4110 Ange alla delmängder med tre element till mängden {2, 5, grön, ¤}.

4110. (2, 5, grön)

(2, 5, ¤)

(2, grön, ¤)

(5, grön, ¤)

4111 Beskriv följande mängder med hjälp av mängdsymboler.

a) A är mängden av alla jämna tal mellan 11 och 27.

b) B är mängden av alla heltalskvadrater mellan 3 och 82.

c) C är mängden av alla katter som bor på din gata och har körkort för lastbil.

4111. a) $A = \{k : k \text{ jämnt tal}, 11 < k < 27\}$

b) $B = \{k : k \text{ heltal}, 3 < k^2 < 82\}$

c) $C = \emptyset$ (den tomma mängden}

4112 Om $A = B$, gäller då att $A \subseteq B$? Motivera ditt svar.

Ja, om $x \in A \Rightarrow x \in B$ för alla element x.

4113 Ange samtliga element i mängderna.

a) $\{a: a \equiv 4 \pmod 8$ och $0 \le a \le 60\}$

b) $\{b: \text{SGD}(b, 6) = 1$ och $0 \le b \le 30\}$

c) $\{3c: c \mid 56\}$

4113.

a) $\{4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60\}$

Alla tal mellan 0 och 60 som ger resten 4 vid division med 8.

b) $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29\}$

Alla tal mellan 0 och 30 vars största gemensamma delare med 6 är 1.

c) $\{1 \cdot 3, 2 \cdot 3, 4 \cdot 3, 8 \cdot 3, 14 \cdot 3, 28 \cdot 3, 56 \cdot 3\} =$

$= \{3, 6, 12, 24, 42, 84, 168\}$

Alla heltal som 56 är delbart med multiplicerat med 3.

4114 Låt $A = \{\text{basker, hatt, keps, mössa}\}$. För vilken eller vilka mängder B gäller $B \subseteq A$, men inte $B \subset A$?

4114. $B = \{\text{basker, hatt, keps, mössa}\}$

Om delmängden innehåller alla element är det inte en äkta delmängd.

4115 Vilken slutsats kan man dra om mängderna A och B om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$?

4115. Att $A = B$

4116 Vilken skillnad är det mellan betydelsen av $1 \in \mathbf{N}$ och $\{1\} \subseteq \mathbf{N}$?

4116 $1 \in N$ – talet 1 är ett naturligt tal

$\{1\} \subseteq N$ – elementet 1 är en delmängd i mängden av naturliga tal.

4117 Beskriv mängden $E = \left\{\ldots, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \ldots\right\}$ med hjälp av mängdnotation, på liknande sätt som du kan se i uppgift 4104.

4117. $E = \left\{ \frac{2\pi}{3} \cdot a,\ a \in \mathbb{Z} \right\}$

4118 Låt $U = \{n: n \in \mathbf{R} \text{ och } 0 \le n < 10\}$. Är följande mängder delmängder av U?

a) $A = \{n: n \in \mathbf{R} \text{ och } |n| < 5\}$

b) $B = \{n: n \in \mathbf{Q} \text{ och } 0 \le n < 10\}$

c) $C = \{\sqrt{n}: n \in \mathbf{R} \text{ och } 0 \le n < 100\}$.

d) $D = \{0\}$

4118. a) Nej b) Ja

c) Ja d) Ja

4119 Varför gäller $\varnothing \subseteq A$ för alla mängder A, dvs. att tomma mängden är delmängd av alla mängder?

4119. Ingen del av ϕ ligger utanför A.

4120 Räkna upp samtliga element som ingår i mängden som beskrivs

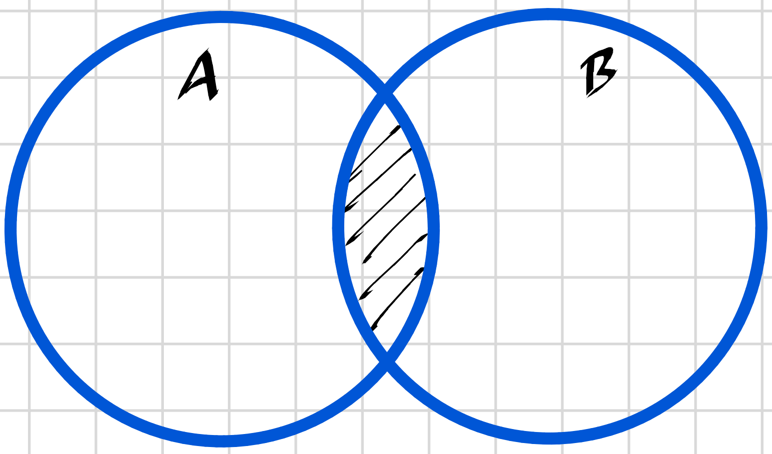
$\left\{\frac{p}{q}: \left|\frac{p}{q}\right| < 1, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \text{ och } q < 4\right\}$

4120. $\left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\right\}$

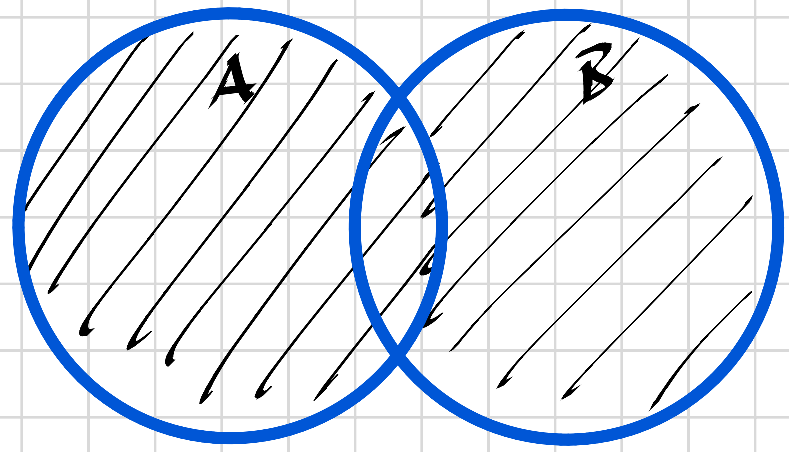
4129 Ge exempel på två mängder A och B, sådana att $A \cup B = A \cap B$.

4129.

$A \cap B$



$A \cup B$



$A \cup B = A \cup B$ kan bara gälla om $A = B$

ex. v $A = B = \{3, 8\}$ och $A = B = \{1, 2\}$

4130 Vilket eller vilka alternativ medför att $A \cup X = U$, där U är universalmängden och $A \subset U$?

A $X = A^C$

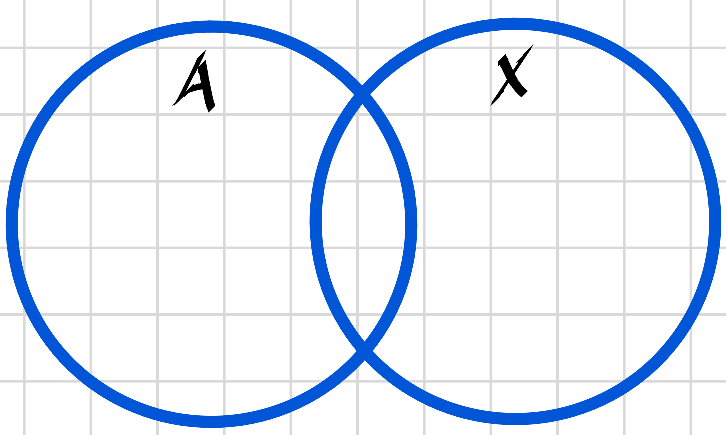
B $X = \varnothing$

C $X = U$

D $X = A \cap U$

4130.

U



A och C

4131 Låt $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ och $C = \{1, 7\}$. Bestäm

a) $(A \cup B) \cup C$

b) $(A \cap B) \cap C$

c) $(A \cup C) \cap B$

d) $(B \cap C) \cup A$

4131.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

$(A \cup B) \cup C = A \cup B = \underline{\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}}$

b) $A \cap B = \{1\}$

$(A \cap B) \cap C = A \cap B = \underline{\{1\}}$

c) $A \cup C = \{1, 2, 4, 7, 8\}$

$(A \cup C) \cap B = \underline{\{1, 7\}}$

d) $B \cap C = \{1, 7\}$

$(B \cap C) \cup A = \underline{\{1, 2, 4, 7, 8\}}$

A = {1, 2, 4, 8}

B = {1, 3, 5, 7}

C = {1, 7}

l1 = Union(Union(A, B), C)

= {1, 2, 4, 8, 3, 5, 7}

l2 = Intersection(Intersection(A, B), C)

= {1}

l3 = Intersection(Union(A, C), B)

= {1, 7}

l4 = Union(Intersection(B, C), A)

= {1, 7, 2, 4, 8}

4132 Som vi nämnde i teoritexten så är vanligtvis $A \setminus B \neq B \setminus A$.

a) Visa att påståendet $A \setminus B = B \setminus A$ i allmänhet inte är sant genom att ange ett motexempel.

b) Under vilka förutsättningar är trots allt $A \setminus B = B \setminus A$ och vad är differensen då?

4132. a) ex. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ $\Rightarrow$

$A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{2\}$

b) om $A = B$.

ex. $A = \{1, 2, 3\} = B$ $\Rightarrow$

$A \setminus B = \{1, 2, 3\} = B \setminus A$

4133 Låt $A = \{a : 4 \mid a\}$ och $B = \{b : 6 \mid b\}$. Beskriv följande mängder med ord.

a) $A \cap B$

b) $(A \cup B)^C$

4133. a) Snittet av A och B blir de element som både är delbara med 4 och med 6.

b) Alla element som varken är delbara med 4 eller med 6.

4134 Ange två oändliga mängder A och B som uppfyller villkoret $A \cap B = \varnothing$.

4134. $A = \{a : a = 2k,\ a \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{b : b = 2k+1,\ b \in \mathbb{Z}\}$

4135 Motivera att operationen snitt är *kommutativ*, dvs. att $A \cap B = B \cap A$ för alla mängder A och B.

4135. Detta blir en direkt konsekvens av att elementens inbördes ordning saknar betydelse.

4136 Arvid påstår att för alla mängder A, B och C gäller att

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Vanna säger att Arvid har fel. Hon påstår i stället att för alla mängder A, B och C gäller att

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

a) Visa med ett motexempel att Arvid har fel.

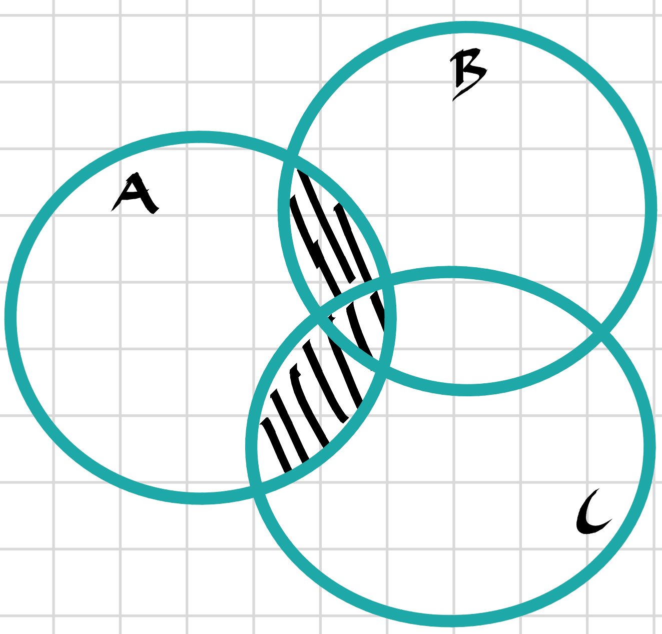
b) Motivera Vannas påstående genom att rita en figur som beskriver mängderna.

a) ex $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$

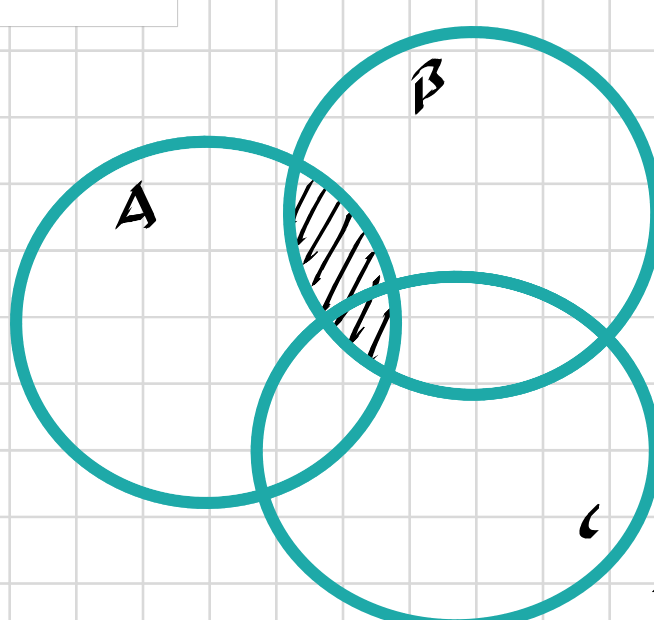
$A \cap (B \cup C) = \{1\} \cap \{2, 3\} = \varnothing$

$(A \cap B) \cup C = \varnothing \cup \{3\} = \{3\}$

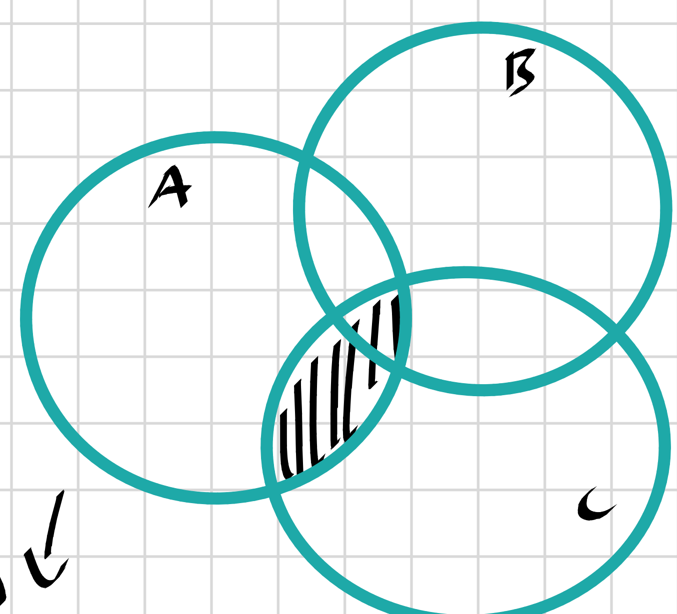
4136. b)



$A \cap (B \cup C)$

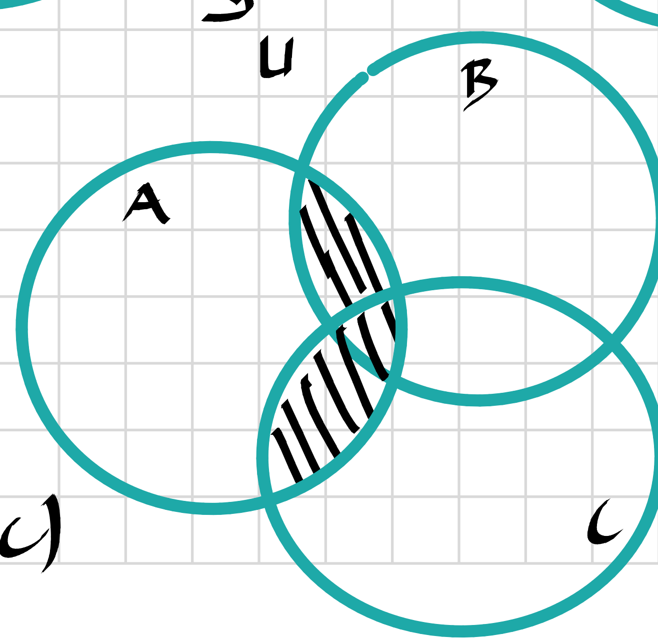


$A \cap B$



$A \cap C$

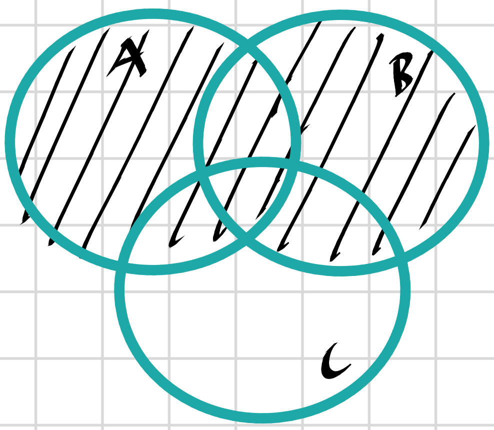
$\cup$



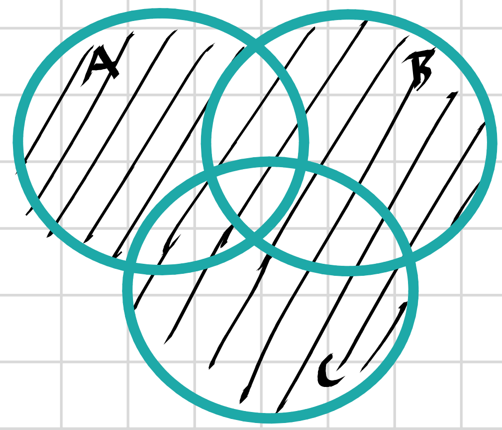
$(A \cap B) \cup (A \cup C)$

4137 Visa att operationerna union och snitt är *associativa*, dvs. att $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ respektive att $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ för alla mängder A, B och C. Att operationerna är associativa innebär att man kan utelämna parenteserna och bara skriva $A \cup B \cup C$ respektive $A \cap B \cap C$.

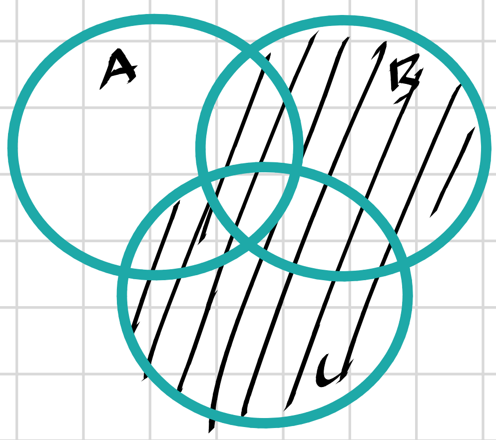
4137.



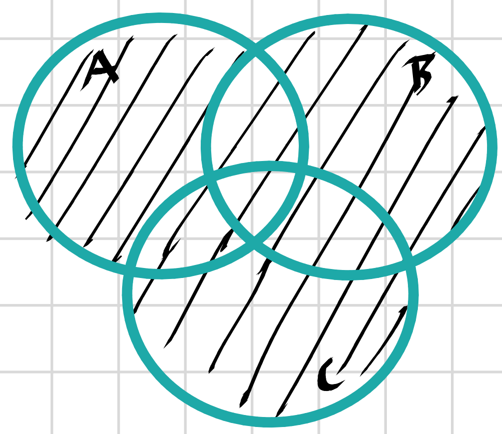
$A \cup B$



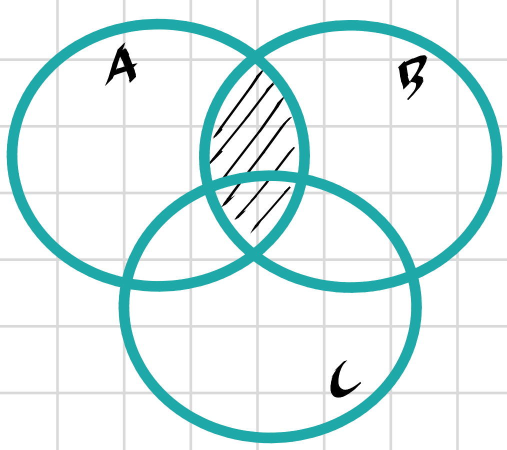
$(A \cup B) \cup C$



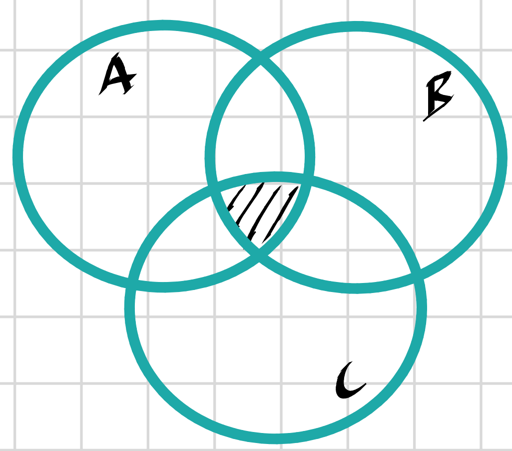
$B \cup C$



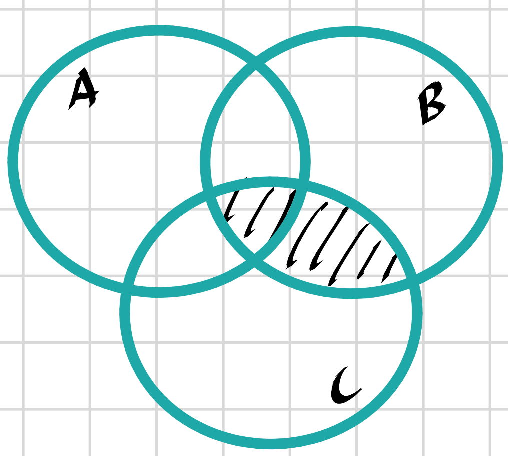
$A \cup (B \cup C)$



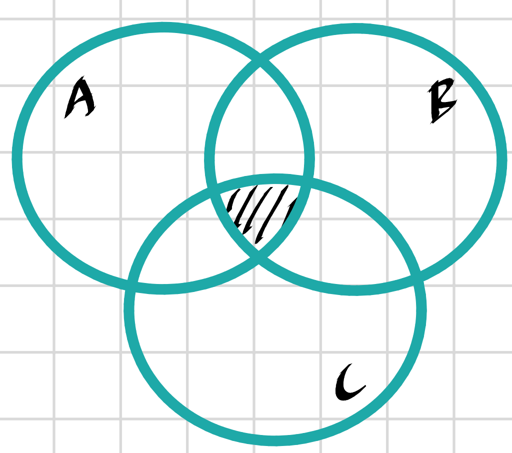
$A \cap B$



$(A \cap B) \cap C$



$B \cap C$



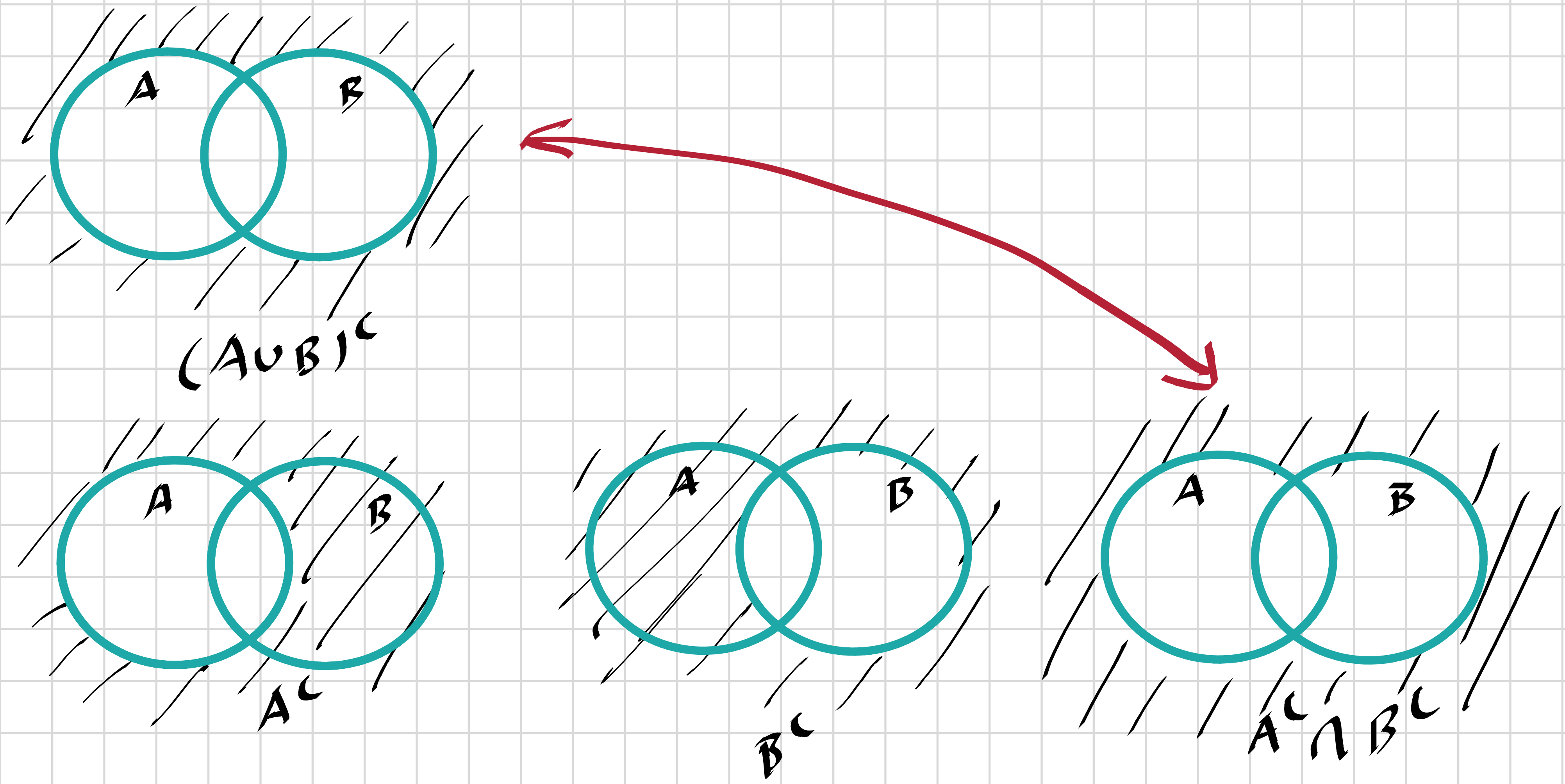
$A \cap (B \cap C)$

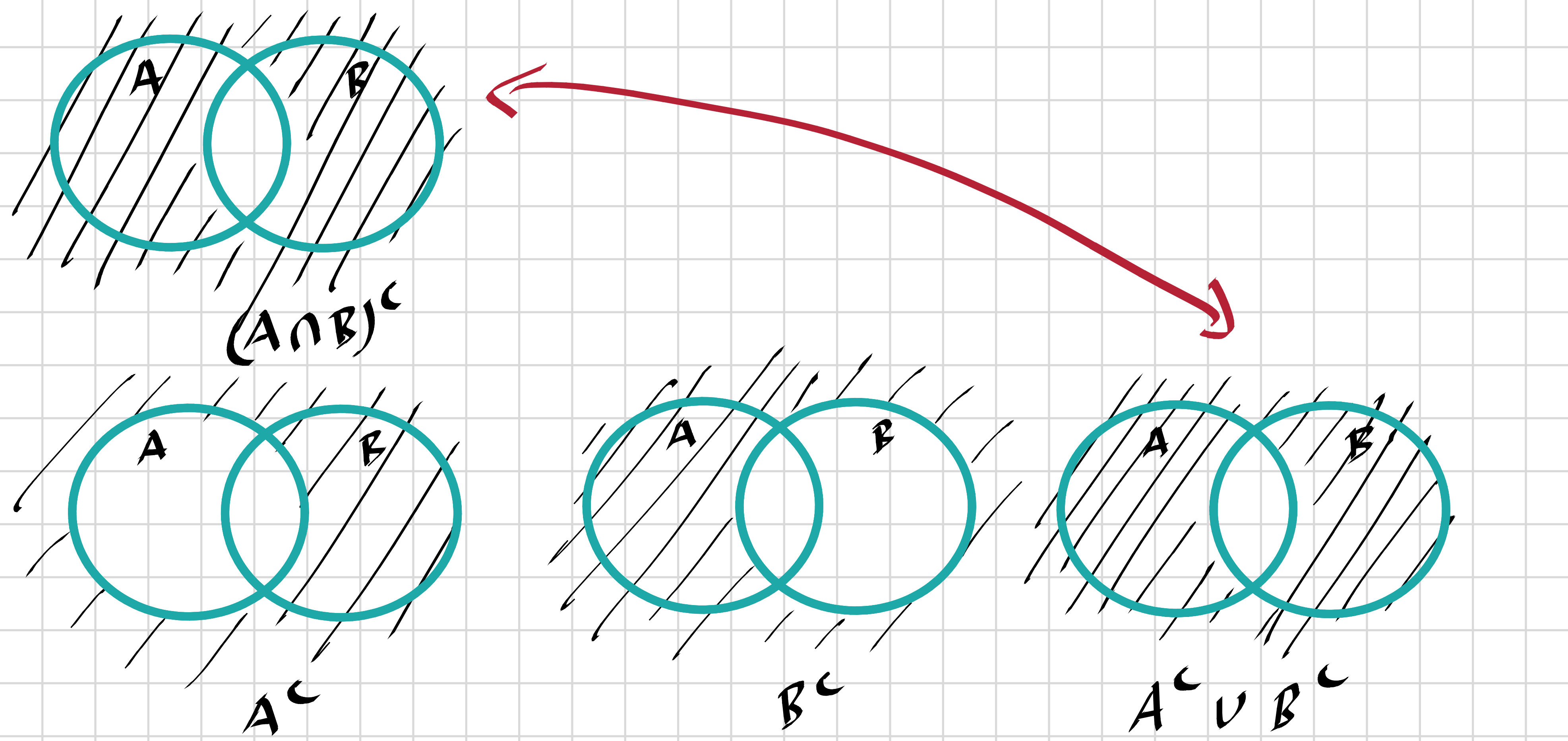
4138 I den här uppgiften ska du bevisa två regler som kallas för De Morgans lagar.

a) Visa att $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

b) Visa att $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

4138.



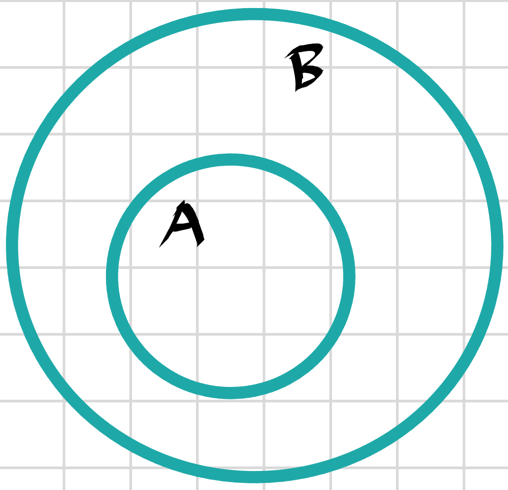


4139 Visa att $A \subseteq B$ om och endast om $A \setminus B = \varnothing$.
Det betyder att du ska visa två saker:

a) Om $A \subseteq B$ så är $A \setminus B = \varnothing$.

b) Om $A \setminus B = \varnothing$ så är $A \subseteq B$.

4139. a)

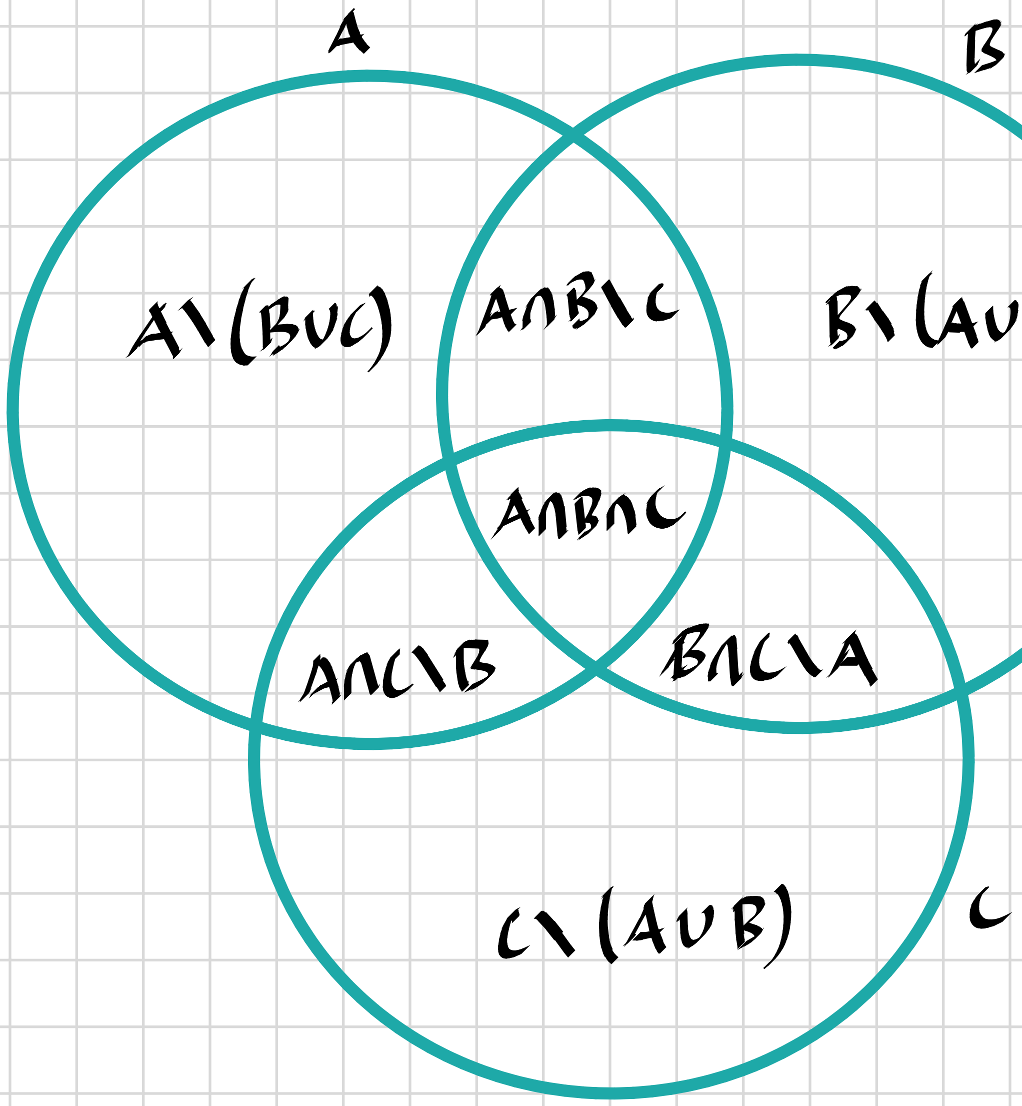


Alla element i A ingår även i B $\Rightarrow A \setminus B = \varnothing$

b) Om $A \setminus B = \varnothing$ måste alla element som ingår i B också ingå i A $\Rightarrow A \subseteq B$

4145 Rita ett Venndiagram uppbyggt av tre valfria mängder och beskriv vilka egenskaper elementen i de olika områdena har.

4145.



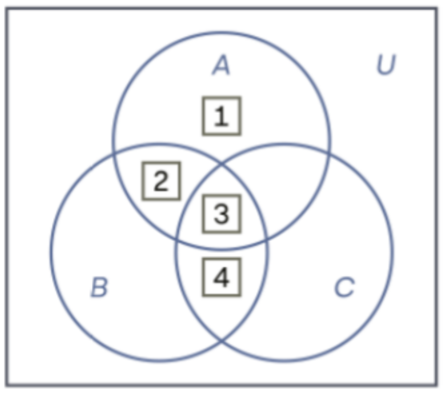
4146 Figuren beskriver mängderna

U = {Elever på Balderstorps gymnasium}

A = {Elever som tränar konståkning}

B = {Elever som rider}

C = {Elever som tränar gymnastik}



Beskriv med ord vad elementen i områdena 1, 2, 3 respektive 4 representerar.

4146. $\boxed{1}$ Elever som tränar konståkning men inte rider och tränar gymnastik.

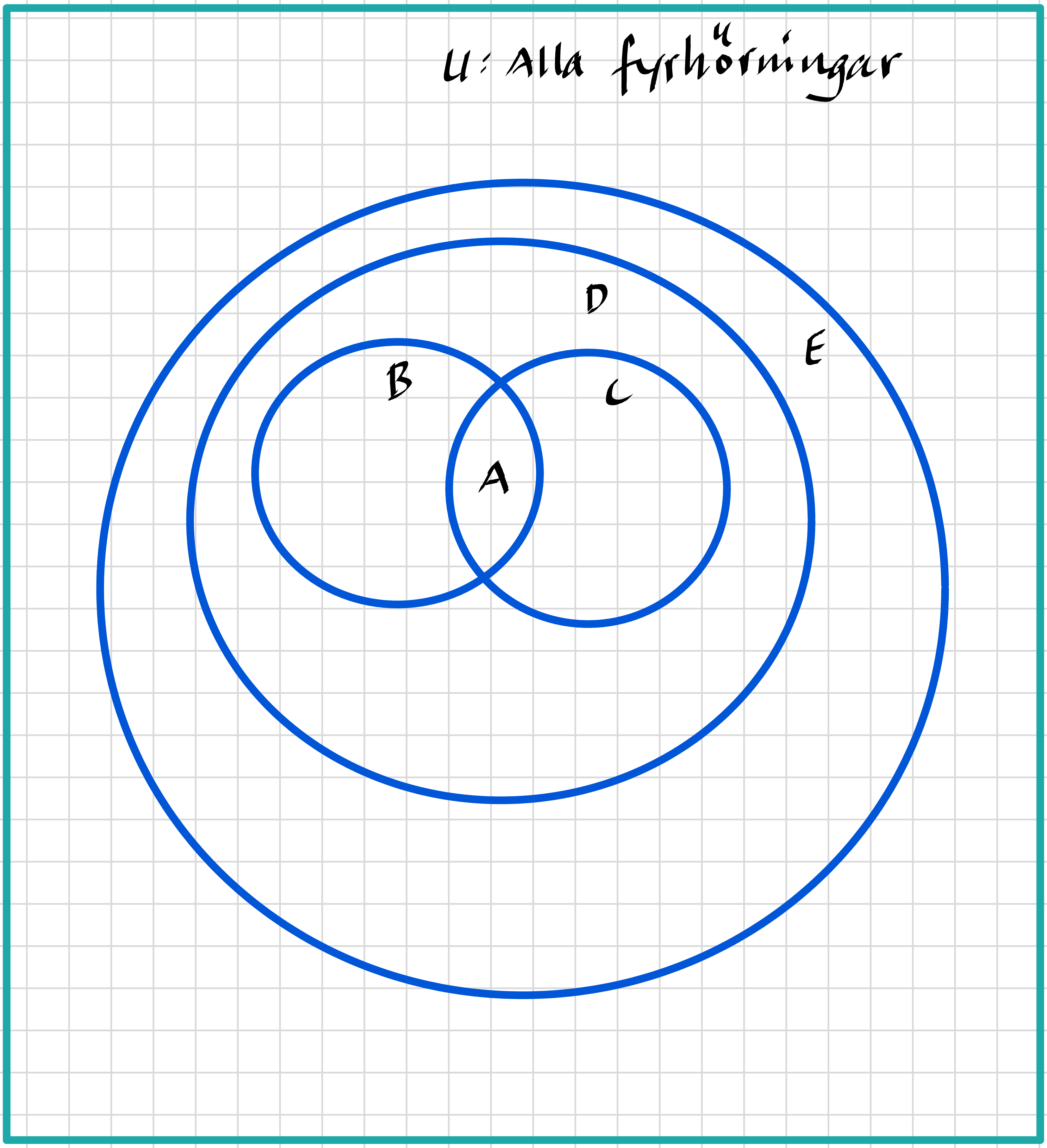
$\boxed{2}$ Elever som båbe tränar konståkning och rider men som inte tränar gymnastik.

$\boxed{3}$ Elever som tränar alla tre.

$\boxed{4}$ Elever som både rider och tränar gymnastik men som inte tränar konståkning.

4147 Låt universalmängden vara mängden av fyrhörningar. Rita ett Venndiagram med mängderna A = {alla kvadrater}, B = {alla rektanglar}, C = {alla romber}, D = {alla parallellogrammer}, E = {alla parallelltrapetser}.

4147.

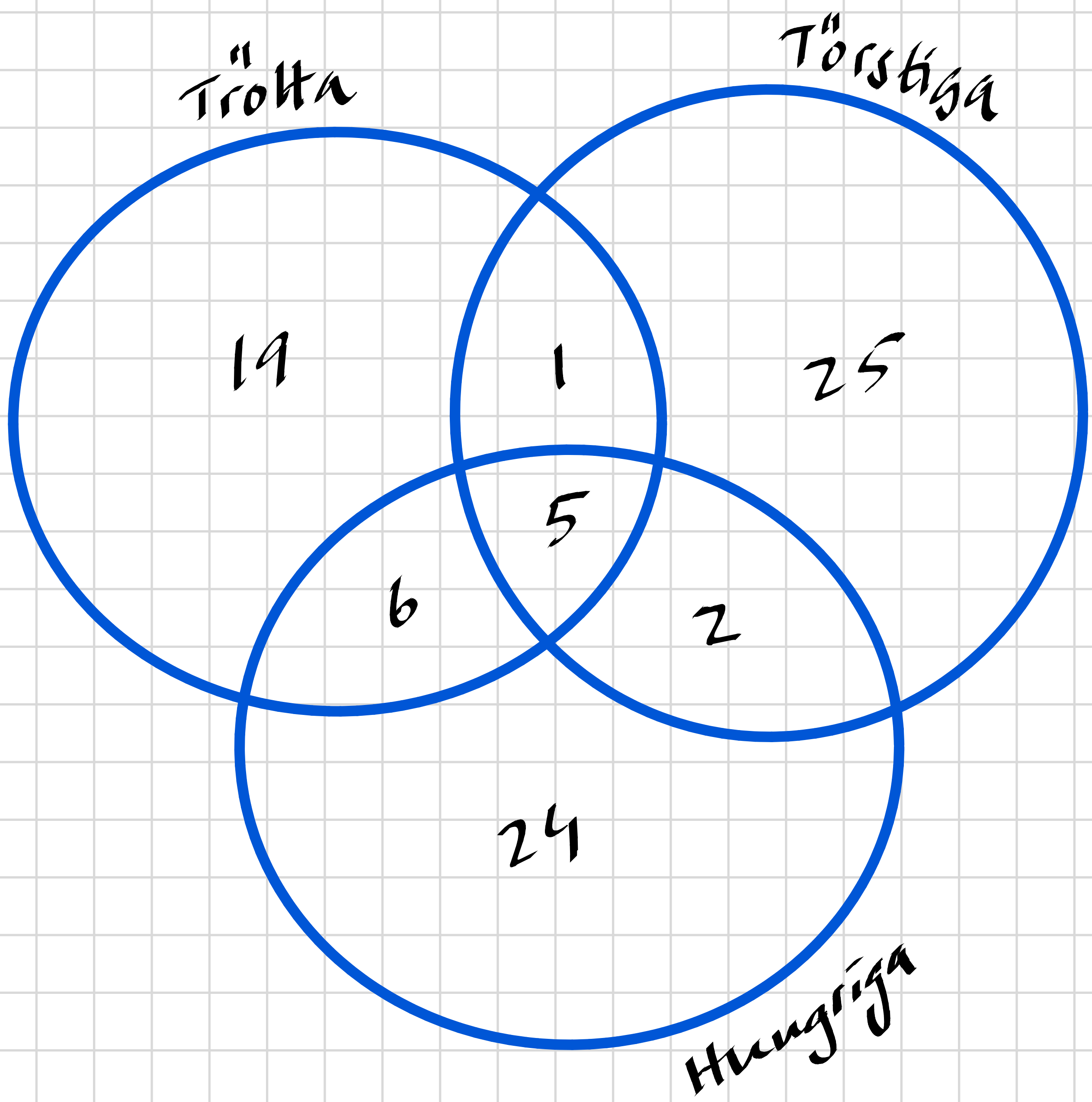


4148 Bland 86 lärare finns det trötta, törstiga och hungriga individer. I gruppen finns det 31 lärare som är trötta, 33 som är törstiga och 37 som är hungriga. Bland dessa är 11 lärare både trötta och hungriga, 7 lärare är både törstiga och hungriga samt 6 lärare är trötta och törstiga. Av dessa är 5 lärare såväl trötta som hungriga och törstiga.

a) Hur många lärare är endast hungriga?

b) Hur många lärare är endast trötta?

c) Hur många lärare är varken trötta, törstiga eller hungriga?

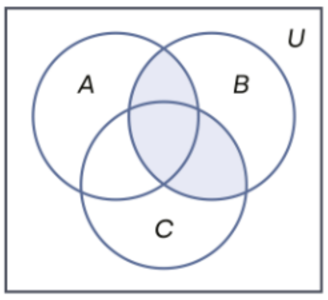


a) 24 st

b) 19 st

c) $86-19-24-25-1-5-6-2 = 4$ st

4149 Beskriv med symboler den skuggade delen av Venndiagrammet.



4149. $(A \cup C) \cap B$

4150 Låt A vara mängden av positiva tal delbara med 2, B mängden av positiva tal delbara med 3 och $C = \{5, 10, 15, \ldots\}$. Tolka

a) $A \cap B$

b) $A \cap C$

c) $B \cap C$

4150. a) Mängden av positiva tal som är delbara med 6 (dvs både med 2 och 3)

b) Mängden av positiva tal som är delbara med 10 (dvs både med 2 och 5)

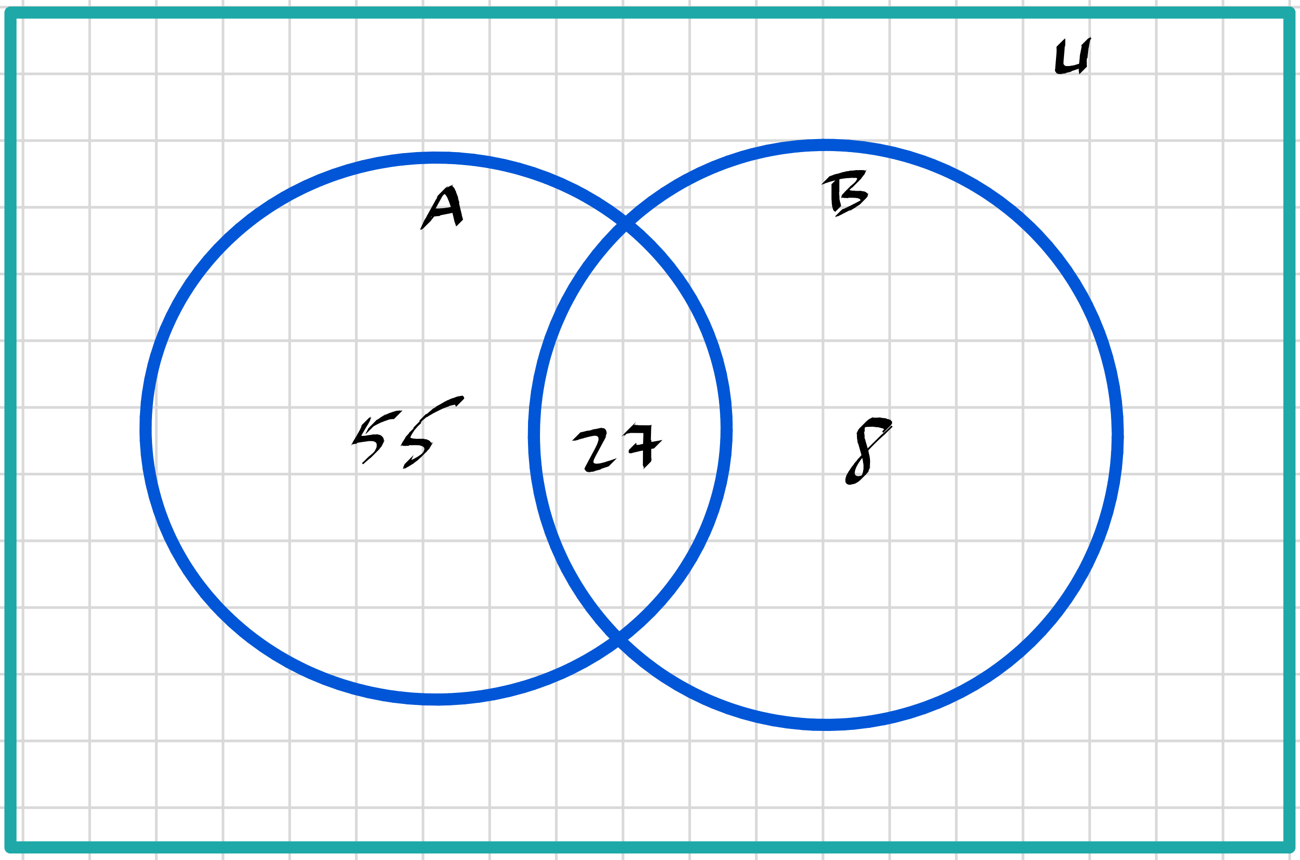
c) Mängden av positiva tal som är delbara med 15 (dvs både med 3 och 5)

4151 För mängderna A, B och universalmängden U gäller att $|A| = 82$, $|B| = 35$, $|U| = 120$ och $|A \cap B| = 27$.

a) Bestäm $|A \setminus B|$ b) Bestäm $|A \cup B|$

c) Bestäm $|(A \cup B)^C|$

4151.



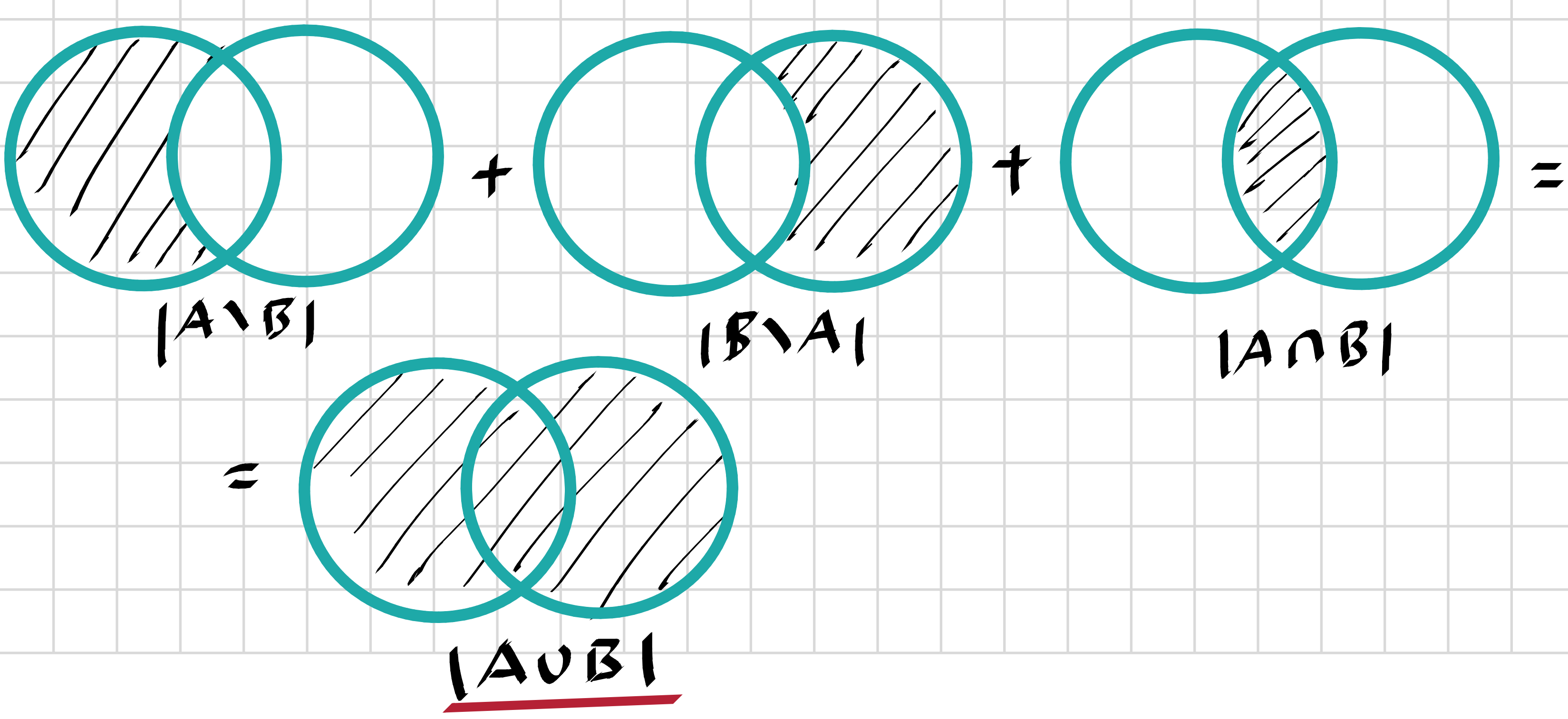
a) $|A \setminus B| = \underline{55}$

b) $|A \cup B| = 55 + 27 + 8 = \underline{90}$

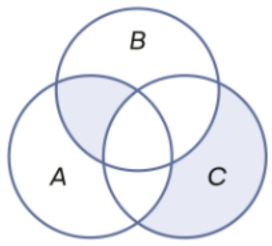
c) $|(A \cup B)^C| = |U| - |A \cup B| = 120 - 90 = \underline{30}$

4152 Vad får man reda på om man summerar $|A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$?

4152.



4153 Beskriv med symboler den skuggade delen av Venndiagrammet.

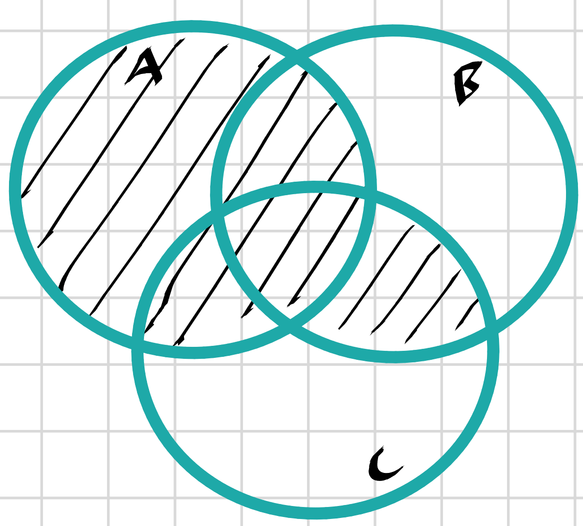


4153. $(C\setminus(A\cup B))\cup((A\cap B)\setminus C)$

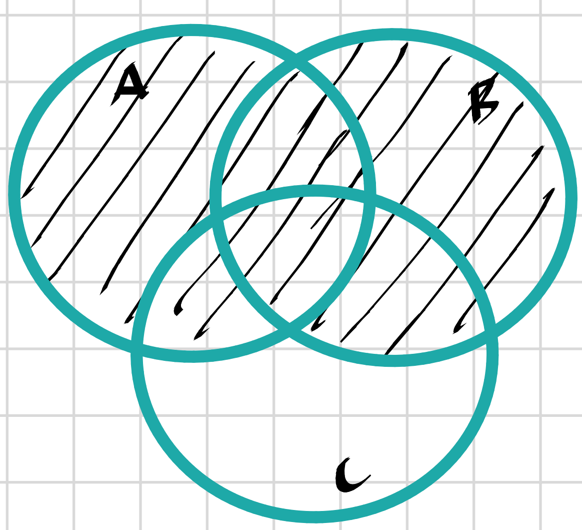
4154 Vad kan man säga om mängderna *A* och *B* om $|A \setminus B| = 0$?

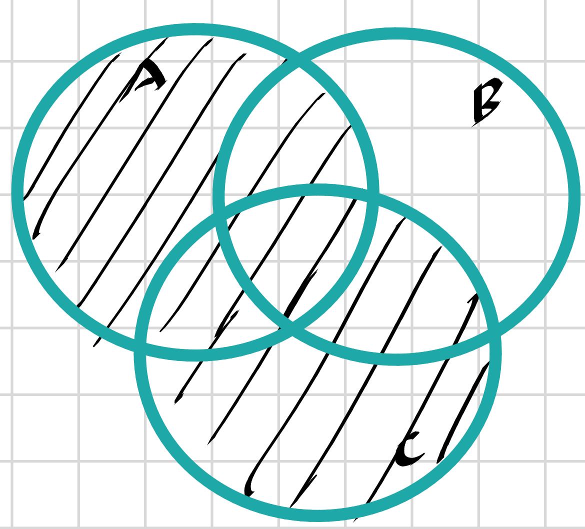
4154. Att A är en delmängd i B: $A\subseteq B$

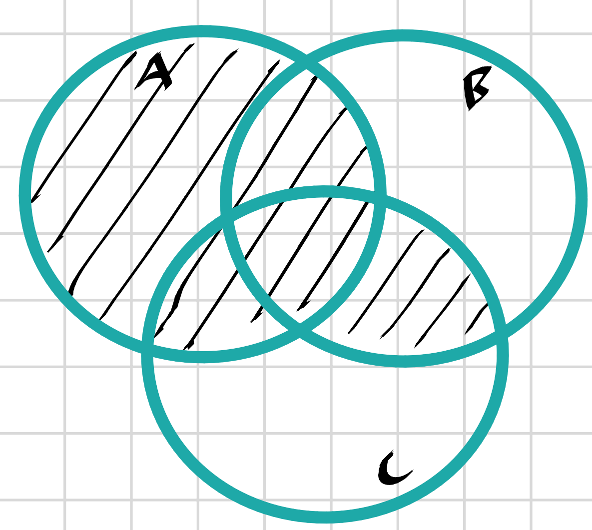
4155 Visa med hjälp av ett Venndiagram att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



$VL = A\cup(B\cap C)$



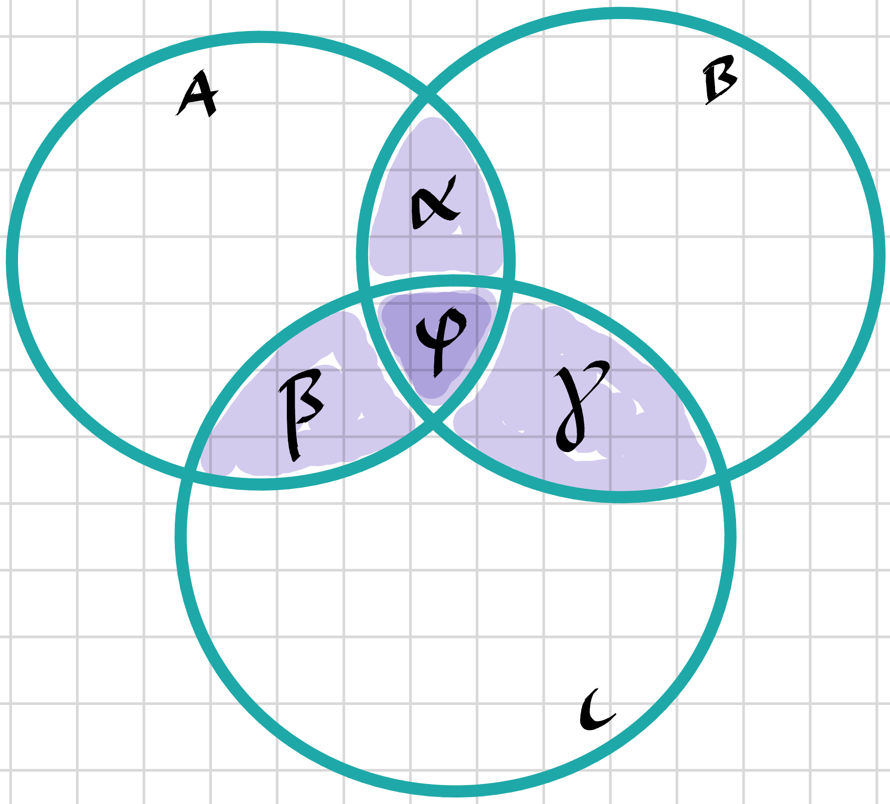




$HL = (A\cup B) \cap (A\cup C) = A\cup(B\cap C) = VL$ #

4156 Förklara med hjälp av ett Venndiagram att
$|A \cup B \cup C| =$
$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$
$+ |A \cap B \cap C|$

4156.



$|A|+|B|+|C|$ ger dubletter i områdena α, β och γ vilka tas bort med subtraktion av termerna $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ och $|B \cap C|$. Subtraktion ger dock ett tomrum i området φ som kompenseras med additionen av $|A \cap B \cap C|$.

4205 Visa att om A och B är ändliga mängder, så är $|A \times B| = |B \times A|$.

4205. $VL = |A \times B| = |A| \cdot |B|$

$HL = |B \times A| = |B| \cdot |A| = |A| \cdot |B| = VL$ #

4206 Ett visst lösenord ska bestå av 8 tecken. De tillåtna symbolerna är de 10 siffrorna 0 till 9 samt alfabetets 29 bokstäver, såväl stora som små.

a) Hur många olika lösenord kan man skapa med dessa symboler?

b) Om man i stället tillåter lösenord som består av 6, 7 eller 8 tecken, hur många olika lösenord kan man totalt skapa då?

c) Ett kodknäckarprogram klarar att testa 5 000 000 lösenord i sekunden. Hur lång tid kan det som mest ta för datorn att knäcka ett lösenord på 8 tecken?

4206. a) $(10 + 29 \cdot 2)^8 = 68^8 \approx \underline{4{,}57 \cdot 10^{14}}$

b) $68^6 + 68^7 + 68^8 \approx \underline{4{,}64 \cdot 10^{14}}$

c) $\dfrac{68^8}{5 \cdot 10^6}$ s $\approx$ <u>1058 dygn</u>

4207 En gymnasieklass ska välja ordförande och sekreterare till klassrådet. De har bestämt att de ska välja en kille och en tjej. I klassen går 16 tjejer och 12 killar. På hur många olika sätt kan de välja ordförande och sekreterare?

Alt. $\binom{16}{1}\cdot\binom{12}{1} + \binom{12}{1}\cdot\binom{16}{1} = 384$

4207. Kille som ordförande: $16 \cdot 12 = 192$ sätt

Tjej som ordförande: $16 \cdot 12 = 192$ sätt

Totalt $192 + 192 = \underline{384}$ sätt

4208 Låt A vara lösningsmängden till ekvationen $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ och B lösningsmängden till ekvationen $z^3 = i$. Bestäm $|A \times B|$.

4208.

A:

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (2 lösningar $\Rightarrow |A| = 2$)

B:

$$z^3 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) \cdot \frac{1}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$ (3 lösningar $\Rightarrow |B| = 3$)

$$z_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = \underline{6}$$

4209 Visa att multiplikationsprincipen kan utvidgas till att gälla ett godtyckligt antal mängder, dvs. att $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

4209. $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2| \Rightarrow$

$|A_1 \times A_2| \cdot |A_3| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = |A_1 \times A_2 \times A_3| \Rightarrow$

$|A_1 \times A_2 \times A_3| \cdot |A_4| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4|$ o.s.v.

4220 I mängden A är elementen heltal och $|A| = 8$.

a) Kan man med säkerhet påstå att minst två tal har samma rest vid division med 8?

b) Vilket är det högsta tal n som man kan dividera med och säkert veta att minst två tal i A har samma rest?

$\boxed{m = n \cdot k + 1}$

4220. a) Minst två tal $\Rightarrow$ $k = 1$

Gäller $m = n \cdot k + 1$?

m = antalet föremål = antalet element = 8

n = antalet lådor = antalet tal med samma rest = 8

(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

$n \cdot k + 1 = 8 \cdot 1 + 1 = 9 > m \Rightarrow$ Nej

b) $n = \frac{m-1}{k} = \frac{8-1}{1} = 7$

$n_{max} = 7$

4221 En rektangel har omkretsen 100 cm. Längs rektangelns ytterkant sätter man slumpvis ut 103 punkter. Visa att minst två av punkterna är mindre än 1 cm ifrån varandra.

4221.

Minst två $\Rightarrow k = 1$

m = antal föremål = 103

n = antal lådor = 100

Gäller $n \cdot k + 1 \leq m$?

$100 \cdot 1 + 1 = 101 \leq 103$ #

4222 Kerstin använder Excel för att slumpa fram 50 heltal. Minst hur många av dessa tal kommer att ge samma rest vid division med 7?

$\boxed{m \geq n \cdot k + 1}$

4222.

m = antal föremål = 50

n = antal lådor = antal tal med samma rest = 7

(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)

$$k \leq \frac{m-1}{n} = \frac{50-1}{7} = 7$$

$k + 1 = \underline{8}$

4223 Tony's restaurang har ett specialerbjudande med fyra rätter. Först serveras antipasti, därefter kan man välja mellan två olika pastarätter, tre olika huvudrätter och två olika efterrätter. Ludde fyller 60 år och bjuder sin familj på middag på Tony's. Totalt är de 15 personer som beställer specialerbjudandet. Kan man säkert veta att minst två personer kommer att beställa samma kombination av fyra rätter?

4223. Minst två $\Rightarrow k = 1$

m = antalet föremål = antalet personer = 15

n = antalet lådor = antalet rätter = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Gäller $n \cdot k + 1 \leq m$?

$12 \cdot 1 + 1 = 13 \leq 15 \Rightarrow$ Ja

4224 Dirichlets lådprincip säger att: "Om m föremål ska placeras i n lådor ($m, n \in \mathbf{Z}^+$) och $m > n$, så kommer minst en låda att innehålla fler än ett föremål."

a) För ett resonemang som visar att påståendet stämmer.

b) För ett resonemang som visar att den utvidgade lådprincipen stämmer, dvs. att: "Om m föremål ska placeras i n lådor och $m > kn$ ($k, m, n \in \mathbf{Z}^+$), så kommer minst en låda att innehålla fler än k föremål."

4224. a) Resonemanget bygger på att alla tomma lådor fylls först. Är då $m > n$ måste det ju minst bli ett föremål över som måste läggas i en "otom" låda.

b) Resonemanget bygger på att alla lådor fylls jämnt. Är då $m > kn$ måste det ju minst bli fler än k föremål i en av lådorna.

4225 a) Kan man med säkerhet påstå att det finns två invånare i Kina vars kroppslängder inte skiljer sig med mer än en nanometer (1 nm)?

b) Hur skulle man kunna formulera ett liknande påstående för invånare i Sverige så att påståendet säkert skulle vara sant?

c) Minst hur många kineser är lika långa på en mikrometer (1 µm) när?

4225.

a) m = antal föremål = antalet kineser $\approx$ 1.4 miljarder $= 1,4 \cdot 10^9$

n = antal lådor = antal längdintervall om 1 nm.

Om vi antar att samtliga kineser är kortare än

2.50 m $\Rightarrow$ $n = 2.5 \cdot 10^9$

$n > m$ $\Rightarrow$ Nej.

b) m = antal föremål = antalet invånare i Sverige $\approx$ 9 milj

$n < m$ $\Rightarrow$ Ja.

c) n = antal längdintervall om 1 µm

Om vi antar att samtliga kineser är kortare än

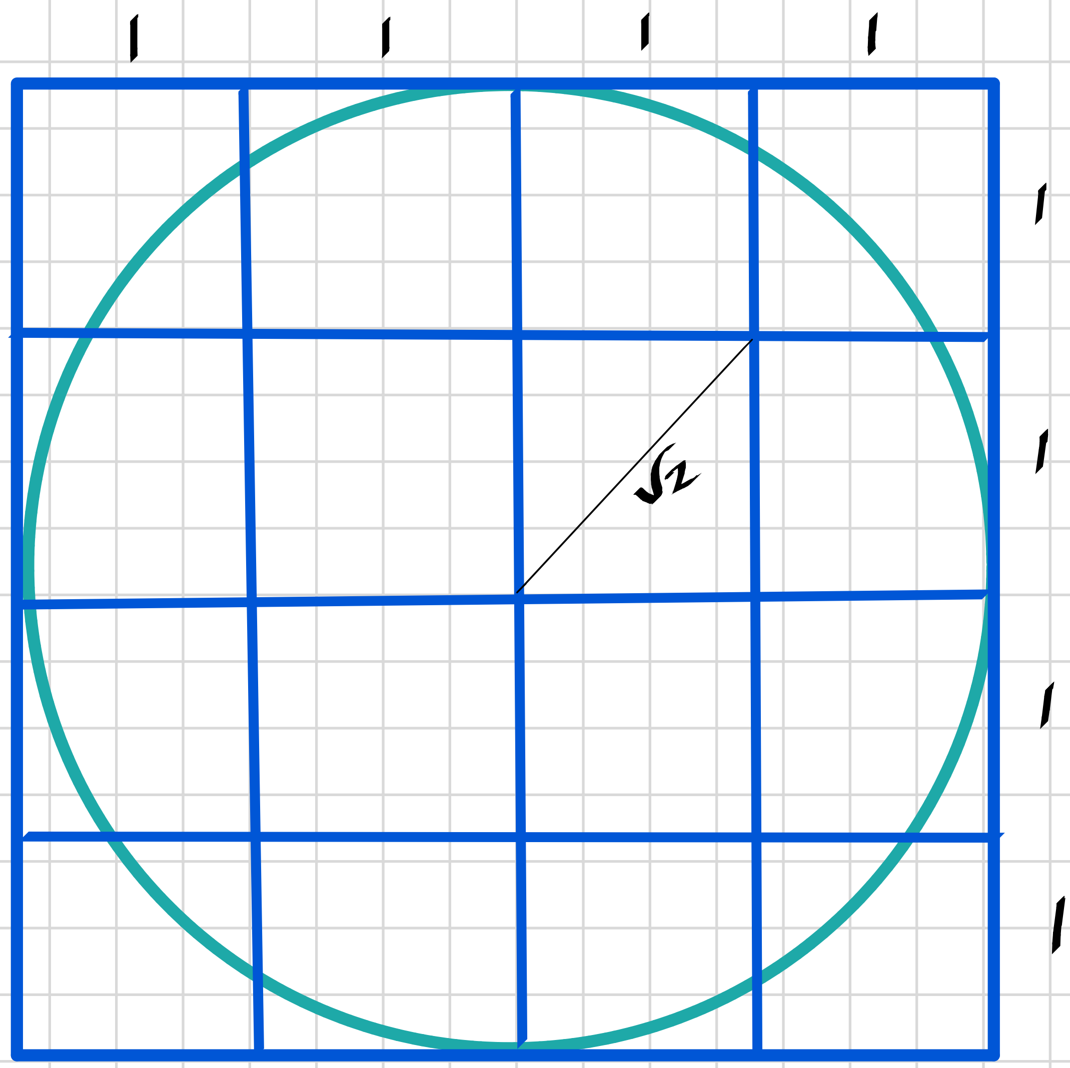
2.50 m $\Rightarrow$ $n = 2.5 \cdot 10^6$

$$k = \frac{m-1}{n} \approx \frac{m}{n} = \frac{1,4 \cdot 10^9}{2,5 \cdot 10^6} \approx 560$$

Minst 560 kineser kan ha samma längd inom 1 µm.

4226 Sjutton punkter ska placeras i en cirkel med radien 2 l.e. Visa att det är omöjligt att placera punkterna så att avståndet mellan de punkter som ligger närmast varandra blir större än $\sqrt{2}$ l.e.

4226.



Antalet kvadrater (som tillsammans har större yta än cirkeln) = 16 och det största avståndet inom en kvadrat = $\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ En av kvadraterna måste minst innehålla 2 punkter med inbördes avstånd mindre än $\sqrt{2}$ l.e. #

4227 Låt A vara en mängd vars element är heltal. Vilket är största möjliga värde $|A|$ kan ha, om mängden inte får innehålla två element vars summa eller differens är delbar med 10?

4227.

$0 \Rightarrow \cancel{10}$ $\quad 3 \Rightarrow \cancel{7}$

$1 \Rightarrow \cancel{9}$ $\quad 4 \Rightarrow \cancel{6}$

$2 \Rightarrow \cancel{8}$ $\quad 5$

$$|\{0,1,2,3,4,5\}| = \underline{6}$$

4236 Motivera varför antalet permutationer till en mängd med n stycken element kan beräknas med hjälp av $n!$.

4236. Det kan liknas vid en kö där första platsen kan innehas av n element. Den andra platsen kan sedan innehas av n-1 element o.s.v ända tills det endast finns 1 element kvar.

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

4237 Motivera varför antalet bokstavskombinationer med 6 bokstäver som kan bildas av LALLAR kan beräknas med uttrycket $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$.

4237.

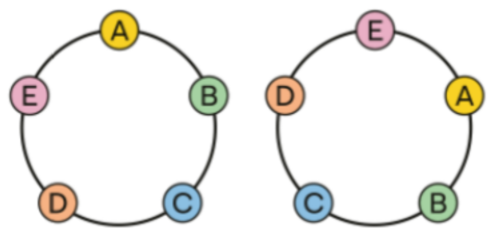
Sex bokstäver kan kombineras på 6! olika sätt.
Men de LLL som annars hade kunnat kombineras på 3! kan bara kombineras på ett sätt.
6! måste därför divideras med 3!. Samma resonemang gäller för AA.

Alt.

LLL kan placeras på $\binom{6}{3}$ olika sätt.
Därefter kan AA placeras på $\binom{3}{2}$ olika sätt.

Totalt blir det $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6!}{3! \cdot 2!}$

4238 I figuren är de 5 bokstäverna A–E ordnade på samma sätt i en ring med 5 positioner. En vridning av ringen påverkar inte ordningen.



a) På hur många olika sätt kan man ordna 5 bokstäver i en ring med 5 positioner?

b) På hur många sätt kan man ordna 5 olika bokstäver i en ring om man har 8 olika bokstäver att välja bland?

c) Skriv ett uttryck för antal sätt man kan ordna k olika bokstäver i en ring om man har n olika bokstäver att välja bland.

4238.

a) $\dfrac{P(5,5)}{5} = \dfrac{5!}{5} = \underline{24 \text{ st}}$

b) $\dfrac{P(8,5)}{5} = \dfrac{8!}{5 \cdot 3!} = \underline{1344 \text{ st}}$

c) $\underline{\dfrac{P(n,k)}{k}}$

*) 5 olika vinkelpositioner med samma ordningsföljd måste kompenseras bort.

4239 Visa att

a) $n! + (n+1)! = (n+2)n!$

b) $n! + (n-1)! = (n^2-1)(n-2)!$

4239. a) $VL = n! + (n+1)\cdot n! = (1+n+1)\cdot n! = (n+2)n! = HL$ #

b) $HL = (n+1)(n-1)(n-2)! = (n+1)(n-1)! =$

$= n(n-1)! + (n-1)! = n! + (n-1)! = VL$ #

4240 Tre män och tre kvinnor ska äta middag vid ett runt bort. På hur många sätt kan bordsplaceringen ske om

a) man tar hänsyn till vilken stol var och en sitter på

b) man endast tar hänsyn till vem som sitter bredvid vem

c) de ska sitta varannan kvinna och varannan man och man endast tar hänsyn till vem som sitter bredvid vem

*) 6 olika vinkelpositioner med samma ordningsföljd måste kompenseras bort. Dessutom inbördes placering kombineras bort med 2.

4240.

a) $6! = 720$ sätt

b) $\frac{6!}{6 \cdot 2} = \frac{5!}{2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt

c) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sätt

* Efter att de 3 männen placerats ut kan resterande platser fördelas på 3! sätt.

4241 Undersök om 29! är delbart med 1 000 000 utan att använda digitalt hjälpmedel.

$1000000 \mid 29!$

4241 Vi skall visa att $29! = k \cdot 1000000$.

Geogebra Primefactors(1000000) $\rightarrow$ $1000000 = 2^6 \cdot 5^6$

Påståendet är visat om 29! innehåller alla dessa faktorer.

$$29! = 29 \cdot 28 \cdot 27! = 29 \cdot 7 \cdot \underline{2^2} \cdot 27! =$$
$$= 29 \cdot 7 \cdot \underline{2^2} \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23! =$$
$$= 29 \cdot 7 \cdot \underline{2^2} \cdot 27 \cdot \underline{2} \cdot 13 \cdot \underline{5^5} \cdot \underline{2^2} \cdot 6 \cdot 23! =$$
$$= 29 \cdot 7 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 6 \cdot \underline{2^5} \cdot \underline{5^5} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19! =$$
$$= 29 \cdot 7 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 6 \cdot \underline{2^5} \cdot \underline{5^5} \cdot 23 \cdot \underline{2} \cdot 11 \cdot 21 \cdot 4 \cdot \underline{5} \cdot 19! =$$
$$= k \cdot 2^6 \cdot 5^6 = k \cdot 1000000 \quad \#$$

4253 Hur många olika sexsiffriga koder kan du skapa med tre ettor och tre nollor?

4253. $C(6,3) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = \underline{20}$

4254 Visa att $C(n, 0) = 1$ för alla värden på n

a) genom att använda formeln
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

b) genom att med ett resonemang förklara varför antalet sätt att välja 0 element av n element är 1

4254. a) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

b) Att inte välja något element kan göras på <u>ett</u> sätt.

4255 Bestäm hur många olika delmängder man kan bilda av mängden F om

a) $|F| = 1$
b) $|F| = 2$
c) $|F| = 3$
d) $|F| = 4$
e) Formulera en hypotes om hur många delmängder man kan bilda till F om $|F| = n$.

4255. a) $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = \underline{2}$

b) $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = \underline{4}$

c) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = \underline{8}$

d) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = \underline{16}$

e) $\underline{2^n \text{ st}}$

4256 I det amerikanska spelet Powerball ska man välja 5 olika nummer mellan 1och 69 samt en "powerball" mellan 1 och 26. Hur stor är sannolikheten att få alla rätt?

4256.

$$P = \frac{1}{\binom{69}{5} \cdot \binom{26}{1}} \approx \frac{1}{2{,}92 \cdot 10^{8}} \approx \underline{3{,}4 \cdot 10^{-9}}$$

4257 Visa att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

a) genom att använda formeln $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

b) genom att med ett resonemang förklara varför antalet sätt att välja k element av n element är detsamma som att välja $(n-k)$ element av n

4257.

a) $HL = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = VL$ #

b) Att välja de element som inte ska ingå $(n-k)$ kan göras på lika många sätt som att välja de element som ska ingå (k).

4258 Finns det något heltal k som löser ekvationen $C(8, 5) = P(8, k)$? Motivera ditt svar.

4258.

$$\frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{(8-k)!} \Rightarrow$$

$$(8-k)! = 5! \cdot 3! = 5! \cdot 6 = 6!$$

$$8-k = 6 \Rightarrow \underline{k = 2}$$

4259 En grupp bestående av 22 försenade tågresenärer ska åka taxi i fyra olika bilar som har plats för 7, 7, 4 respektive 4 personer. På hur många sätt kan tågresenärerna åka i taxibilarna

a) om vi tar hänsyn till vilken plats de får inom respektive bil

b) om vi inte tar hänsyn till vilken plats de får inom respektive bil

4259.

a) $P(22,7) \cdot P(15,7) \cdot P(8,4) \cdot P(4,4) \approx \underline{1.12 \cdot 10^{21} \text{ sätt}}$.

b) $C(22,7) \cdot C(15,7) \cdot C(8,4) \cdot C(4,4) \approx \underline{7.68 \cdot 10^{10} \text{ sätt}}$.

4268 Formeln för hur man beräknar antalet möjliga kombinationer med repetition och utan hänsyn till ordning ges av

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Visa att detta ger samma värde som

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

4268.

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,(n+k-1-(n-1))!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} =$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-k)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k} \quad \#$$

4269 När du spelar poker får du 5 kort på handen. Beräkna sannolikheten att

a) precis ett av dem är en tia

b) precis två av dem är tior

4269.

a) $P = \frac{5 \cdot 4}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \approx \underline{0{,}30}$

Alt. $P = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \binom{5}{1} \approx \underline{0{,}30}$

b) $P = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{48}{50} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{48} \cdot \binom{5}{2} \approx \underline{0{,}04}$

4270 I en urna finns 10 röda och 8 svarta kulor. Av dem drar du slumpmässigt 7 kulor. Beräkna sannolikheten att 4 av dem är svarta, om du drar kulorna

a) med återläggning

b) utan återläggning

4270.

a) $P = \left(\frac{8}{18}\right)^4 \cdot \left(\frac{10}{18}\right)^3 \cdot \binom{7}{4} \approx \underline{0{,}234}$

b) $P = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \binom{7}{4} \approx \underline{0{,}264}$

4271 En nyfiken kemist laborerar med 11 olika ämnen. Två av ämnena exploderar om de kommer i kontakt med varandra. På hur många olika sätt kan kemisten göra en blandning av 5 ämnen och samtidigt undvika en explosion?

4271 Antal sätt att kombinera 5 av 11 $= \binom{11}{5} = 462$

2 av ämnena förekommer tillsammans

i $\binom{11-2}{5-2} = \binom{9}{3} = 84$ av de 462 kombinationerna

$462 - 84 = \underline{378 \text{ sätt}}$

$\underbrace{\text{ABCDEFGHI}}\underline{\text{JK}}$

Resterande 9 på 3 platser

Par som exploderar

$\binom{9}{3}$

4272 När Ludvig skjuter från trepoängslinjen i basket är sannolikheten att han sätter bollen 0,35. Under en match skjuter han i genomsnitt 8 gånger från trepoängslinjen. Vad är sannolikheten att han sätter mer än hälften av de skotten?

4272.

8 skott : $0{,}35^8 \cdot \binom{8}{8} = 0.000225$

7 " : $0{,}35^7 \cdot 0{,}65^1 \cdot \binom{8}{7} = 0{,}003346$

6 " : $0{,}35^6 \cdot 0{,}65^2 \cdot \binom{8}{6} = 0{,}021747$

5 " : $0{,}35^5 \cdot 0{,}65^3 \cdot \binom{8}{5} = 0{,}080773$

$\Sigma\ 0{,}106$

4273 Motivera varför det finns n^k olika sätt att välja k element ur en mängd med n element, om man tar hänsyn till ordning och tillåter repetition.

4273. Om man exempelvis har 5 personer som ska ställa sig i en kö med 4 platser och har för varje plats ständigt alla 5 personerna att välja bland.

$P = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

4274 I en internationell konferens deltar 23 länder, däribland Chile, Indien och Sverige. Under konferensen vill man bilda en arbetsgrupp bestående av 9 länder som huvudsakligen ska ägna sig åt hälsofrågor. I arbetsgruppen får inte Chile, Indien och Sverige ingå samtidigt. På hur många olika sätt kan man bilda arbetsgruppen?

4274 Antal sätt att kombinera 9 av 23 = $\binom{23}{9} = 817190$

3 av länderna förekommer tillsammans

i $\binom{23-3}{9-3} = \binom{20}{6} = 38760$ av de 817190 komb.

$817190 - 38760 = \underline{778430 \text{ sätt}}$.

4275 En fysiklärare har tre listor med vardera 10 uppgifter. Inför ett skriftligt prov, som ska innehålla 6 uppgifter, ska läraren välja 2 uppgifter från den första listan, 3 uppgifter från den andra listan och 1 uppgift från den tredje listan. Hur många olika skriftliga prov kan läraren konstruera på detta sätt om man

a) inte tar hänsyn till uppgifternas ordning

b) tar hänsyn till uppgifternas ordning

4275. a) $\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{10}{1} = 45 \cdot 120 \cdot 10 = \underline{54000 \text{ st}}$

b) $P = C \cdot k! = 54000 \cdot 6! = \underline{3{,}89 \cdot 10^7 \text{ st}}$

(Man avser nog här att det endast är kombinationen av de redan valda sex elementen som saknar betydelse)

4276 Gabriella, Thuy, Mathilda, Ella och Sara ska gå på bio. De har fått platserna 112–116.

a) På hur många sätt kan tjejerna placera sig på de fem platserna?

b) Hur många placeringar finns det om Mathilda vill sitta i mitten?

c) Hur många placeringar finns det om Gabriella och Thuy bråkat och inte vill sitta bredvid varandra?

4276.

a) $5! = 120$ sätt

b) $4! \cdot 1 = 24$ placeringar

c)

GT000
TG000
0GT00
0TG00
00GT0
00TG0
000GT
000TG

$8 \cdot 3!$

$5! - 8 \cdot 3! = 72$ placeringar

4277 Låt $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ vara universalmängden med $A = \{1, 2, 3, 4\}$ som en delmängd. Hur många olika mängder $B \subseteq U$ finns det sådana att

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cap B = \{1, 2\}$

c) $(A \cap B)^C = \{7\}$

4277

a) B kan vara $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ eller någon kombination av dessa siffror (som inte innehåller 6, 7 eller 8).

Finns 1 med (ja/nej) = 2 komb.

Finns 2 med (ja/nej) = 2 komb.

Finns 3 med (ja/nej) = 2 komb

Finns 4 med (ja/nej) = 2 komb

Finns 5 med (ja/nej) = 1 komb (ja)

Finns 6 med (ja/nej) = 1 komb (nej)

Finns 7 med (ja/nej) = 1 komb (nej)

Finns 8 med (ja/nej) = 1 komb (nej) =>

Antal delmängder i U = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{16\text{ st}}$

b) B kan vara $\{1,2,5,6,7,8\}$ eller någon annan kombination som innehåller 1 och 2 men ej 3 och 4.

Finns 1 med (ja/nej) = 1 komb. (ja)

Finns 2 med (ja/nej) = 1 komb. (ja)

Finns 3 med (ja/nej) = 1 komb. (nej)

Finns 4 med (ja/nej) = 1 komb. (nej)

Finns 5 med (ja/nej) = 2 komb.

Finns 6 med (ja/nej) = 2 komb.

Finns 7 med (ja/nej) = 2 komb.

Finns 8 med (ja/nej) = 2 komb.

Antal delmängder i U $= 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = \underline{16 \text{ st}}$

c) <u>Ej lösbar.</u>

4278 En pokerhand består av fem slumpvis utdelade kort ur en kortlek med 52 kort.

a) Hur många olika pokerhänder finns det?

b) Hur många pokerhänder finns det där alla fem kort har samma färg (spader, klöver, ruter eller hjärter)?

c) Hur många pokerhänder med stege finns det?

4278.

a) $\binom{52}{5} = \underline{2598960 \text{ st}}$

b) $\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} = \binom{13}{5} \cdot 4 = \underline{5148 \text{ st}}$

c)
$1 \to 5$
$2 \to 6$
$3 \to 7$
$4 \to 8$ = 10 sätt att få stege med en färg
$5 \to 9$
$6 \to 10$
$7 \to 11$ knekt
$8 \to 12$ dam
$9 \to 13$ kung
$10 \to 14$ ess

Antal färgkombinationer med 5 kort $= 4^5$

$10 \cdot 4^5 = \underline{10240 \text{ st}}$

4279 Här ska du få föra ett eget resonemang om varför antal möjliga sätt att välja k element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning är $\binom{n+k-1}{k}$.

Eftersom det är med repetition, och vi har k på två ställen i uttrycket, så kan vi tillåta även $k > n$.

Säg att det finns tre olika godissorter (n) och att du ska välja 5 bitar (k). Om vi kallar sorterna *a*, *b* och *c*, så är några möjliga val: *aaaaa*, *aaabb*, *abbcc* och *acccc*. Eftersom vi inte tar hänsyn till ordning representerar valet *aaabb* samma val som t.ex. *aabba*. Vi ska illustrera detta ytterligare här nedanför. I högra spalten delar vi in bitarna i tre fack, i stället för att markera dem med *a*, *b* eller *c*. Facken avdelas med ett lodrätt streck och det krävs två sådana streck för att dela in i tre fack.

aaaaa	○○○○○||	Samtliga bitar i första facket.
aaabb	○○○|○○|	Tre bitar i första facket, två i andra och ingen i tredje.

a) Rita en figur som visar hur ringarna ska placeras i förhållande till de lodräta strecken, för att motsvara valet *bbbcc*?

b) Numrera ringarna och strecken i din figur från vänster till höger med 1–7 och förklara med hjälp av figuren varför det totala antalet val som kan göras är

$$\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5}$$

c) Utvidga ditt resonemang och motivera varför det finns $\binom{n+k-1}{k}$ sätt att välja k element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning.

4279.

a) |○○○|○○

b) 1 2 3 4 5 6 7

Antal möjliga kombinationer $= \binom{7}{5}$

$7 =$ antalet bitar + antalet sorter $- 1 = 3 + 5 - 1 = n + k - 1$

c) Det krävs $n-1$ antal streck för att kunna dela upp mängden k i n delar.

Antalet möjliga positioner blir då $n-1+k$ och antalet möjliga kombinationer $\binom{n-1+k}{k}$.

4280 Carl har 7 hinkar i olika färger.

a) På hur många sätt kan han placera 20 tennisbollar i de olika hinkarna?

b) På hur många sätt kan han placera de 20 tennisbollarna om det måste ligga minst en boll i varje hink?

4280.

a) $n = 7$, $k = 20$

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{7+20-1}{20} = \binom{26}{20} = \underline{230\,230 \text{ sätt}}$$

b) När en boll lagts i varje hink återstår 13 bollar $\Rightarrow k = 13$.

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{7+13-1}{13} = \binom{19}{13} = \underline{27\,132 \text{ sätt}}.$$

4289 Bestäm den tredje termen i utvecklingen av uttrycken

a) $(1 - 2b)^4$

b) $(3x + 4y)^7$

c) $(a^2 - b)^{10}$

4289. a) $\binom{4}{2}\cdot 1^2\cdot(-2b)^2 = 6\cdot 1\cdot 4b^2 = 24b^2$

b) $\binom{7}{2}\cdot(3x)^5\cdot(4y)^2 = 21\cdot 243\cdot 16\cdot x^5y^2 = 81648x^5y^2$

c) $\binom{10}{2}\cdot(a^2)^8\cdot(-b)^2 = 45\cdot a^{16}b^2$

4290 Enligt Pascals identitet gäller att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ där } n > k > 0.$$

Motivera varför likheten gäller med hjälp av Pascals triangel.

4290.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$n = 3,\ k = 2$

$$\binom{3}{2} = \binom{3-1}{2} + \binom{3-1}{1}$$

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

4291 Bestäm koefficienten för termen x^5y^7 i utvecklingen av uttrycket $(x + 6y)^{12}$.

4291. $n = 12$, $k = 7$

Koefficienten $= \binom{12}{7} \cdot 6^7 = 792 \cdot 279936 = \underline{221\,709\,312}$

4292 När Wanda utvecklar ett uttryck i formen $(A + B)^8$ blir en av termerna $1\,120x^{12}y^8$. Ge exempel på uttryck som A och B kan stå för.

4292. $n = 8$, Ansätter $k = 4$ $\Rightarrow$

$\binom{8}{4} \cdot q = 1120 \Rightarrow q = 16 \qquad q^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

$(x^3 + 2y^2)^8$

Kontroll: 5:e termen $= \binom{8}{4} \cdot (x^3)^{8-4} \cdot (2y^2)^4 =$

$= 70x^{12} \cdot 16y^8 = 1120x^{12}y^8$

Exempelvis $\underline{A = x^3, \ B = 2y^2}$

4293 Binomialutvecklingen av $(a+b)^n$ innehåller vissa termer med samma koefficient om $n > 2$.

a) Förklara varför vissa termer har samma koefficient.

b) För vissa n finns det en term som inte har samma koefficient som någon annan term. För vilka värden på n gäller det?

4293.

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

a) Eftersom $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, dvs

Pasals triangel är symmetrisk.

b) För alla jämna n.

Ex.v ger ju $(a+b)^2$ den ensamma koefficienten $\binom{2}{1} = 2$.

4294 Bestäm koefficienten för termen m^4n^{11} i utvecklingen av uttrycket $(3m-2n)^{15}$.

4294. $n = 15,\ k = 11 \Rightarrow$

$$\binom{15}{11} \cdot 3^{15-11} \cdot (-2)^{11} = 1365 \cdot 81 \cdot (-2048) = \underline{-226437120}$$

4295 Bestäm koefficienten för a^7-termen i utvecklingen av $\left(a^2 - \frac{3}{a}\right)^5$.

4295. $n = 5$

$$(a^2)^{n-k} \cdot (a^{-1})^k = a^7 \Rightarrow$$

$$2(n-k) - k = 7$$

$$2n - 3k = 7$$

$$k = \frac{2n-7}{3} = \frac{2 \cdot 5 - 7}{3} = 1$$

$$\binom{5}{1} \cdot 1^{5-1} \cdot (-3)^1 = \underline{-15}$$

4296 Beräkna summan av elementen på var och en av de sex första raderna i Pascals triangel.

a) Vilken iakttagelse kan du göra?

b) Förklara varför det är på det sättet.

b) Binomialsumman =

$$(1+1)^n = 2^n$$

4296.

a) $\binom{0}{0} = 1$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

<u>Summan blir 2^n</u>

4297 Låt A vara en mängd, där $|A| = 12$.

a) Hur många delmängder till A har ett element?

b) Hur många delmängder till A har två element?

c) Hur många delmängder finns det totalt till A? (Minns att $\varnothing \subseteq A$ och $A \subseteq A$.)

4297.

a) 12 st

b) $\binom{12}{2} = 66$ st

c) $2^{12} = 4096$ st

ex. {ABC}

ABC
A
B
C
AB
AC
BC
$\varnothing$

$2^3 = 8$ delmängder

{AB}

AB
A
B
$\varnothing$

$2^2 = 4$ delmängder

4298 Bevisa Pascals identitet algebraiskt, dvs. visa att $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ där $n > k > 0$.

4298.

$$HL = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{k \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \#$$

4299 Visa att

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

för $n > 0$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k = (a+b)^n}$$

4299.

Jmf. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k \Rightarrow$

$(-1)^k = a^{n-k} \cdot b^k$

$(-1)^k = a^n \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k \Rightarrow a = 1, b = -1$

$(a+b)^n = (1-1)^n = 0$ #