1107 Vilket är nästa tal i talföljden?

a) $10_{två}, 110_{två}, 10010_{två}, \ldots$

b) $11_{två}, 1001_{två}, 11011_{två}, \ldots$

c) $-1_{två}, 100_{två}, 1001_{två}, \ldots$

1107 a) $1\cdot 2^1,\ 1\cdot 2^2+1\cdot 2^1,\ 1\cdot 2^4+1\cdot 2^1,\ \ldots = 2, 6, 18, \ldots$

Nästa tal är $3\cdot 18 = 54_{tio}$

$$\begin{array}{ll}
2^5 = 32 & 54 - 1\cdot 32 = 22 \\
2^4 = 16 & 22 - 1\cdot 16 = 6 \\
2^3 = 8 & 6 - 0\cdot 8 = 6 \\
2^2 = 4 & 6 - 1\cdot 4 = 2 \\
2^1 = 2 & 2 - 1\cdot 2 = 0 \\
2^0 = 1 & 0 - 0\cdot 1 = 0
\end{array}$$

$54_{tio} = 110110_{två}$

Geogebra:

ToBase(54,2)

b) $1\cdot 2^1+1,\ 1\cdot 2^3+1,\ 1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^1+1,\ \ldots = 3, 9, 27, \ldots$

Nästa tal är $3\cdot 27 = 81_{tio}$

$$\begin{array}{ll}
64 & 81 - 1\cdot 64 = 17 \\
32 & 17 - 0\cdot 32 = 17 \\
16 & 17 - 1\cdot 16 = 1 \\
8 & 1 - 0\cdot 8 = 1 \\
4 & 1 - 0\cdot 4 = 1 \\
2 & 1 - 0\cdot 2 = 1 \\
1 & 1 - 1\cdot 1 = 0
\end{array}$$

$81_{tio} = 1010001_{två}$

Geogebra:

ToBase(81,2)

c) $-1,\ 1\cdot 2^2,\ 1\cdot 1^3+1,\ \ldots = -1,4,9,\ldots$

Nästa tal är $9+5 = 14_{tio}$

8	$14 - 1\cdot 8 = 6$
4	$6 - 1\cdot 4 = 2$
2	$2 - 1\cdot 2 = 0$
1	$0 - 0\cdot 1 = 0$

$14_{tio} = 1110_{två}$

Geogebra:

ToBase(14, 2)

1108 Fyll i det saknade talet i binär form, utan att först omvandla till decimal form.

a) $10_{två} + 10_{två} = \square$

b) $11_{två} + \square = 100_{två}$

1108. a)

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \cancel{1}\ \ 2\ \ \\ 1\ 0\ 0 \\ -\quad 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1 \end{array}$$

1109 Emelie påstår att det är enkelt att få en uppfattning om storleken av ett binärt tal. ”Jag räknar antalet siffror i det binära talet och kallar resultatet för a. Därefter beräknar jag 2^a. Då vet jag att det binära talet måste vara mindre än så.”

Fungerar Emelies metod? Motivera ditt svar.

1109. Ja. exempelvis är $11111 = 2^4+2^3+2^2+2+1 =$

$= 31 < 2^5 = 32$

1110 Talet 0,207 består av två tiondelar och sju tusendelar. I utvecklad form skriver vi $0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$. Även i det binära talsystemet kan vi skriva tal med "decimaler". Exempelvis tolkas talet $0{,}101_{\text{två}}$ som $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$. Skriv följande tal i det decimala talsystemet.

a) $0{,}101_{\text{två}}$

b) $1{,}01_{\text{två}}$

c) $0{,}011_{\text{två}}$

1110. a) $0.101 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = \underline{0.625}$

b) $1.01 = 1 + 1 \cdot 2^{-2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \underline{1.25}$

c) $0.011 = 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \underline{0.375}$

1111 I föregående uppgift visade vi hur man kan skriva tal med "decimaler" i det binära talsystemet. Skriv följande tal i det binära talsystemet.

a) $0{,}75_{\text{tio}}$

b) $1{,}125_{\text{tio}}$

c) $0{,}828125_{\text{tio}}$

1111. a)

$2^0 = 1$ $\quad 0{,}75 - 0 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$

$2^{-1} = 0{,}5$ $\quad 0{,}75 - 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ $\quad \underline{0{,}75_{\text{tio}} = 0{,}11_{\text{två}}}$

$2^{-2} = 0{,}25$ $\quad 0{,}25 - 1 \cdot 0{,}25 = 0$

$2^{-3} = 0{,}125$

b)

$2^0 = 1$ $\quad 1{,}125 - 1 \cdot 1 = 0{,}125$ $\quad \underline{1{,}125_{\text{tio}} = 1{,}001_{\text{två}}}$

$2^{-1} = 0{,}5$ $\quad 0{,}125 - 0 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$

$2^{-2} = 0{,}25$ $\quad 0{,}125 - 0 \cdot 0{,}25 = 0{,}125$

$2^{-3} = 0{,}125$ $\quad 0{,}125 - 1 \cdot 0{,}125 = 0$

c)

$2^0 = 1$

$2^{-1} = 0{,}5$ $\quad 0{,}828125 - 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}328125$

$2^{-2} = 0{,}25$ $\quad 0{,}328125 - 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}078125$

$2^{-3} = 0{,}125$ $\quad 0{,}078125 - 0 \cdot 0{,}125 = 0{,}078125$

$2^{-4} = 0{,}0625$ $\quad 0{,}078125 - 1 \cdot 0{,}0625 = 0{,}015625$

$2^{-5} = 0{,}03125$ $\quad 0{,}015625 - 0 \cdot 0{,}015625 = 0{,}015625$

$2^{-6} = 0{,}015625$ $\quad 0{,}015625 - 1 \cdot 0{,}015625 = 0$

$$\underline{0{,}828125_{\text{tio}} = 0{,}110101_{\text{två}}}$$

1112 Talet $0{,}2_{tio}$ har en oändlig, periodisk "decimal-utveckling" i binär form. Skriv talet $0{,}2_{tio}$ i binär form med sex värdesiffror.

1112.

$2^0 = 1$ — 0,
$2^{-1} = 0{,}5$ — 0
$2^{-2} = 0{,}25$ — 0
$2^{-3} = 0{,}125$ — $0{,}2 - 1 \cdot 0{,}125 = 0{,}075$
$2^{-4} = 0{,}0625$ — $0.075 - 1 \cdot 0{,}0625 = 0{,}0125$
$2^{-5} = 0{,}03125$ — $0.0125 - 0 \cdot 0{,}03125 = 0{,}0125$
$2^{-6} = 0{,}015625$ — $0{,}0125 - 0 \cdot 0{,}015625 = 0{,}0125$
$2^{-7} = 0{,}0078125$ — $0{,}0125 - 1 \cdot 0{,}0078125 = 0{,}0046875$
$2^{-8} = 0{,}00390625$ — $0{,}0046875 - 1 \cdot 0{,}00390625 = 0{,}00078125$

$0{,}2_{tio} = 0{,}00110011_{två}$

1113 På digitala klockor som visar tiden med hjälp av det binära systemet visar varje ljuskälla antingen en etta eller en nolla. Hur många ljuskällor behövs till en klocka som visar tiden på det sättet, dvs. timmar och minuter i 24-timmars format? Motivera ditt svar.

23 : 59 motsvarar

10111 : 111011 => 11 st ljuskällor

1114 Talen $11_{\text{två}}$, $111_{\text{två}}$, $1111_{\text{två}}$ och $11111_{\text{två}}$ består endast av ettor. Madeleine säger att sådana tal alltid kan skrivas i formen $2^n - 1$ för något heltal n. Förklara varför Madeleine har rätt.

1114.

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\;\;1 \\ \hline 100 \\ 2^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ +\;\;\;1 \\ \hline 1000 \\ 2^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111 \\ +\;\;\;\;1 \\ \hline 10000 \\ 2^4 \end{array}$$

Adderas 1 till det binära talet fås 2^n.
Då måste alltså $2^n - 1$ motsvara talet med n st ettor.

1121 Skriv talen i det binära talsystemet.

a) 10_{sexton} b) $2A_{\text{sexton}}$
c) $12_{\text{åtta}}$ d) $70_{\text{åtta}}$

1121. a) $10_{\text{sexton}} = 1 \cdot 16 + 0 = 16_{\text{tio}} = \underline{10000_{\text{två}}}$

b) $2A_{\text{sexton}} = 2 \cdot 16 + 10 = 42_{\text{tio}} = 101010_{\text{två}}$

32	$42 - 1 \cdot 32 = 10$	1
16		0
8	$10 - 1 \cdot 8 = 2$	1
4		0
2	$2 - 1 \cdot 2 = 0$	1
1		0

Geogebra:

ToBase(FromBase("2A", 16), 2)

c) $12_{åtta} = 1 \cdot 8 + 2 = 10_{tio} = \underline{1010_{två}}$

8	$10 - 1 \cdot 8 = 2$	
4	0	
2	$2 - 1 \cdot 2 = 0$	
1	0	

Geogebra:

ToBase(FromBase("12",8),2)

d) $70_{åtta} = 7 \cdot 8 + 0 = 56_{tio} = \underline{111000_{två}}$

32	$56 - 1 \cdot 32 = 24$
16	$24 - 1 \cdot 16 = 8$
8	$8 - 1 \cdot 8 = 0$
4	0
2	0
1	0

Geogebra:

ToBase(FromBase("70",8),2)

1122 Skriv talet 171_{tio} i ett talsystem

a) med basen 5

b) med basen 9

1122. a) Geogebra: ToBase(171,5) = 1141_{fem}

b) Geogebra: ToBase(171,9) = 210_{nio}

1123 Fyll i det saknade talet i hexadecimal form.

a) $10_{sexton} + AB_{sexton} = \square$

b) $20_{sexton} + \square = A1_{sexton}$

1123. a)

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ AB \\ \hline BB_{sexton} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} A1 \\ -\ 20 \\ \hline 81_{sexton} \end{array}$$

1124 Fyll i det saknade talet i det oktala talsystemet.

a) $11_{åtta} + 7_{åtta} = \square$

b) $43_{åtta} - \square = 17_{åtta}$

1124. a)

$$\begin{array}{r} ^{1}\ \ \\ 11 \\ +\ \ 7 \\ \hline 20_{åtta} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \cancel{4}\,{}^{8}3 \\ -\ 17 \\ \hline 24_{åtta} \end{array}$$

Geogebra:

ToBase(FromBase("11",8) + FromBase("7",8),8)

1125 En dator kan visa 16 777 216 olika färger. Varje färg har en kod som anges som ett hexadecimalt tal med sex siffror. Här nedanför ser du Frankrikes och Italiens flagga. Ange de angivna hexadecimala färgkoderna i binär form.

a) 

Blå #0055A4

b) 

Röd #CE2B37

1125. a) Geogebra:

ToBase(FromBase("0055A4", 16), 2) =

= 101010110100100

b) Geogebra:

ToBase(FromBase("CE2B37", 16), 2) =

= 110011100010101100110111

1126 Talet 0,101 består av en tiondel och en tusendel. I utvecklad form skriver vi $0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$. Även i det oktala och hexadecimala talsystemet kan vi skriva tal med "decimaler". Exempelvis tolkas talet $0{,}101_{\text{åtta}}$ som $0 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 0 \cdot 8^{-2} + 1 \cdot 8^{-3}$. Skriv följande tal i det decimala talsystemet.

a) $0{,}2_{\text{åtta}}$ b) $1{,}05_{\text{åtta}}$ c) $0{,}11_{\text{sexton}}$

1126. a) $0.2_{\text{åtta}} = 2 \cdot 8^{-1} = \frac{2}{8} = \underline{0{,}25}$

b) $1.05_{\text{åtta}} = 1 + 5 \cdot 8^{-2} = 1 + \frac{5}{64} = \frac{69}{64} \approx \underline{1{,}078}$

c) $0.11_{\text{sexton}} = 1 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{256} = \frac{17}{256} \approx \underline{0{,}066}$

1127 Lös följande ekvationer, där k representerar en siffra i respektive talsystem.

a) $1k1_{\text{sexton}} - k3_{\text{åtta}} = 262_{\text{tio}}$

b) $\dfrac{k20_{\text{åtta}}}{k0_{\text{sexton}}} = 5_{\text{åtta}}$

1127. a) Prövning med $k=1$ $\Rightarrow$ $111_{\text{sexton}} - 13_{\text{åtta}}$

Geogebra: FromBase("111",16) - FromBase("13",8) = 262

$\Rightarrow$ $\underline{k=1}$

b) Prövning med $k=1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{120_{\text{åtta}}}{10_{\text{sexton}}}$

Geogebra: ToBase(FromBase("120",8)/FromBase("10",16),8) = 5

$\Rightarrow$ $\underline{k=1}$

1128 När man skriver talet $37{,}4_{\text{tio}}$ i heltalsbasen n får man $27{,}6_n$. Bestäm basen n.

1128. $2\cdot n^1 + 7\cdot n^0 + 6\cdot n^{-1} = 37{,}4$

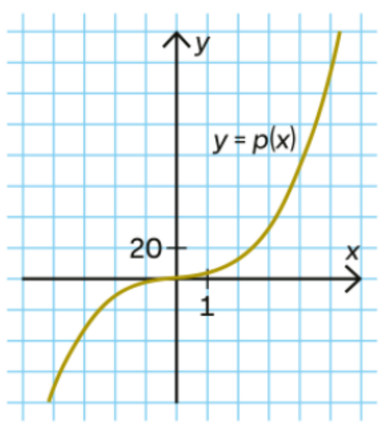
$$2n + \frac{6}{n} = 30{,}4$$

$$2n^2 - 30{,}4n + 6 = 0$$

$$2(n^2 - 15{,}2n + 3) = 0$$

$$n = 7{,}6 \pm \sqrt{7{,}6^2 - 3} = 7{,}6 \pm 7{,}4 = \underline{15}$$

1129 Figuren visar grafen till tredjegradspolynomet $p(x) = x^3 + 2x + 1$. Förklara hur man kan utnyttja grafen för att uppskatta storleken av följande tal.



a) 1021_{fyra} b) 1021_{fem}

1129. a) $1021_n = 1\cdot n^3 + 2\cdot n^1 + 1 = n^3 + 2n + 1 = p(n)$

$$n = 4 \Rightarrow 1021_{\text{fyra}} = p(4) \approx \underline{70_{\text{tio}}}$$

b) $n = 5 \Rightarrow 1021_{\text{fem}} = p(5) \approx \underline{140_{\text{tio}}}$

1130 För siffrorna a och b gäller att $ab_{fem} = bbb_{fyra}$.
Bestäm värdet av siffrorna a och b.

1130.

$$a \cdot 5^1 + b \cdot 5^0 = b \cdot 4^2 + b \cdot 4^1 + b \cdot 4^0$$

$$5a = 20b$$

$$a = 4b$$

Prövning:

b	a	ab_{fem}	(bas 10)	bbb_{fyra}	(bas 10)
1	4	41_{fem} =	21	111_{fyra} =	21

$\Rightarrow$ $(a, b) = (4, 1)$ förutsatt $a = b \neq 0$

1213 Ange alla tal n i intervallet $0 < n < 100$ som är en multipel av 2 och 7, men inte av 4.

1213. Multipel av 2 och 7 men ej 4 $\Rightarrow$

Talet delbart med $2 \cdot 7 = 14$ eller $2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$

$\Rightarrow$ $14 \cdot 1 = 14$ $\quad$ $14 \cdot 5 = 70$

$\cancel{14 \cdot 2}$ $\quad$ $\cancel{14 \cdot 6}$

$14 \cdot 3 = 42$ $\quad$ $14 \cdot 7 = 98$

$\cancel{14 \cdot 4}$

1214 Ett tal a har delarna $1, d_1, d_2, \ldots, d_n$ och a. Om vi adderar samtliga delare utom talet självt, så får vi summan $1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. För vissa tal a gäller att $a = 1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Sådana tal kallas *perfekta tal*. Det finns ett perfekt tal som är mindre än 10. Vilket är talet?

1214. Talet kan ej vara ett primtal =>

$4 = 2 \cdot 2$ $\quad 1 + 2 + 4 = 7$

$6 = 2 \cdot 3$ $\quad 1 + 2 + 3 = 6$

$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad 1 + 2 + 4 = 7$

$9 = 3 \cdot 3$ $\quad 1 + 3 + 3 = 7$

=> Talet 6 är ett perfekt tal

1215 Minsta gemensamma multipel (MGM) till två eller flera heltal är ett mycket användbart begrepp när man ska addera eller subtrahera bråk och inte har tillgång till digitala verktyg. Det är relativt enkelt att inse att den minsta gemensamma multipeln till 16 och 24 är 48. För större tal kan man först primtalsfaktorisera talen och därefter finna MGM.

a) Skriv ner ett antal multiplar till 64 respektive 24 och ange MGM(64, 24).

b) Primtalsfaktorisera 64 respektive 24 och beskriv hur detta kan hjälpa dig att hitta MGM(64, 24).

c) Bestäm $\frac{1}{24} + \frac{1}{64}$ genom att förlänga till MGM(64, 24) som nämnare.

d) Använd tekniken beskriven i deluppgift b) och c) för att beräkna $\frac{5}{84} + \frac{7}{126}$.

1215.

a,b) $64 = 2^6$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$MGM = LCM = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{192}$$

c) $$\frac{1}{24} + \frac{1}{64} = \frac{8+3}{192} = \underline{\frac{11}{192}}$$

d) $$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$MGM = LCM = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{252}$$

$$\frac{5}{84} + \frac{7}{126} = \frac{15+14}{252} = \underline{\frac{29}{252}}$$

1216 För ett tal a med delarna $1, d_1, d_2, \ldots, d_n$ och a gäller att talet kallas ett *fattigt tal* om $1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n < a$, dvs. om summan av alla delare förutom talet självt är mindre än talet. Om $1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n > a$, så kallas talet ett *rikt tal*, och om $1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n = a$, så är talet ett *perfekt tal*. Vilka tal i intervallet $25 \le a \le 30$ är

a) fattiga tal

b) rika tal

c) perfekta tal

1216. a-c)

$25 = 5 \cdot 5$ $\quad 1 + 5 = 6 < 25 \Rightarrow$ fattigt tal

$26 = 2 \cdot 13$ $\quad 1 + 2 + 13 = 16 < 26 \Rightarrow$ fattigt tal

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad 1 + 3 + 9 = 13 < 27 \Rightarrow$ fattigt tal

$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ $\quad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 \Rightarrow$ perfekt tal

29 primtal $\quad 1 < 29 \Rightarrow$ fattigt tal

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42 > 30$ rikt tal

1217 Två heltal a och b sägs vara relativt prima om SGD$(a, b) = 1$. Avgör om följande tal är relativt prima.

a) 50 och 63

b) 12 och 438

1217 a) $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$

$50 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$63 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

SGD = GCD = 1 => Ja, relativt prima

b) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $438 = 2 \cdot 3 \cdot 73$

$12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$438 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73$

SGD = GCD = $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ => Nej

1218 Ett sätt att definiera delbarhet är att säga att heltalet a är delbart med heltalet $b \neq 0$, om det finns ett heltal k sådant att $a = bk$. Motivera varför den definitionen betyder samma sak som att kvoten $\frac{a}{b}$ är ett heltal.

1218. $\frac{a}{b} = \frac{b \cdot k}{b}$ => $\frac{a}{b} = k$, dvs ett heltal

1219 Ett naturligt tal a uppfyller följande villkor:

- Det är delbart med 3, men inte med 9.
- $100 \le a \le 250$
- 2 och 5 är faktorer i a, men 4 är det inte.

Vilket eller vilka tal kan a vara? Motivera ditt svar.

1219

$$a = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x$$

$$100 \le 30x \le 250$$

$$\frac{10}{3} < x < \frac{25}{3}$$

x	a	
$\frac{12}{3} = 4$	utgår	
$\frac{15}{3} = 5$	$30 \cdot 5 = \underline{150}$	
$\frac{18}{3} = 6$	$30 \cdot 6 = 180$	utgår pga delbar med 9
$\frac{21}{3} = 7$	$30 \cdot 7 = \underline{210}$	
$\frac{24}{3} = 8$	$30 \cdot 8 = 240$	utgå pga delbar med 4

1220 För vilka värden på heltalet n gäller att $n \mid 0$?

1220. $n \neq 0$

1221 a, b och c är tre på varandra följande heltal. Förklara varför summan $a + c$ alltid är delbar med 2.

1221. $a + c = x + x + 2 = 2x + 2 = 2(x+1) = 2m$ #

1222 Ett Mersennetal är ett tal i formen $2^n - 1$ för något tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Avgör vilka Mersennetal mindre än 100 som är primtal.

b) Finns det något Mersennetal för jämna $n > 2$ som är primtal? Motivera ditt svar.

1222. a) Geogebra: Sequence$(2^n-1, n, 1, 6) =$

$= \{1, 3, 7, 15, 31, 63\}$

Av dessa är 3, 7 och 31 primtal

b) Nej, det finns inga jämna primtal > 2.

1223 Ett tal skrivs med basen tolv. Vilken slutsiffra kan talet ha om vi vet att talet är delbart med

a) 12 b) 3

1223. a) Slutsiffran 0

b) Slutsiffran 0, 3, 6 eller 9

1224 Om ett sammansatt tal har primtalsfaktoriseringen $p^m \cdot q^n$ har talet $(m + 1)(n + 1)$ delare. Till exempel har talet $24 = 2^3 \cdot 3^1$ just $(3 + 1)(1 + 1) = 8$ delare.

a) Vilka är delarna till 24?

b) Motivera varför formeln för att finna antalet delare fungerar.

c) Hur många delare har $12\,348 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^3$?

d) Liisa säger att eftersom $180 = 5 \cdot 36 = 5^1 \cdot 6^2$, så har 180 sex delare $(2 \cdot 3)$. Liisa har fel. Förklara varför.

1224 a) $24 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow$

24 har delarna 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 och 24

b) m och n kan även var noll.

Således kan dessa ha m+1 resp n+1 värden.

c) $(2+1)(2+1)(3+1) = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ st

d) Talet 6 är inget primtal

1225 Om två på varandra följande udda tal är primtal, så kallas de för primtalstvillingar. Ett exempel på primtalstvillingar är alltså 5 och 7, medan 43 och 47 inte är primtalstvillingar, eftersom det udda talet 45 ligger mellan dem.

a) Ange alla primtalstvillingar upp till 30.

b) Det finns endast ett fall där tre på varandra följande udda tal är primtal. Vilka är talen?

c) Bevisa att dessa tre tal är det enda fallet där tre på varandra följande udda tal också är primtal.

1225 Primtal < 30: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

a) Primtalstvillingar: $\{3,5\}, \{5,7\}, \{11,13\}, \{17,19\}$

b) $\{3, 5, 7\}$

c) Både p_1, p_2 och p_3 måste vara udda tal ej delbara med 3. Första talet p_1 kan då skrivas som $p_1 = 3k+1$ eller $p_1 = 3k+2$.

Fall I	Fall II
$p_1 = 3k+1$	$p_1 = 3k+2$
$p_2 = 3k+3$ (delbar med 3)	$p_2 = 3k+4$
$p_3 = 3k+5$	$p_3 = 3k+6$ (delbar med 3)

Ett av talen blir således alltid delbart med 3, dvs inget primtal. #

1226 Låt p och q vara två på varandra följande primtal, större än 2. Visa att $p + q$ alltid är en produkt av minst tre primtalsfaktorer. Det är inte nödvändigt att alla tre faktorerna är olika.

1226.

$$p = 2k+1 \quad , \quad k > 0$$
$$q = 2k+3$$

$$p+q = 4k+4 = 4(k+1) = 2 \cdot 2 \cdot (k+1) = 2 \cdot 2 \cdot m \quad \#$$

1237 Ange ett sjusiffrigt tal som är delbart med 6 och där siffran 0 inte ingår i talet.

1237. ex.v $\underline{6666666}$ $(= 1111111 \cdot 6)$

1238 När 10 divideras med talet b fås en principal rest som är dubbelt så stor som kvoten. Bestäm talet b.

1238.

$$10 = x \cdot b + 2x$$

$$b = \frac{10-2x}{x}$$

$$x = 1 \Rightarrow b = \frac{10-2 \cdot 1}{1} = \underline{8}$$

1239 Konstruera en uppgift som handlar om att bestämma den största gemensamma delaren till två naturliga tal. Resultatet ska vara 23.

1239. Bestäm den största gemensamma delaren till talen 2760 och 713.

1240 Sara vill hitta SGD till de tre talen 2 038, 1 236 och 760. Hon är osäker på vilken metod som är enklast, dvs. hon kan inte bestämma sig om man ska primtalsfaktorisera de tre talen för att hitta gemensamma delare eller om man ska använda Euklides algoritm. Hon är inte ens säker på om man kan använda dessa algoritmer för att bestämma SGD för fler än två tal.

a) Kan Sara använda båda dessa metoder för att bestämma SGD för tre tal? Motivera ditt svar.

b) Vilken metod bör Sara använda för att i detta fall bestämma SGD så enkelt som möjligt? Motivera ditt svar.

c) Bestäm SGD till 2 038, 1 236 och 760.

1240. a) Ja, bägge metoderna kan användas.

b, c)

$2038 = 1 \cdot 2 \cdot 1019$

$1236 = 1 \cdot 3 \cdot 103$

$760 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 19$

$\text{SGD} = 1 \cdot 2 = \underline{2}$

Alt: Geogebra: GCD({2038,1236,760}) = 2

~~1126~~ 1241 August, Hugo, Maja och Bernt ska undersöka om 887 är ett primtal.

– Då behöver vi kontrollera om 887 är delbart med något tal som är mindre än 887, säger August.

– Det räcker med att undersöka om 887 är delbart med något primtal som är mindre än 887, säger Hugo.

– Nej, vi behöver bara undersöka om det är delbart med något primtal upp till hälften av 887, alltså ett primtal som inte är större än 443, säger Maja.

– Inte ens det, säger Bernt. Det räcker med att undersöka om 887 är delbart med något primtal mindre än 31, alltså upp till och med 29.

Hur kan August, Hugo, Maja och Bernt ha resonerat? Vem har rätt?

1241. Bernt har rätt: $\sqrt{887} \approx 29.8$

$\Rightarrow$ 29 är högsta tal som behöver undersökas.

1242 Ett godtyckligt tvåsiffrigt tal kan skrivas AB där A är tiotalssiffran och B är entalssiffran. Visa att om siffersumman $A + B$ är delbar med 9, så gäller också att AB är delbart med 9.

1242

$AB = A \cdot 10 + B$

$A+B$ delbar med 9 $\Rightarrow$ $A+B = 9k$

$AB = (9k - B) \cdot 10 + B = 90k - 9B = 9(10k - B) = 9m$ #

1243 Visa att om talet som bildas av de två sista siffrorna i ett godtyckligt tal är delbart med 4, så är också hela talet delbart med 4.

1243.

$ABC = 100A + 10B + C$

$BC = 10B + C = 4k \Rightarrow$

$ABC = 100A + 4k = 4(25A + k) = 4m$ #

1244 Visa att om $a \mid b$, så gäller att $a^2 \mid b^2$.

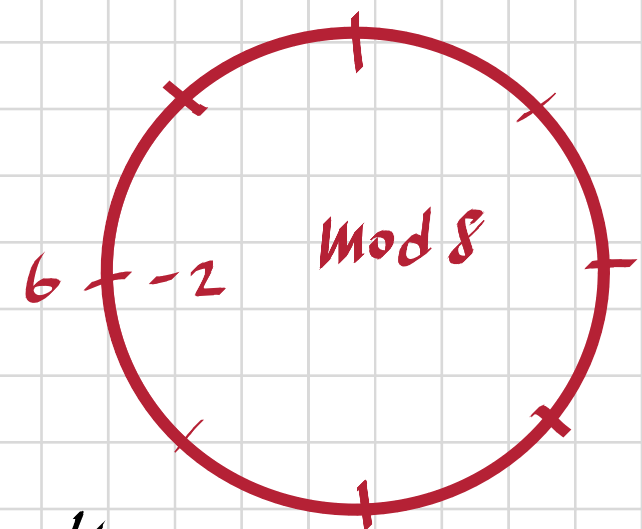
1244. $a \mid b \Rightarrow b = k \cdot a$

$b^2 = k^2 a^2 = m \cdot a^2 \Rightarrow a^2 \mid b^2$ #

1261 Bestäm det minsta positiva heltal x som uppfyller att

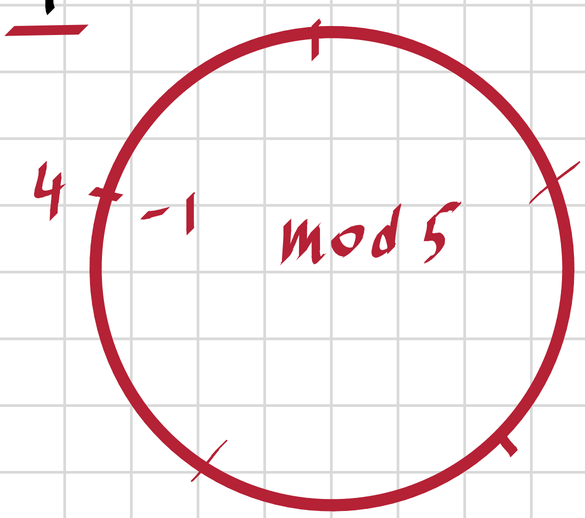
a) $x \equiv -2 \pmod 8$

b) $x \equiv -101 \pmod 5$



1261. a) $x \equiv -2 \pmod 8 = \underline{6}$

b) $x \equiv -101 \pmod 5 \equiv -1 \pmod 5 = \underline{4}$



1262 a) Ange tre tal som är kongruenta med 1 modulo 8. Minst ett av talen ska vara negativt.

b) Skriv ett uttryck för samtliga tal som är kongruenta med 1 modulo 8.

1262. a) $\underline{1 \equiv -7 \equiv 9 \equiv 17 \pmod 8}$

b) $\underline{8n + 1}$

1263 I texten på föregående uppslag påstås att om $a \equiv b \pmod{n}$, så gäller att $n \mid (a - b)$. Visa att påståendet följer av definitionen av kongruens.

1263.

$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow$

$a = k_1 \cdot n + r$, $b = k_2 \cdot n + r \Rightarrow$

$a - k_1 n = b - k_2 \cdot n \Rightarrow a - b = (k_1 - k_2) \cdot n = a - b = m \cdot n$

$\Rightarrow n \mid (a-b)$ #

1264 Konstruera en uppgift där man ska undersöka differensen av två tal modulo 7. Differensen ska vara kongruent med 0 modulo 7.

Vilket är det minsta naturliga tal x som uppfyller $79 - 16 \equiv x \pmod{7}$?

1265 Om du tittar i en almanacka, så ser du att datumen

4/4, 6/6, 8/8, 10/10 och 12/12

infaller på samma veckodag. Förklara med hjälp av kongruensräkning varför alla dessa datum infaller på samma veckodag.

j	f	m	a	m	j	j	a	s	o	n	d
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

1265.

6/6 - 4/4 motsvarar $6 + 31 + (30 - 4) = 63$ dgr

8/8 - 6/6 — " — $8 + 31 + (30 - 6) = 63$ dgr

10/10 - 8/8 — " — $10 + 30 + (31 - 8) = 63$ dgr

12/12 - 10/10 " $12 + 30 + (31 - 10) = 63$ dgr

$63 \pmod{7} = 0$

1266 Den imaginära enheten betecknas *i*. Bestäm värdet av i^n om $n \equiv 3 \pmod 4$.

1266. $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = \underline{-i}$

1267 Skriv ett uttryck för samtliga heltal *x* som är kongruenta med 1 både modulo 6 och modulo 8.

1267. $\underline{x = 24n + 1}$

ex. v. $n = 1 \Rightarrow 25 \pmod 6 \equiv 1 \pmod 6$

$25 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$

1268 Bestäm alla heltal x som uppfyller kongruensekvationerna.

a) $2x \equiv 2 \pmod 4$

b) $x^2 \equiv 1 \pmod 8$

c) $5x - 10 \equiv 30 \pmod 7$

1268.

a) $2x - 2 \pmod 4 = 0 \iff 4 \mid (2x-2) \iff$

$2x - 2 = 4n \implies \underline{x = 2n + 1}$

b) $x^2 - 1 \pmod 8 = 0$

$x^2 - 1 = 8n$

$(x = \sqrt{8n+1})$

$n = 0: \; x = 1 \leftarrow$
$n = 1: \; x = 3 \leftarrow$
$n = 2: \; x = \sqrt{17}$
$n = 3: \; x = 5 \leftarrow$
$n = 4: \; x = \sqrt{33}$
$n = 5: \; x = \sqrt{41}$
$n = 6: \; x = 7 \leftarrow$

Fungerar bara för udda tal:

$\underline{x = 2m + 1}$

c) $5x - 10 - 30 \pmod 7 = 0 \iff 7 \mid (5x - 40)$

$5x - 40 = 7n$

$x = \frac{7}{5}n + 8$

$m = 5n - 5 \implies \underline{x = 7m + 1}$

1269 Visa att om $a \equiv b \pmod{n}$ och $c \equiv d \pmod{n}$, så gäller att $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

1269. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a = k_1 n + r,\ b = k_2 n + r$

$c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow c = k_3 n + r,\ d = k_4 n + r$

$a + c = k_1 n + k_3 n + 2r = m_1 n + q$

$b + d = k_2 n + k_4 n + 2r = m_2 n + q$

$a+c$ och $b+d$ har samma rest $\Rightarrow$

$a + c \equiv b + d \pmod{n}$ #

1277 Att visa att talet 26 039 är delbart med 13 kan man göra genom att undersöka summan 26 000 + 39 räknat i modulo 13

a) Visa med hjälp av moduloräkning att 26 039 är delbart med 13.

b) Visa på samma sätt att 1 734 är delbart med 17.

1277.

a) $26039 \pmod{13} = 26000 \pmod{13} + 39 \pmod{13} = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow 13 \mid 26039$ #

b) $1734 \pmod{17} = 1700 \pmod{17} + 34 \pmod{17} = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow 17 \mid 1734$ #

1278 Bestäm slutsiffran när man beräknar följande potenser.

a) 9^{203} b) 7^{104}

1278. Slutsiffran är resten vid division med 10.

a) $9^{203} \pmod{10} = (-1)^{203} \pmod{10} =$

$= -1 \pmod{10} = 9 \pmod{10} = 9 \Rightarrow$

9^{203} har slutsiffran 9.

b) $7^{104} \pmod{10} = (-3)^{104} \pmod{10} = 9^{52} \pmod{10}$

$= (-1)^{52} \bmod 10 = 1 \pmod{10} = 1 \Rightarrow$

7^{104} har slutsiffran 1

1279 Bestäm två heltal u som uppfyller att $10^{27} - 1\,800 \equiv 1 - u \pmod 9$.

1279. $a - c \equiv b - d \Rightarrow a \| b$ och $c \| d \Rightarrow$

$u \equiv 1800 \pmod 9 = \underline{0 \text{ eller } 9}$

1280 Visa att att talet 7^{4n} alltid har slutsiffran 1 för heltal $n \geq 1$.

1280. $7^{4n} \pmod{10} = (-3)^{4n} \pmod{10} =$

$= 81^{n} \pmod{10} = 1^{n} = 1 \quad \#$

1281 Visa att ett fyrsiffrigt tal alltid är delbart med 9, om talets siffersumma är delbar med 9. *Ledning*: Hur kan det fyrsiffriga talet *ABCD* skrivas i utvecklad form?

1281. $ABCD = A \cdot 10^{3} + B \cdot 10^{2} + C \cdot 10^{1} + D$

$9 \mid A+B+C+D \Rightarrow A+B+C+D = 9k \Rightarrow$

$D = 9k - A - B - C \Rightarrow$

$ABCD = A \cdot 10^{3} + B \cdot 10^{2} + C \cdot 10^{1} + 9k - A - B - C =$

$= A \cdot (10^{3} - 1) + B \cdot (10^{2} - 1) + C \cdot (10 - 1) + 9k =$

$= 999A + 99B + 9C + 9k =$

$= 9 \cdot (111A + 11B + C + k) = 9m \quad \#$

1282 Det är allmänt känt att om ett tals siffersumma är delbar med 3, så är talet delbart med 3. Nu ska du få bevisa det i följande två steg.

a) Låt *ABCDE* beteckna ett godtyckligt femsiffrigt tal, där *A*, *B*, *C*, *D* och *E* är talets siffror. Visa att om siffersumman i *ABCDE* är delbar med 3, så är *ABCDE* delbart med 3.

b) Visa att om ett godtyckligt tals siffersumma är delbar med 3, så är talet delbart med 3.

1282.

a) $ABCDE = A\cdot 10^4 + B\cdot 10^3 + C\cdot 10^2 + D\cdot 10 + E$

$3 \mid A+B+C+D+E \Rightarrow A+B+C+D+E = 3k \Rightarrow$

$E = 3k - A - B - C - D$

$ABCDE = A\cdot 10^4 + B\cdot 10^3 + C\cdot 10^2 + D\cdot 10 + 3k - A - B - C - D =$

$= 9999A + 999B + 99C + 9D + 3k =$

$= 3(3333A + 333B + 33C + 3D + k) = 3m$ #

b) Godtyckligt tal : $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$

$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_0$

$3 \mid a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 \Rightarrow a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 = 3k$

$a_0 = 3k - a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - \ldots - a_0$

$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0 = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + a_{n-2}(10^{n-2} - 1) + \ldots + 3k$

$3 \mid 10^{n-p} - 1,\ p < n \Rightarrow a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0 = 3m$ #

1283 Visa att $11^{2n} + 5^{2n+1} - 6$ är delbart med 24.

(Provbanksprov Ma5 vt 2016)

1283. $24 \mid 11^{2n} + 5^{2n+1} - 6 \iff 11^{2n} + 5^{2n+1} - 6 \pmod{24} = 0$

$11^{2n} + 5^{2n+1} - 6 \pmod{24} = 121^{n} + 25^{n} \cdot 5 - 6 \pmod{24} =$

$= 1^{n} + 1^{n} \cdot 5 - 6 \pmod{24} = 1 + 5 - 6 = 0$ #

1284 Bevisa att om $a \equiv b \pmod{n}$, så gäller att $a^p \equiv b^p \pmod{n}$, där p är ett positivt heltal.

1284. $a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a, \; n \mid b \iff$

$a = k_1 \cdot n, \quad b = k_2 \cdot n$

$$\left.\begin{array}{l} a^p = k_1^p \cdot n^{p-1} \cdot n \Rightarrow n \mid a^p \\ b^p = k_1^p \cdot n^{p-1} \cdot n \Rightarrow n \mid b^p \end{array}\right\} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{n}$$

#

1310 En talföljd ges av $a_0 = 0$ och $a_n = a_{n-1} + 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Beräkna $\sum_{n=2}^{5} a_n$

1310.

$$\sum_{n=2}^{5} a_n = \sum_{n=2}^{5} a_{n-1} + 1 = 2 + 3 + 4 + 5 = \underline{14}$$

1311 Teckna summan med hjälp av summatecknet Σ.

a) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

b) $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192$

1311.

a) $\underline{\sum_{n=1}^{6} 2^n}$ b) $\underline{\sum_{n=0}^{6} 3 \cdot 2^n}$

1312 Ange en rekursiv formel för en talföljd där

a) kvoten mellan två på varandra följande element är 1/3 och det första elementet är större än 7

b) nästföljande element är differensen av de två föregående elementen och de första två elementen är större än 10

1312 a) $a_1 = 27$

$\underline{a_n = a_{n-1}/3}$ $\Rightarrow \{27, 9, 3, 1, \ldots\}$

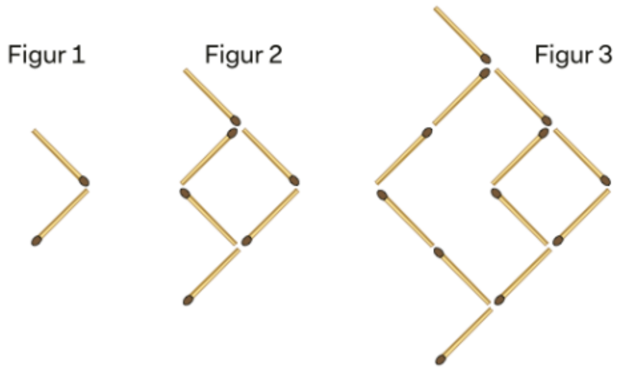
b) $a_1 = 40$

$a_2 = 30$

$\underline{a_n = a_{n-2} - a_{n-1}}$ $\Rightarrow \{40, 30, 10, 20, -10, \ldots\}$

1313 Hur många stickor finns det i den

a) 4:e figuren b) n:te figuren



n	$n(n+1)$
1	2
2	6
3	12
4	20

1313. a) 20 st b) $n(n+1)$ st

1314 Beskriv talföljden med en rekursiv formel

4, 5, 8, 12, 19, 30, 48, ...

1314. $a_1 = 4$

$a_2 = 5$

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} - 1$

1315 Skriv summan $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$ med hjälp av summatecknet Σ.

1315. $\sum_{n=1}^{6} (-1)^{n-1} \cdot 2^n$

Geogebra: Sum$((-1)^{n-1} \cdot 2^n, n, 1, 6)$

1316 De inledande elementen Fibonaccis talföljd är 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Från och med det tredje elementet beräknas elementen med den rekursiva formeln $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, där $n \geq 2$.

a) Hur många av de första 17 Fibonaccitalen är primtal?

b) Det gyllene snittet, som oftast betecknas med ϕ, är ett vanligt återkommande förhållande i naturen. Det återfinns t.ex. i växtmönstret hos solrosen eller hos rosens blomblad. Gyllene snittets värde är $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Man kan visa att kvoten mellan två på varandra följande tal i Fibonaccis talföljd går mot ett värde K då $n \to \infty$. Visa att K har samma värde som det gyllene snittet.

1316.

a) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597\}$

Antal primtal = 7

b) $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{K}\right)$$

Då $n \to \infty$ gäller $\phi = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\phi}$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

#

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right)$

l1 = Sequence(f(n), n, 3, 17)

= {2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597}

l2 = Insert({1, 1}, l1, 1)

= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597}

l3 = Sequence(If(IsPrime(Element(l2, n)), 1, 0), n, 1, Length(l2))

= {0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1}

AntalPrimtal = Sum(l3)

= 7

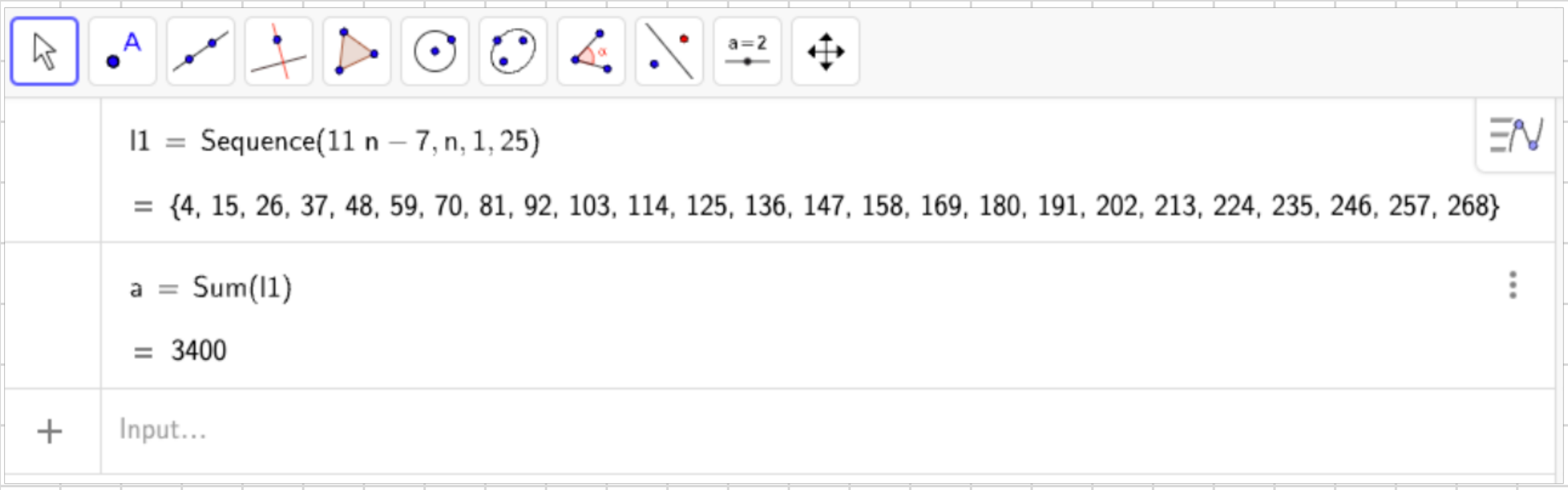
l4 = Sequence$\left(\frac{\text{Element}(l2, n+1)}{\text{Element}(l2, n)}, n, 1, \text{Length}(l2) - 1\right)$

= {1, 2, 1.5, 1.6667, 1.6, 1.625, 1.6154, 1.619, 1.6176, 1.6182, 1.618, 1.6181, 1.618, 1.618, 1.618, 1.618}

1326 Bestäm summan av de 25 första elementen i talföljden som beskrivs av
$b_1 = 4$; $b_n = 11 + b_{n-1}$ för $n > 1$.

1326. Aritmetisk summa: $a_n = 11n - 7$

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{4 + 11 \cdot 25 - 7}{2} = \underline{3400}$$

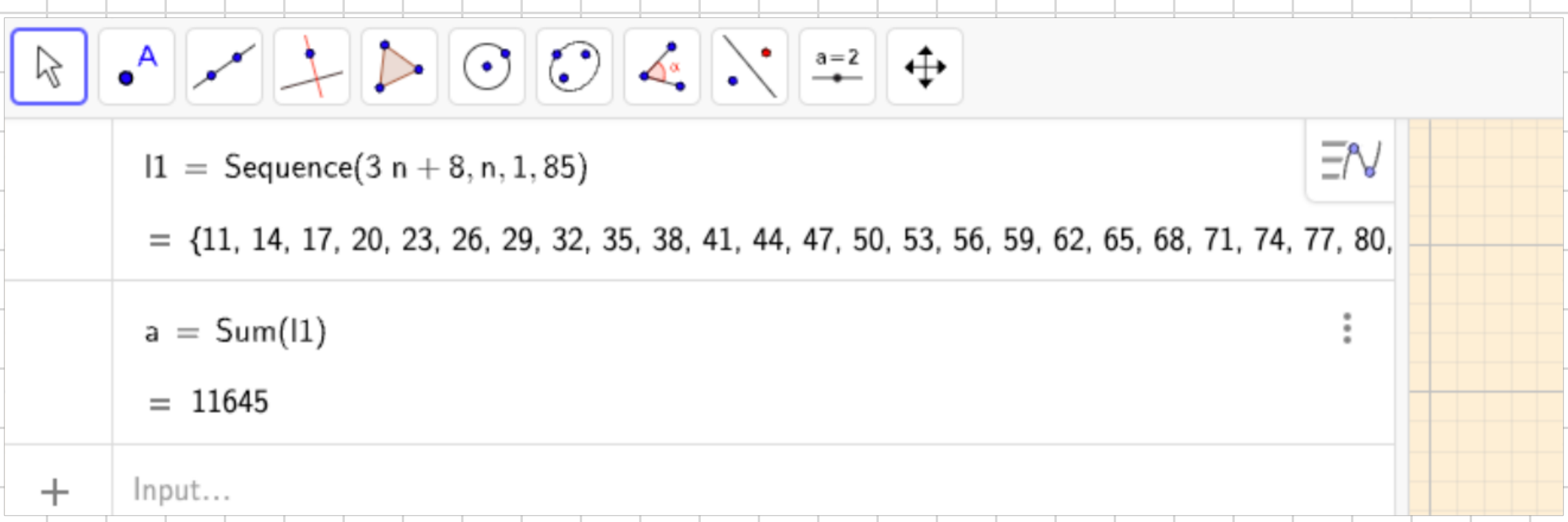


1327 a) Teckna summan $s = 11 + 14 + 17 + \ldots + 263$ med hjälp av summatecknet Σ.
b) Beräkna summan.

$$3n + 8 = 263 \Rightarrow n = \frac{263 - 8}{3} = 85$$

1327. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{85} (3n + 8)$

b) $$S_{85} = 85 \cdot \frac{11 + 3 \cdot 85 + 8}{2} = \underline{11645}$$



1328 En aritmetisk talföljd innehåller elementen 9, 7, 5, 3, ...

a) Bestäm en sluten formel för summan av de *n* första elementen i talföljden.

b) Beskriv summan av de första 99 elementen med hjälp av summatecknet Σ.

c) Bestäm summan av de 23 första elementen i talföljden.

1328. a) $\underline{a_n = 11 - 2n}$

b) $\underline{\sum_{n=1}^{99}(11-2n)}$

c) $S_{23} = 23 \cdot \dfrac{9 + 11 - 2 \cdot 23}{2} = \underline{-299}$

1329 Figurerna visar ett mönster som bildas av prickar.

Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Hur många prickar behöver man för att bilda figur 4 respektive figur 5?

b) Ange en sluten formel som beskriver antalet prickar i figur *n*.

c) Hur många prickar innehåller figur 1 till och med 100 sammanlagt?

n	$4n-1$
1	3
2	7
3	11
4	15

1329. a) $\underline{15 \text{ st}}$

b) $\underline{a_n = 4n - 1}$

c) $S_{100} = 100 \cdot \dfrac{3 + 4 \cdot 100 - 1}{2} = \underline{20100}$

1330 a) Konstruera en uppgift till dina kamrater där de ska beräkna summan av en aritmetisk talföljd. Talen som ingår i talföljden ska vara kongruenta modulo 7. Summan som de ska beräkna ska vara mellan 500 och 508.

b) Konstruera en till uppgift till dina kamrater där de ska beräkna summan av en aritmetisk talföljd, och där talen som ingår i talföljden är kongruenta modulo 7. Talföljden får inte vara identisk med talföljden i deluppgift a). Summan som de ska beräkna ska vara mellan 500 och 508.

1330.

Ansats: $a_n = 49n + 3$

$\frac{n}{2}(49n + 55) = x$, $500 < x < 508$

$n = 4 \Rightarrow x = 502$ ok!

Ansats: $a_n = 49n + 4$

$\frac{n}{2}(49n + 57) = x$, $500 < x < 508$

$n = 4 \Rightarrow x = 506$ ok!

a) Beräkna summan av talföljden

$\{52, 101, 150, 199\}$

b) Beräkna summan av talföljden

$\{53, 102, 151, 200\}$

1331 Beräkna summan
$1 - 3 + 6 - 5 + 11 - 7 + 16 + \ldots - 399 + 996.$

$$1-2n=-399 \Rightarrow n=\frac{1+399}{2}=200$$

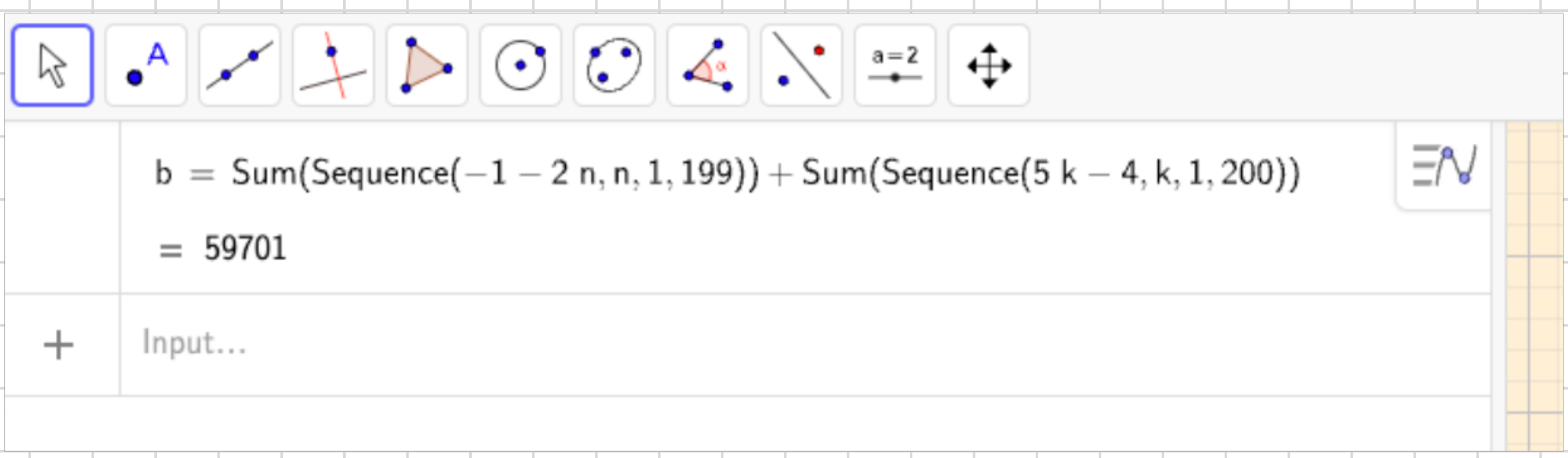
$$5k-4=996 \Rightarrow k=\frac{996+4}{5}=200$$

1331.

$$\sum_{n=2}^{200}(1-2n)+\sum_{k=1}^{200}(5k-4)=$$

$$\sum_{n=1}^{199}(-1-2n)+\sum_{k=1}^{200}(5k-4)$$

$$S=199\cdot\frac{-3-1-2\cdot 199}{2}+200\cdot\frac{1+5\cdot 200-4}{2}=\underline{59701}$$



1332 Visa att en aritmetisk summa med ett oändligt antal termer $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ alltid saknar egentligt gränsvärde om $a_1 \neq 0$. Det innebär här att du ska visa att summan antingen går mot ∞ eller mot $-\infty$.

1332.

$$a_m = q\cdot m + r$$

$$S_\infty=\lim_{m\to\infty} m\cdot\frac{q+r+q\cdot m+r}{2}=\lim_{m\to\infty} m\,\frac{q(m+1)+2r}{2}$$

$$q<0 \Rightarrow S_\infty=-\infty$$

$$q>0 \Rightarrow S_\infty=\infty$$

1341 Bestäm $\sum_{k=1}^{20} a_k$ där

$$\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 1{,}04 \text{ för } n \geq 2 \end{cases}$$

1341. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 17 \cdot \frac{1{,}04^{20} - 1}{1{,}04 - 1} \approx \underline{506}$

1342 Talen $x - 4$, x och $x + 12$ är tre på varandra följande element i en geometrisk talföljd. Bestäm vilka talen är.

1342. $\frac{x}{x-4} = \frac{x+12}{x}$

$x^2 = (x-4)(x+12)$

$x^2 = x^2 + 8x - 48$

$x = \frac{48}{8} = 6 \Rightarrow$

Talen är 2, 6 och 18

1343 I en geometrisk talföljd är summan av det första elementet och det tredje elementet 25. Summan av det andra och det fjärde elementen är 50. Bestäm en formel för talföljden.

1343. $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

$a_1 + a_3 = 25 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot k^2 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{1+k^2}$

$a_2 + a_4 = 50 \Rightarrow a_1 \cdot k + a_1 k^3 = 50 \Rightarrow$

$$\frac{25k}{1+k^2} + \frac{25k^3}{1+k^2} = 50$$

$$25k + 25k^3 = 50 + 50k^2$$

$$k^3 - 2k^2 + k - 2 = 0$$

Geogebra: Solve$(x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0) \Rightarrow x = k = 2$

$$a_1 = \frac{25}{1+2^2} = 5$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

1344 Formeln för en geometrisk summa med n termer kan skrivas

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$$

Bevisa att formeln gäller genom att följa stegen här nedanför

- Teckna summan
  $s_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-1}$
- Teckna summan ks_n
- Ställ upp ett uttryck för $ks_n - s_n$
- Förenkla uttrycket
- Lös ut s_n

1344.

$$s_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-1}$$

$$ks_n = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + \ldots + a_1k^n$$

$$ks_n - s_n = a_1k^n - a_1$$

$$s_n(k-1) = a_1(k^n - 1)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

1345 Bestäm de heltal n för vilka

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^m < 2^{100}$$

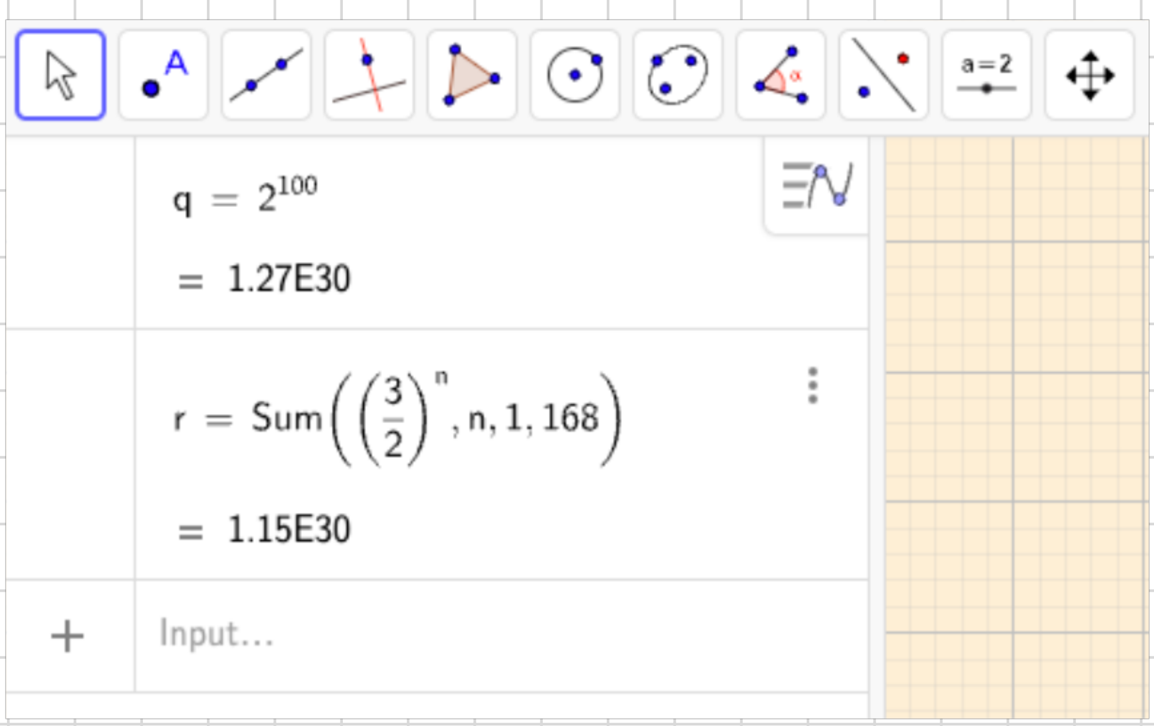
1345. $$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^m < 2^{100} \quad , \quad n \geq 1$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} < 2^{100}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 < 2^{99}$$

$$n < \frac{\ln(2^{99}+1)}{\ln \frac{3}{2}} \approx 169$$

$$\underline{1 \leq n < 169}$$

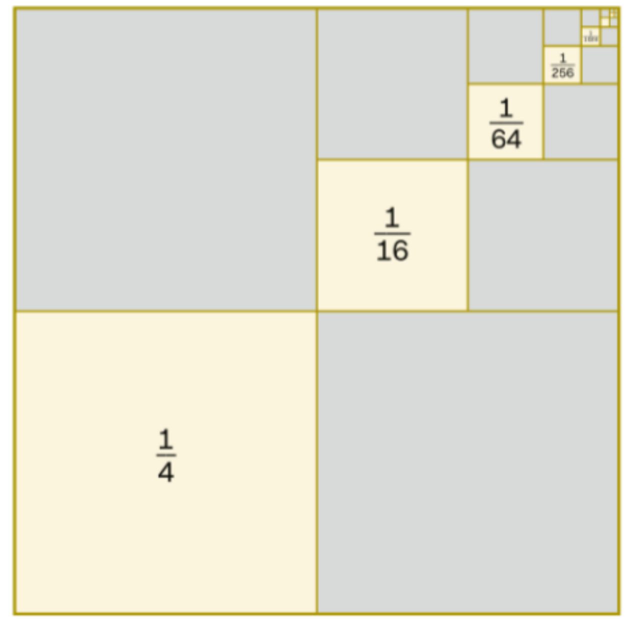


1346 Den geometriska summan här nedanför har oändligt många termer.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$

a) Visa med hjälp av formeln för geometrisk summa att summan går mot $\frac{1}{3}$ när antalet termer går mot oändligheten.

b) Förklara hur man kan motivera att $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}$ med hjälp av figuren här nedanför.

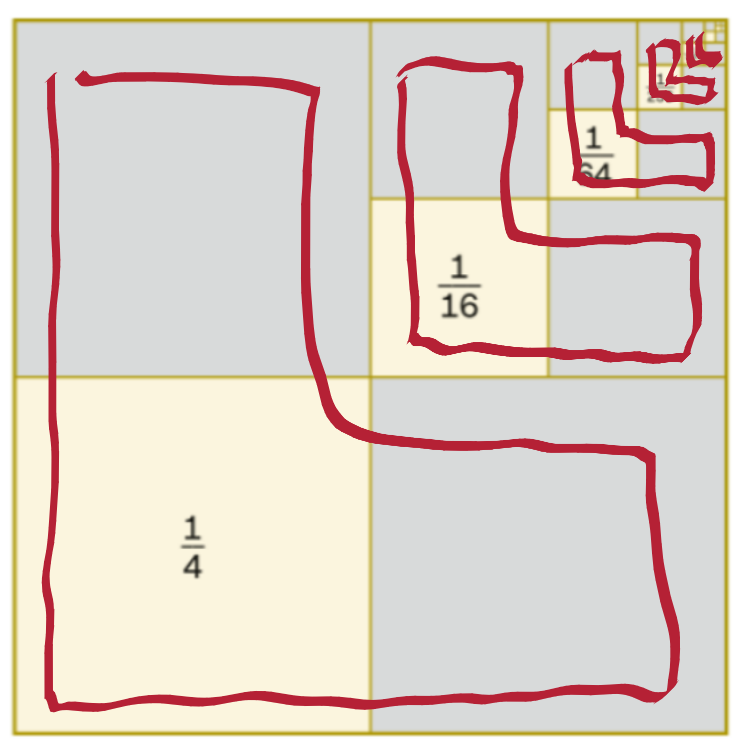


1346. $a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

a) $S_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$n \to \infty \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0 \Rightarrow S_n \to \frac{1}{3}$

b) För varje L-format fält utgör den gula arean en tredjedel. När antalet L-formade fält går mot ∞ kommer andelen gula areor gå mot $\frac{1}{3}$.



1347 I en geometrisk talföljd med ett oändligt antal element gäller under vissa omständigheter att elementen $a_n = a_1 k^{n-1}$ närmar sig ett visst värde. Man säger att elementen går mot ett gränsvärde. Det innebär att $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 k^{n-1} = A$, där A är gränsvärdet.

a) Vilket villkor måste gälla för att gränsvärdet A ska existera, dvs. att $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 k^{n-1} = A$?

b) Det finns bara två värden som A kan anta om gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 k^{n-1} = A$ existerar. Vilka är dessa två värden?

1347.

a) $\underline{-1 < k \leq 1 \quad , \quad k \neq 0}$

b) $|k| < 1 \Rightarrow a_n \to 0,\ n \to \infty \Rightarrow \underline{A = 0}$

$k = 1 \Rightarrow a_n = a_1$ oberoende av $n \Rightarrow \underline{A = a_1}$

1348 För en viss geometrisk summa med ett oändligt antal termer gäller att $|k| < 1$, där k är kvoten mellan två på varandra följande element i motsvarande talföljd.

a) Visa att summan kan beräknas med formeln $s = \dfrac{a_1}{1-k}$.

b) Varför måste villkoret $|k| < 1$ vara uppfyllt?

1348. a) $s = a_1 \cdot \dfrac{k^n - 1}{k - 1}$

$k^n \to 0,\ n \to \infty \qquad s = a_1 \cdot \dfrac{0-1}{k-1} = \dfrac{a_1}{1-k}$ #

b) om $|k| = 1 \Rightarrow s = a_1$

om $|k| > 1 \Rightarrow s$ divergerar då $n \to \infty$

1349 Lös ekvationen

$5 + 5x + 5x^2 + 5x^3 + 5x^4 + \ldots = 20.$

1349.

$$5 \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = 20$$

$$x^n - 1 = 4x - 4$$

$$x^n - 4x + 3 = 0$$

$$|x| < 1 \Rightarrow x^n \to 0, \; n \to \infty \Rightarrow$$

$$4x = 3$$

$$\underline{x = \frac{3}{4}}$$