq G$ is er een natuurlijke surjectie

$$q : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}(G/K), \qquad g \longmapsto gK.$$

Haar kern heet hier het *relatieve augmentatie-ideaal*:

$$\Delta(G, K) = \ker q = (k - 1 : k \in K).$$

Veronderstel nu dat K eindig is, met $k = |K|$, en zet

$$\widetilde{K} = \sum_{h \in K} h, \qquad J = \mathbb{Z}G\widetilde{K}.$$

Normaliteit geeft $g\widetilde{K}g^{-1} = \widetilde{K}$; dus $\widetilde{K}$ is centraal in $\mathbb{Z}G$ en J is een tweezijdig ideaal. Voor $K = G$ is $\Delta(G, K) = \Delta(G)$.

Stelling 6.1

Voor een eindige normale deelgroep $K \trianglelefteq G$ van orde k is

$$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}(G/K) \times_{(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})(G/K)} \big(\mathbb{Z}G/(\widetilde{K})\big).$$

De eerste afbeelding naar het gemeenschappelijke quotiënt reduceert de coëfficiënten modulo k. De tweede wordt geïnduceerd door q.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}G/(\widetilde{K}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{q}} \\ \mathbb{Z}(G/K) & \xrightarrow[\text{mod } k]{} & (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})(G/K) \end{array}$$

Figuur 10. Het vezelproduct bij een eindige normale deelgroep.

Bewijs. Zet $I = \Delta(G, K)$. De elementen $t\widetilde{K}$, met t een vertegenwoordiger van een nevenklasse, vormen een gehele basis van J: hun dragers zijn disjunct. De afbeelding q stuurt $t\widetilde{K}$ op $k(tK)$, zodat haar beperking tot J injectief is. Daarom $I \cap J = 0$. Verder is $q(J) = k\mathbb{Z}(G/K)$, dus $\mathbb{Z}G/(I + J) \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})(G/K)$. Stelling 4.2 geeft het resultaat. □

Voorbeeld: $\mathbb{Z}C_8$

Neem $G = C_8 = \langle s \rangle$, $K = \{1, s^4\}$ en schrijf $t = sK$. Dan is $G/K \cong C_4 = \langle t \rangle$ en

$$I = (s^4 - 1) = \Delta(G, K), \qquad J = (1 + s^4).$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{Z}C_8/I \cong \mathbb{Z}C_4, \qquad \mathbb{Z}C_8/J \cong \mathbb{Z}[X]/(X^4 + 1) = \mathbb{Z}[\zeta_8].$$

In de tweede component is $s^4 = -1$. De twee relaties $s^4 = 1$ en $s^4 = -1$ zijn verenigbaar na reductie modulo 2; het gemeenschappelijke quotiënt is $\mathbb{F}_2C_4$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}C_8 & \xrightarrow{s \mapsto \zeta_8} & \mathbb{Z}[\zeta_8] \\ \downarrow{\scriptstyle s \mapsto t} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_8 \mapsto t} \\ \mathbb{Z}C_4 & \xrightarrow[\text{mod } 2]{} & \mathbb{F}_2C_4 \end{array}$$

Figuur 11. De twee componenten van $\mathbb{Z}C_8$ passen samen modulo twee.

Voorbeeld 6.2

$$\mathbb{Z}C_8 \cong \mathbb{Z}C_4 \times_{\mathbb{F}_2C_4} \mathbb{Z}[\zeta_8].$$

Een paar $\left(\sum_{i=0}^3 A_i t^i, \sum_{i=0}^3 B_i \zeta_8^i\right)$ is compatibel als en slechts als $A_i \equiv B_i \pmod 2$ voor elke i.

Reconstructie. Schrijf een element van $\mathbb{Z}C_8$ als

$$\alpha = \sum_{i=0}^{3} (a_i s^i + b_i s^{i+4}).$$

De twee componenten zijn respectievelijk

$$\sum_{i=0}^{3} (a_i + b_i) t^i, \qquad \sum_{i=0}^{3} (a_i - b_i) \zeta_8^i.$$

Voor een compatibel paar zijn de unieke coëfficiënten dus

$$a_i = \frac{A_i + B_i}{2}, \qquad b_i = \frac{A_i - B_i}{2}.$$

Dit is de coëfficiëntgewijze versie van de som-en-verschilconstructie voor C_2. Let op de verschillende quotiënten: $\mathbb{Z}(G/K) = \mathbb{Z}C_4$ is het quotiënt naar de groep G/K, terwijl $\mathbb{Z}G/(\widetilde{K}) = \mathbb{Z}[\zeta_8]$ door de groepsringsom $1 + s^4$ wordt bepaald.