3115 I en bakterieodling är tillväxthastigheten $B'(t)$ proportionell mot aktuell bakteriemängd $B(t)$.

a) Beskriv tillväxten med en differentialekvation där proportionalitetskonstanten är $k = 0{,}0035\ \text{s}^{-1}$.

b) Tolka differentialekvationen med ord.

c) Kan $B(0) = 0$? Motivera ditt svar.

3115. a) $B' = k \cdot B = 0.0035\,B$

b) Tillväxthastigheten är vid varje tidpunkt 0.35% av bakteriemängden per sekund.

c) Nej. Om $B(0) = 0$ så är bakteriemängden noll från start.

3116 Visa att

a) $y = xe^x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

b) $x = 5t \sin t$ är en lösning till differentialekvationen $x'' + x = 10 \cos t$

3116. a)

$$y = xe^x$$
$$y' = e^x(1+x)$$
$$y'' = e^x(2+x)$$

$$VL = e^x(2+x) - 2e^x(1+x) + 2xe^x = xe^x = HL \quad \#$$

b)

$$x = 5t\sin t$$
$$x' = 5(\sin t + t\cos t)$$
$$x'' = 5(\cos t + \cos t - t\sin t) = 10\cos t - 5t\sin t$$

$$VL = 10\cos t - 5t\sin t + 5t\sin t = 10\cos t = HL \quad \#$$

3117 I ett företag som tillverkar appar är man oroad över att dagsförsäljningen av en av deras populäraste appar varit konstant i några månader. Därför genomför man en annonskampanj som resulterar i att dagsförsäljningen ökar. Efter annonskampanjen är ändringstakten i dagsförsäljningen, enligt en förenklad modell, proportionell mot roten ur dagsförsäljningen vid varje tidpunkt.

Ange en differentialekvation som beskriver ändringstakten i dagsförsäljningen

a) före annonskampanjen

b) efter annonskampanjen

(Provbanksprov Ma5 vt 2014)

3117. a) $y' = 0$

b) $y' = k\sqrt{y}$

3118 I bilden här nedanför har vi använt GeoGebra för att lösa differentialekvationen $y' = -2xy + e^{-x^2}$.

1	$f(x) := \text{LösODE}\left(y' = -2\,x\,y + e^{-x^2}\right)$
	$\rightarrow\ f(x) := c_1\, e^{-x^2} + x\, e^{-x^2}$

a) Verifiera att $y = e^{-x^2} + xe^{-x^2}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Verifiera att funktionen $y = Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}$ löser differentialekvationen för alla värden på konstanten C.

3118. a) $y = e^{-x^2} + xe^{-x^2}$

$VL = y' = -2xe^{-x^2} + e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$HL = -2x(e^{-x^2} + xe^{-x^2}) + e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} + e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = VL$ #

b) $VL = y' = -2xCe^{-x^2} + e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$HL = -2x(Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}) + e^{-x^2} = -2xCe^{-x^2} + e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = VL$ #

3119 Både $y_1 = C_1e^t$, $y_2 = C_2e^{3t}$ är lösningar till differentialekvationen $y'' - 4y' + 3y = 0$. Visa att även $y = y_1 + y_2$ löser ekvationen.

3119.

$$y = C_1e^t + C_2e^{3t}$$
$$y' = C_1e^t + 3C_2e^{3t}$$
$$y'' = C_1e^t + 9C_2e^{3t}$$

$$VL = C_1e^t + 9C_2e^{3t} - 4(C_1e^t + 3C_2e^{3t}) + 3(C_1e^t + C_2e^{3t}) = 0 = HL$$

#

3120 Visa att $y = (Ax + B)e^x$, där A och B är reella konstanter, är en lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = 0$.

(Provbanksprov Ma5 vt 2015)

3120.

$$y = Axe^x + Be^x$$
$$y' = Ae^x + Axe^x + Be^x$$
$$y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x + Be^x = 2Ae^x + Axe^x + Be^x$$

$$VL = 2Ae^x + Axe^x + Be^x - 2(Ae^x + Axe^x + Be^x) + Axe^x + Be^x = 0 = HL$$

#

3121 Ge förslag på tal A och b så att $y = Ae^{bx}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - 4y = 0$.

3121.

$y = Ae^{bx}$

$y' = Abe^{bx}$

$y'' = Ab^2e^{bx}$

$Ab^2e^{bx} - 4Ae^{bx} = 0$

exempelvis $A = 1$ och $b = 2$.

3122 Visa att differentialekvationen $y'' + A^2y = 0$ har lösningen $y = \sin Ax + \cos Ax$ oberoende av värdet på konstanten A.

3122.

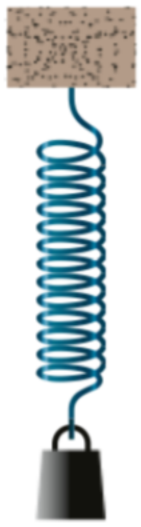
$y = \sin Ax + \cos Ax$

$y' = A\cos Ax - A\sin Ax$

$y'' = -A^2\sin Ax - A^2\cos Ax$

$VL = -A^2\sin Ax - A^2\cos Ax + A^2(\sin Ax + \cos Ax) = 0$ #

3123 En vikt som är upphängd i en fjäder svänger kring jämviktsläget.



Om man bortser från att rörelsen dämpas med tiden, så kan man beskriva svängningen med differentialekvationen $\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$ där y är viktens position i förhållande till jämviktsläget och k är en konstant. Bestäm ω så att $y = A\sin\omega t$ blir en lösning till differentialekvationen.

$\downarrow y$ $\quad m\ddot{y} + ky = 0$

3123.

$$y = A\sin\omega t$$
$$y' = A\omega\cos\omega t$$
$$y'' = -A\omega^2\sin\omega t$$

$$-A\omega^2\sin\omega t = -k \cdot A\sin\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \pm\sqrt{k}$$

3124 En termos innehåller varmt te och står i rumstemperatur. Enligt Newtons avsvalningslag avtar teets temperatur med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan teets och rummets temperatur. Ställ upp en differentialekvation som beskriver teets temperatur och ange lämpliga villkor för när ekvationen gäller.

3124. $T' = -k(T - T_0)$, $k > 0$, $T \geq T_0$

3130 Lös följande differentialekvationer.

a) $y' = \frac{5}{x}$ då $y(2) = \frac{1}{3}$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x$ då $y(1) = \frac{5}{2}$ och $y'(1) = 5$

3130. a) $y = \int \frac{5}{x} dx + c = 5 \ln|x| + c$

$y(2) = \frac{1}{3} \Rightarrow 5 \ln 2 + c = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{3} - 5 \ln 2$

$y = 5 \ln|x| + \frac{1}{3} - 5 \ln 2$

b) $y' = \int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + c_1$

$y = \int y'\,dx + c_2 = \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2$

$y'(1) = 5 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 1 + c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

$y(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{7}{2} \cdot 1 + c_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

3131 På Mars har en sten som får falla fritt accelerationen 3,69 m/s². Det ger differentialekvationen $s''(t) = 3{,}69$.

a) Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $s(0) = 2$ och $v(0) = 4$.

b) Beräkna $s(5) - s(1)$ och tolka ditt svar.

3131.

a) $s''(t) = 3.69$

$s'(t) = \int s'' dt + c_1 = 3.69t + c_1$

$s(t) = \int s' dt + c_2 = 1.845t^2 + c_1 t + c_2$

$v(0) = s'(0) = 4 \Rightarrow c_1 = 4$

$s(0) = 2 \Rightarrow c_2 = 2$

$$\underline{s(t) = 1{,}845t^2 + 4t + 2}$$

b) $s(5) - s(1) = 1{,}845 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - 1{,}845 - 4 = 60{,}28$ m

En fritt fallande sten med utgångshastigheten 4 m/s faller 60.3 m mellan $t_1 = 1$ s och $t_2 = 5$ s.

3132 Bestäm den allmänna lösningen till

a) $x'' = \sin\frac{t}{2}$ b) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

3132.

a) $x' = \int x''\,dt + c_1 = -2\cos\frac{t}{2} + c_1$

$x = \int x'\,dt + c_2 = \underline{-4\sin\frac{t}{2} + c_1 t + c_2}$

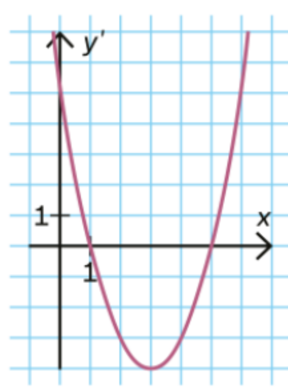
b) $y' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

$y = \int y'\,dt + c = t^{\frac{1}{2}} + c = \underline{\sqrt{t} + c}$

3133 Figuren visar grafen till en differentialekvation, $y' = f(x)$.

a) Vilken differentialekvation visar grafen?

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.



3133.

a) $y' = a(x-3)^2 - 4$

$y'(0) = 5 \Rightarrow 9a - 4 = 5 \Rightarrow a = 1$

$y' = (x-3)^2 - 4 = \underline{x^2 - 6x + 5}$

b) $y = \int y'\,dx + c = \underline{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + c}$

3140 Beskriv med ord lutningen i varje punkt hos en lösningskurva $y = y(x)$ till differentialekvationen $y' = 2y - 3x$.

3140. Lutningen i varje punkt (x,y) ges av uttrycket $y' = 2y - 3x$.

3141 En lösningskurva $y = y(x)$ har lutningen 2 i punkten (3, 1). Vilken av följande differentialekvationer kan kurvan vara en lösning till? Motivera ditt svar.

A $y' + y = x$

B $y' = y - x^2$

C $y' + y = 5x$

3141. A: $y' = 3 - 1 = 2$

B: $y' = 1 - 3^2 = -8$

C: $y' = 5 \cdot 3 - 1 = 14$

3142 Differentialekvationen $y' + 0{,}04y = 0{,}8$ beskriver en enkel modell för hur temperaturen y °C hos en varm kopp te avtar i rumstemperatur. Bestäm värdet av y' när $y = 60$ och tolka ditt svar.

3142. $y' = 0{,}8 - 0{,}04 \cdot 60 = -1{,}6$

Vid temperaturen 60°C sjunker temperaturen med hastigheten 1,6 °C per tidsenhet.

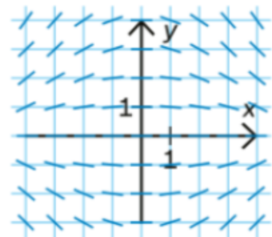
3143 Para ihop varje riktningsfält med rätt differentialekvation.

A $y' = 2xy$

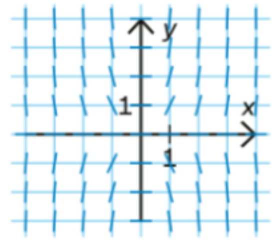
B $\frac{dy}{dx} = x + 2y$

C $y' = -0{,}1xy$

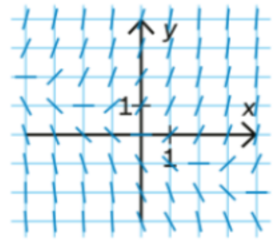
1



2



3



3143. A: $y'(-2,2) = 2\cdot(-2)\cdot 2 = -8 \Rightarrow$ Figur 2

B: $y'(-2,2) = -2+2\cdot 2 = 2 \Rightarrow$ Figur 3

C: $y'(-2,2) = -0.1\cdot(-2)\cdot 2 = 0{,}4 \Rightarrow$ Figur 1

3144 Konstruera en uppgift som handlar om att i en given punkt bestämma lutningen av en lösningskurva till en differentialekvation av första ordningen. Lutningen ska vara -1 och differentialekvationen ska innehålla både x-term och konstantterm.

3144. Vilken lutning har en lösningskurva till $y' = 3x - 4$ i punkten $x = 1$?

3145 En patient tillförs glukos i blodet via ett dropp. Patientens kropp tar upp glukosen med en hastighet som beror av mängden glukos som finns i blodet. Om $g(t)$ gram är mängden glukos i blodet vid tidpunkten t timmar, kan situationen beskrivas med differentialekvationen

$g' = -0{,}35g + 12$

a) Bestäm g' när $g = 20$ och tolka ditt svar.

b) Bestäm för vilka värden på g som $g' < 0$. Tolka vad ditt svar betyder i det här sammanhanget.

c) Bestäm $\lim_{t \to \infty} g(t)$.

3145.

a) $g' = -0.35 \cdot 20 + 12 = 5$

Då mängden glukos är 20 g så ökar glukosmängden med 5 g per timme.

b) $-0.35g + 12 < 0 \Rightarrow g > 34.3$

Då mängden glukos blir större än 34.3 g så minskar glukosmängden i blodet.

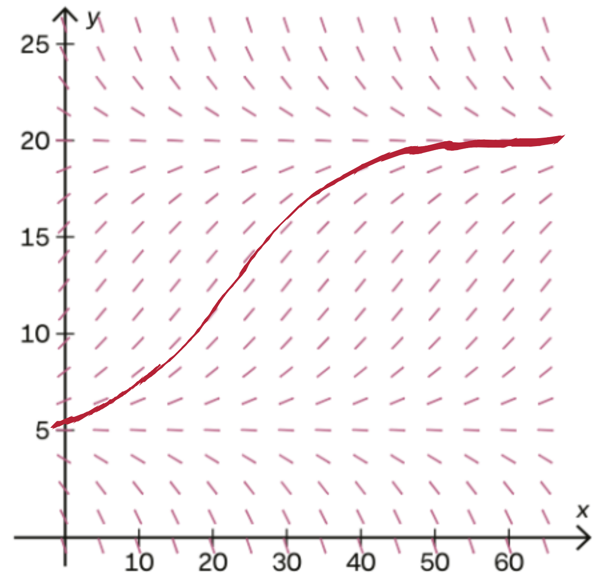
c) Glukosmängden kommer att stabilisera sig vid mängden 34.3 g $\Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 34.3\text{ g}$

Alt. $g' + 0.35g = 12$

$g = Ce^{-0.35t} + \dfrac{12}{0.35}$

$\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0 + \dfrac{12}{0.35} = 34.3\text{ g}$

3146 I grafen visas ett riktningsfält till differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = -\left(1-\frac{y}{5}\right)\left(1-\frac{y}{20}\right)$.



a) Skissa lösningskurvan till differentialekvationen om $y(0) = 6$.

b) Lösningskurvan då begynnelsevillkoret är $y(0) = 5$ och lösningskurvan då begynnelsevillkoret är $y(0) = 5{,}01$ kommer att se olika ut. Beskriv hur dessa två kurvor kommer att se ut och förklara kurvornas utseende utifrån differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = -\left(1-\frac{y}{5}\right)\left(1-\frac{y}{20}\right)$.

(Provbanksprov Ma5 vt 2016)

3146. a) $y(0)=6 \Rightarrow \frac{dy}{dt}(0) = -\left(1-\frac{6}{5}\right)\left(1-\frac{6}{20}\right) = -\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{14}{20} = -0{,}14$

b) $y(0)=5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$ (horisontell kurva)

$y(5{,}01)=5 \Rightarrow (-)\cdot(-)\cdot(+) = +$ (växande kurva)

3209 Lös differentialekvationen $y' + ky = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 0{,}5$.

3209.

$y = Ae^{-kt}$

$y' = -Ake^{-kt}$

$y(0)=5 \Rightarrow A=5$

$y'(0)=0{,}5 \Rightarrow -5k = 0{,}5 \Rightarrow k=-0{,}1$

$y = 5e^{-0{,}1t}$

3210 Bestäm den funktion som uppfyller villkoren
$3 \cdot f'(x) = f(x)$ och $f(0) = 5$.

3210.

$3r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

$f(x) = Ae^{\frac{x}{3}}$

$f(0) = 5 \Rightarrow A = 5$

$\underline{f(x) = 5e^{x/3}}$

3211 Antalet invånare i en stad minskar med förändringshastigheten 2 % per år.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver minskningstakten $N'(t)$.

b) Hur många bor i staden i slutet av år 2033 om det bodde 47 000 personer där i slutet av år 2023?

3211.

a) $\underline{N'(t) = -0{,}02\, N(t)}$

b) $N(t) = 47\,000\, e^{-0.02t}$

$N(10) = 47\,000 \cdot e^{-0{,}2} \approx \underline{38\,000}$

3212 Lufttrycket y kPa avtar med höjden x km över havet. Förändringshastigheten av lufttrycket med avseende på höjden är proportionell mot det aktuella lufttrycket på samma höjd.

a) Ställ upp och lös den differentialekvation som beskriver lufttryckets förändring.

b) Bestäm proportionalitetskonstanten om lufttrycket är hälften så stort på höjden 5,5 km som det är vid havsytan.

3212. a) $y' = -ky \quad , k > 0$

$y = Ae^{-kx}$

b) $Ae^{-5,5k} = \frac{1}{2}A \implies k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-5,5} = 0,126$

3213 Bestäm den lösning till $y' = ky$ för vilken

a) $y(1) = 4$ och $y'(1) = 8$

b) $y(1) = 2$ och $y(2) = 3$

3213. a) $y = Ae^{kx}$

$y' = Ake^{kx}$

$y(1) = 4 \Rightarrow \quad Ae^{k} = 4$

$y'(1) = 8 \Rightarrow \quad \div \; Ake^{k} = 8$

$k = 2 \Rightarrow A = 4e^{-2}$

$$\underline{y = 4e^{2x-2}}$$

b)

$y(1) = 2 \Rightarrow \quad Ae^{k} = 2$

$y(2) = 3 \Rightarrow \quad \div \; Ae^{2k} = 3$

$e^{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \ln\frac{3}{2}, \quad A = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3}e^{x \cdot \ln\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\left(e^{\ln\frac{3}{2}}\right)^{x}$

$$\underline{y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x}}$$

3214 I 1,0 gram kol i levande materia finns i genomsnitt $6{,}5 \cdot 10^{10}$ atomer av den radioaktiva isotopen kol-14. När en organism dör tillförs inga fler kol-14-atomer. Mängden kol-14-atomer minskar då med en hastighet som antas vara proportionell mot antalet atomer som finns kvar.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.

b) Bestäm differentialekvationens allmänna lösning, då halveringstiden för kol-14 är 5 700 år.

c) 1,0 gram kol från ett gammalt ben innehåller $1{,}8 \cdot 10^{10}$ atomer kol-14. Uppskatta benets ålder.

d) Anta att antalet atomer i c) är mätt med felmarginalen B10 %. Mellan vilka värden kan benets ålder ligga?

3214. a) $y' = -ky \quad , \; k > 0$

b) $y = Ae^{-kx}$

$e^{-5700k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-5700} = 0.0001216$

$y = Ae^{-0.0001216x}$

c) $6.5 \cdot 10^{10} \cdot e^{-0.0001216x} = 1.8 \cdot 10^{10}$

$x = \frac{\ln \frac{1.8}{6.5}}{-0.0001216} \approx 11000$ år

d) $f = \pm 5\%$

?

$10\,000 \leq x \leq 11\,000$

3215 Kokhett vatten i en viss termos svalnar med en hastighet som är proportionell mot vattnets aktuella temperatur. Vilken temperatur har vattnet efter 8 h om vattnet efter 4 h har temperaturen 60 °C?

3215.

$$T' = -kT \quad , k > 0$$

$$T = Ae^{-kt}$$

$T(0) = 100°C \Rightarrow T = 100e^{-kt}$

$T(4) = 60°C \Rightarrow 100e^{-4k} = 60 \Rightarrow k = \frac{\ln\frac{60}{100}}{-4} \approx 0{,}1277$

$$T(t) = 100e^{-0.1277t}$$

$$T(8) = 100e^{-0.1277 \cdot 8} \approx 36°C$$

3216 I en sälpopulation finns 120 individer. Populationens förändringshastighet $\frac{dS}{dt}$ är differensen av antalet födslar F och antalet dödsfall D.

$$\frac{dS}{dt} = F - D$$

Anta att både antalet födslar och antalet dödsfall är proportionella mot antalet individer i populationen och att det varje år föds 5 procentenheter färre sälar än det dör. Efter hur lång tid kommer sälpopulationen att ha halverats?

3216.

$$S' = -0{,}05 \cdot S$$

$$S = 120e^{-0{,}05t}$$

$$e^{-0{,}05t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}05} \approx 14 \text{ år}$$

3217 Utseendet hos lösningskurvorna till differentialekvationen $y' + ay = 0$ beror av eventuella begynnelsevillkor och värdet av konstanten a.

a) Beskriv utseendet hos lösningskurvorna när $y(0) > 0$ och $a > 0$.

b) Beskriv utseendet hos lösningskurvorna när $y(0) > 0$ och $a < 0$.

c) Formulera en hypotes om hur lösningskurvorna kommer att se ut om $y(0) < 0$. Undersök sedan om din hypotes kan vara korrekt genom att lösa differentialekvationen för några specialfall.

3217.

a) Exponentiellt avtagande med positivt startvärde

b) — " — växande — " —

c) Spegling av ovanstående.

3218 Den så kallade Kermack-McKendrick modellen beskriver antalet infekterade människor vid spridningen av en smittsam sjukdom i en begränsad population. Modellen bestäms av differentialekvationerna

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI \qquad (3)$$

där $S(t)$ är det antal som är mottagliga för sjukdomen (susceptible), $I(t)$ är det antal som är infekterade och kan föra sjukdomen vidare (infected), $R(t)$ är de tillfrisknade eller avlidna (removed) medan a och r är konstanter.

a) Tolka differentialekvationerna (1), (2) och (3) med ord.

b) Förklara vad summan $S + I + R$ motsvarar.

3218.

a) (1) Minskningen av S är proportionell mot $S \cdot I$

(2) ökningen av I är proportionell mot $S \cdot I$ och I

(3) ökningen av R är proportionell mot I

b) $S+I+R$ motsvarar hela populationen.

3225 Hastigheten v m/s hos en sten, som kastas rakt nedåt från ett torn, beskrivs av differentialekvationen $v' + 0{,}5v = 9{,}82$ och $v(0) = 3$ m/s. Bestäm stenens hastighet efter 1,0 s.

3225. $v' + 0{,}5v = 9{,}82$

$$v_h = Ae^{-0{,}5t}$$

Ansats: $v_p = a$, $v_p' = 0$ =>

$$0{,}5\,v_p = 9{,}82 \Rightarrow v_p = 19{,}64$$

$$v = Ae^{-0{,}5t} + 19{,}64$$

$v(0) = 3$ => $A + 19{,}64 = 3$ => $A = -16{,}64$

$$v(t) = -16{,}64e^{-0{,}5t} + 19{,}64$$

$$v(1{,}0) = -16{,}64e^{-0{,}5} + 19{,}64 \approx 9{,}5 \text{ m/s}$$

1 f(x) := SolveODE(y' + 0.5 y = 9.82, (0, 3))

$\rightarrow$ $f(x) := \frac{-416}{25} e^{\frac{-1}{2}x} + \frac{491}{25}$

2 f(1)

$\approx$ 9.5473

3226 Elisabeth och Atle har fått i uppgift att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen

$y' + 11y = 11x^2 + 3$

Atle säger att han helst vill ansätta $y_p = ax^2 + b$, eftersom den ansatsen liknar högerledet i ekvationen. Elisabeth påstår att Atles ansats inte leder till önskat resultat och vill i stället ansätta $y_p = ax^2 + bx + c$.

Vem har rätt? Motivera ditt svar.

3226. Elisabeth har rätt.

Derivering ger en förstagradsterm som inte får någon motsvarighet i Atles ansats.

3227 Bestäm den lösning till $y' - 2y = 6x^2 - 5$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$.

3227. $y' - 2y = 6x^2 - 5$

$y_h = Ae^{-2t}$

Ansats: $y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b$

$2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 5 \Rightarrow$

$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$

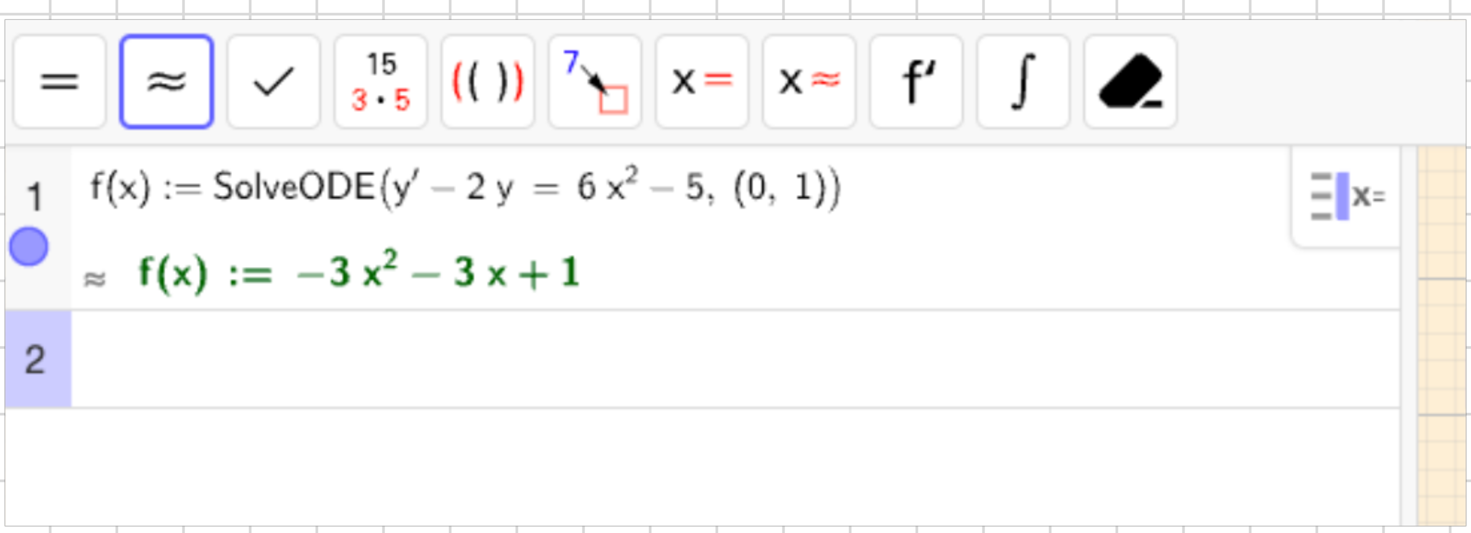
$2a - 2b = 0 \Rightarrow b = -3$

$b - 2c = -5 \Rightarrow c = \frac{-3+5}{2} = 1$

$y = Ae^{-2t} - 3x^2 - 3x + 1$

$y(0) = 1 \Rightarrow \quad A + 1 = 1 \Rightarrow A = 0$

$$\underline{y = -3x^2 - 3x + 1}$$



3228 Maja har gräddat en sockerkaka. Temperaturen i ugnen var 200 °C och temperaturen i rummet är 21 °C. När Maja tar ut kakan ur ugnen beräknas den svalna enligt Newtons avsvalningslag

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

där T °C är kakans temperatur efter t min och T_0 °C är temperaturen i rummet.

a) Bestäm k om kakans temperatur är 150 °C efter 5 minuter.

b) Efter hur lång tid är kakans temperatur 50 °C?

3228. a)

$$T' = k(T-21)$$

$$T' - kT = -21k$$

$$T_h = Ae^{kt}$$

Ansats: $T_p = a\ ,\ T_p' = 0$

$$-ak = -21k \Rightarrow a = 21$$

$$T = Ae^{kt} + 21$$

$T(0) = 200 \Rightarrow A + 21 = 200 \Rightarrow A = 179$

$T(5) = 150 \Rightarrow 179e^{5k} + 21 = 150 \Rightarrow k = \dfrac{\ln \frac{150-21}{179}}{5} \approx -0{,}0655$

b)

$$179e^{-0{,}0655t} + 21 = 50$$

$$t = \frac{\ln \frac{50-21}{179}}{-0.0655} \approx 28 \text{ min}$$

1 f(x, k) := SolveODE(y′ = k (y − 21), (0, 200))

≈ $f(x, k) := 179\ e^{kx} + 21$

2 Solve(f(5, k) = 150, k)

≈ {k = −0.0655}

3 Solve(f(t, −0.0655) = 50, t)

≈ {t = 27.7876}

3229 Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} + 7y = \sin t + \cos t$$

3229. $y' + 7y = \sin t + \cos t$

Ansats: $y_p = A\sin t + B\cos t$

$y_p' = A\cos t - B\sin t$

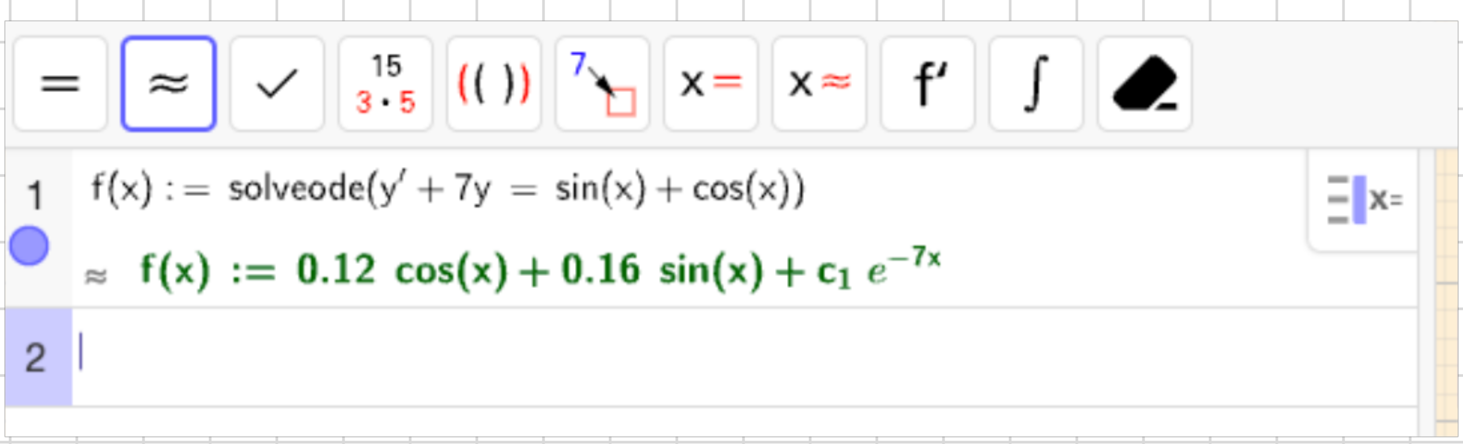
$$A\cos t - B\sin t + 7(A\sin t + B\cos t) = \sin t + \cos t$$

$$\begin{cases} 7A - B = 1 \\ A + 7B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7A - B = 1 \\ 7A + 49B = 7 \end{cases} \quad (-)$$

$$50B = 6 \Rightarrow B = \frac{3}{25}, \quad A = \frac{1 + \frac{3}{25}}{7} = \frac{28}{175}$$

$$y_p = \frac{28}{175}\sin t + \frac{21}{175}\cos t = \underline{0.16\sin t + 0.12\cos t}$$



3230 Kan det finnas något tal k, så att $y = x^2 + 1 + Ce^{-x}$ satisfierar differentialekvationen $y' + ky = x^2$? Motivera ditt svar.

3230. $y_h = Ce^{-x} \Rightarrow k = 1$

$y_p = x^2 + 1$

$y'_p = 2x$

Kontroll om $y'_p + y = x^2$:

$VL = 2x + x^2 + 1 \neq x^2 \Rightarrow$ Nej, det finns ej.

3231 Visa att summan av lösningen till den homogena ekvationen och partikulärlösningen, dvs. $y = y_h + y_p$, är en lösning till differentialekvationen $y' + ay = f(x)$.

3231. $y = y_h + y_p \Rightarrow y' = y'_h + y'_p$

$VL = y'_h + y'_p + a(y_h + y_p) = y'_h + ay_h + y'_p + ay_p$

Då y_h har formen $Ae^{-ax} \Rightarrow y'_h = -Aae^{-ax}$

$\Rightarrow y'_h + ay_h = 0 \Rightarrow$

$VL = 0 + y'_p + ay_p = f(x)$ #

3235 Lös differentialekvationen

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y}$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 4$

b) $e^y \cdot y' - 3x = 0$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 2$

c) $\frac{dy}{dt} = \sin t \cdot \frac{1}{y}$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$

3235.

a) $y' = \frac{x^3}{y} \iff y'y = x^3 \Rightarrow \int y'y\,dx = \int x^3\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + c \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x^4}{2} + c}$

$y(0) = 4 \Rightarrow \sqrt{c} = 4 \Rightarrow \underline{y = \sqrt{\frac{x^4}{2} + 16}}$

b) $e^y \cdot y' - 3x = 0 \iff e^y y' = 3x$

$\int e^y y'\,dx = \int 3x\,dx$

$e^y = \frac{3x^2}{2} + c \Rightarrow y = \ln\left(\frac{3x^2}{2} + c\right)$

$y(0) = 2 \Rightarrow \ln c = 2 \Rightarrow \underline{y = \ln\left(\frac{3x}{2} + e^2\right)}$

c) $y' = \sin t \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow y'y = \sin t \Rightarrow \int y'y\,dt = \int \sin t\,dt$

$\frac{y^2}{2} = -\cos t + c \Rightarrow y = \sqrt{c - 2\cos t}$

$y(0) = 1 \Rightarrow \sqrt{c - 2} = 1 \Rightarrow \underline{y = \sqrt{3 - 2\cos t}}$

1	$f(x) = \text{SolveODE}\left(y' = \frac{x^3}{y}, (0, 4)\right)$	
	$\approx \left(f(x) = y, f(x) = 0.7071 \sqrt{x^4 + 32}\right)$	
2	$g(x) := \text{SolveODE}(e^y y' - 3x = 0, (0, 2))$	
	$\approx g(x) := \ln(1.5x^2 + 7.3891)$	
3	$h(x) := \text{SolveODE}\left(y' = \frac{\sin(x)}{y}, (0, 1)\right)$	
	$\approx h(x) := \sqrt{-2\cos(x) + 3}$	
4		

3236 Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' \cdot \frac{1}{y} = 0$.

3236.

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int 0 \, dx$$

$$\ln y = c_1 \Rightarrow y = e^{c_1} \Rightarrow \underline{y = C}$$

3237 För att en differentialekvation ska vara separabel måste den kunna skrivas i formen $g(y) \cdot y' = f(x)$. Ge ett exempel på en separabel differentialekvation och ett exempel på en differentialekvation som inte är separabel.

3237. Separabel: $y' - \frac{x}{y} = 0$

Ej separabel: $y' - y = x^2$

3238 I tidigare avsnitt har vi löst differentialekvationer i formen $y' = f(x)$. Sixten påstår att alla sådana differentialekvationer är separabla. Har han rätt eller fel? Motivera ditt svar.

3238. Ja, han har rätt.

$$y' = f(x) \Leftrightarrow g(y) \cdot y' = f(x), \quad g(y) = 1$$

3239 Lös differentialekvationen $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$ med begynnelsevillkoret $r(1) = 2$.

3239.

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{d\theta}{\theta} \Leftrightarrow \int \frac{dr}{r^2} = \int \frac{d\theta}{\theta}$$

$$-\frac{1}{r} = \ln\theta - C \Rightarrow r = \frac{1}{C - \ln\theta}$$

$$r(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{C - 0} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln\theta}$$

3240 Vilken eller vilka av differentialekvationerna A–D är separabla?

A $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$ **B** $\frac{dy}{dx} = f(y) + g(x)$

C $\frac{dx}{dt} f(x) = g(t)$ **D** $\frac{dr}{dt} = \frac{f(r)}{g(t)}$

3240. A, C, D

3241 Om man placerar en varm kropp i en kallare omgivning med temperaturen T_{omg}, så kan den varma kroppens temperatur som funktion av tiden bestämmas med hjälp av Newtons avsvalningslag. Enligt Newtons avsvalningslag är temperaturens förändringshastighet proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_{omg}$.

a) Teckna en differentialekvation som beskriver Newtons avsvalningslag.

b) Utgå från att $T_{omg} = 20$ °C och $T(0) = 90$ °C och lös differentialekvationen med metoden att separera variablerna.

c) Finns det något annat sätt att lösa differentialekvationen? Motivera ditt svar.

3241. a) $T' = k(T - T_{omg})$, $k < 0$

b) $T' = k\,\Delta T$

$\frac{T'}{\Delta T} = k \iff \int \frac{T'}{\Delta T}\,dt = \int k\,dt$

$\ln \Delta T = kt + c$

$\Delta T = T - T_{omg} = e^{kt+c}$

$T = e^{kt+c} + 20$

$T(0) = 90 \Rightarrow e^{c} + 20 = 90 \Rightarrow c = \ln 70$

$T = e^{kt+\ln 70} + 20 = 70e^{kt} + 20$

c) Som $T' - kT = -kT_{omg}$

3242 Betrakta differentialekvationen $\frac{y'}{\cos t} = y^2 + 1$.

a) Skriv differentialekvationen i formen $g(y) \cdot y' = f(t)$.

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
Ledning: $D(\arctan x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

3242.

a) $$\frac{1}{y^2+1} \cdot y' = \cos t \quad \Longleftrightarrow$$

b) $$\int \frac{y'}{y^2+1}\,dt = \int \cos t\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\arctan y = \sin t + c \quad \Rightarrow$$

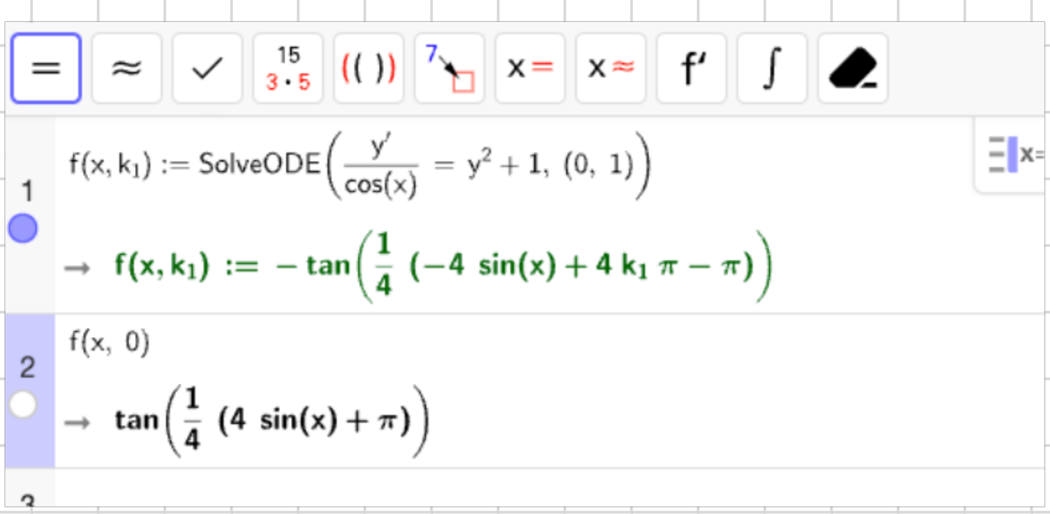
$$y = \tan(\sin t + c)$$

c) $$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan(0 + c) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$c = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$y = \tan\left(\sin t + \frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(\sin t + \frac{\pi}{4}\right)$$



3243 Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = xy - y - 2x + 2$ som skär y-axeln vid $y = 4$.

3243. $y' = y(x-1) - 2(x-1) = (y-2)(x-1)$

$$\frac{y'}{y-2} = x - 1 \iff \int \frac{y'}{y-2}\,dx = \int (x-1)\,dx$$

$$\ln(y-2) = \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$y(x) = 2 + e^{\frac{x^2}{2} - x + C}$$

$y(0) = 4 \Rightarrow \quad 2 + e^{0+C} = 4 \Rightarrow C = \ln 2$

$$\underline{y(x) = 2 + 2e^{\frac{x^2}{2} - x}}$$

1 f(x) := solveode(y' = x · y − y − 2x + 2, (0, 4))

→ $f(x) := 2\,e^{\frac{1}{2}(x^2-2x)} + 2$

2

3248 I ett radioaktivt preparat sönderfaller kärnorna med en hastighet som är proportionell mot den aktuella mängden radioaktiva kärnor. Proportionalitetskonstanten kallas för sönderfallskonstanten och brukar betecknas λ. Sönderfallskonstanten är en positiv konstant som har olika värden för olika ämnen.

a) Teckna en differentialekvation som beskriver situationen här ovanför. Använd λ som beteckning för den positiva sönderfallskonstanten.

b) Efter en halveringstid återstår hälften av de radioaktiva kärnorna i preparatet. För kol-14 är halveringstiden ca 5 730 år. Bestäm sönderfallskonstanten för kol-14.

c) Visa att sönderfallskonstanten generellt kan skrivas $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, där $T_{1/2}$ är halveringstiden för det radioaktiva preparatet.

3248.

a) $\underline{N' = -\lambda N \quad , \quad \lambda > 0}$

c) $N = Ae^{-\lambda t}$

$$e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{T_{1/2}} = \frac{\ln (\frac{1}{2})^{-1}}{T_{1/2}} = \underline{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}}$$

b) $T_{1/2} = 5730 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx \underline{1{,}21 \cdot 10^{-4}}$

3249 Tänk dig att man släpper ut 40 sorkar på en ö där det från början inte finns några sorkar. Beteckna antalet sorkar efter *t* månader med $N(t)$.

a) Anta att sorkpopulationens tillväxthastighet är proportionell mot det aktuella antalet sorkar med proportionalitetskonstanten 0,025. Ange den differentialekvation, inklusive lämpligt begynnelsevillkor, som beskriver sorkpopulationen.

b) Hur många sorkar finns det på ön enligt denna modell efter 3 år?

c) Kan modellen vara en rimlig beskrivning av sorkpopulationens storlek under en längre tidsperiod? Motivera ditt svar.

Till följd av begränsad tillgång till föda och utrymme kan en populations storlek inte bli hur stor som helst. En modell som tar hänsyn till det är den logistiska tillväxtmodellen

$\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$, där M är det värde som populationen närmar sig över tid, den så kallade bärkraften.

d) Ange den differentialekvation som beskriver sorkpopulationens tillväxt om maximalt 700 sorkar kan livnära sig på ön. Använd proportionalitetskonstanten $k = \frac{0{,}025}{700}$.

e) Använd ett digitalt verktyg och bestäm hur många sorkar det finns på ön när tillväxthastigheten är som störst.

3249.

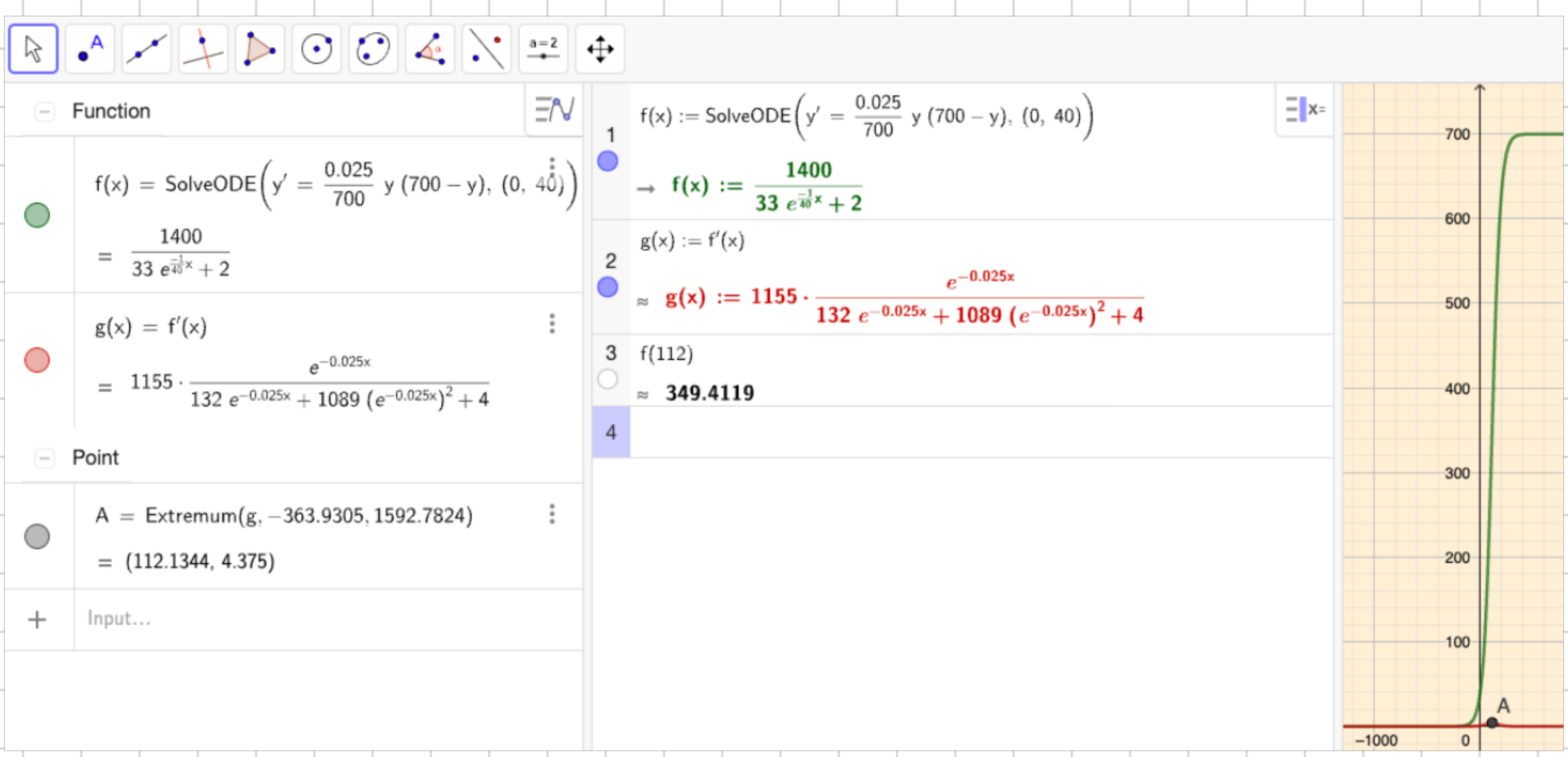
a) $N' = 0.025N \quad , \quad N(0) = 40$

b) $N = 40e^{0.025 \cdot 36} \approx 98 \text{ st}$

c) Förr eller senare bör kurvan plana ut.

d) $N' = \frac{0.025}{700} \cdot N(700 - N)$

e) N'_{max} infaller då $N = 0.5 N_{max} = 350$ st



3250 Vid en fabrik tillverkas jäst i en tank, och omständigheterna är sådana att mängden jäst har en tillväxthastighet som är proportionell mot jästens massa y kg, med proportionalitetskonstanten 0,003 min^{-1}. När processen startar finns 200 kg jäst i tanken.

a) Teckna en differentialekvation som beskriver jästens tillväxthastighet.

b) Hur mycket jäst bör det enligt modellen finnas i tanken efter fem timmar?

c) Vid produktionen tar man ut ett konstant flöde av jästmassan. Teckna en differentialekvation som beskriver jästmassans förändring när man tar ut a kg jäst per minut ur tanken.

d) Hur mycket jäst kan tappas ut per minut om jästmassan i tanken hela tiden skall vara 200 kg?

(Np MaE ht 1997)

3250.

a) $y' = 0{,}003y \quad , \quad y(0) = 200$

b) $y(t) = 200e^{0{,}003t}$

$y(5 \cdot 60) = 200e^{0{,}003 \cdot 300} \approx 490 \text{ kg}$

c) $y' = 0{,}003y - a$

d)

$y' - 0{,}003y = -a$

$y_h = Ae^{0{,}003t}$

$y_p = q \quad , \quad y_p' = 0$

$-0{,}003q = -a \Rightarrow q = \dfrac{a}{0{,}003}$

$y(0) = 200 \Rightarrow \quad A + \dfrac{a}{0{,}003} = 200 \Rightarrow A = 200 - \dfrac{a}{0{,}003}$

$y = \left(200 - \dfrac{a}{0{,}003}\right)e^{0{,}003t} + \dfrac{a}{0{,}003}$

$\dfrac{a}{0{,}003} = 200 \Rightarrow a = 0{,}6 \text{ kg}$

3251 Enligt Newtons avsvalningslag är avsvalningshastigheten för en vätska proportionell mot temperaturskillnaden mellan vätskan och omgivningen. Kaffe som hälls upp i en kopp har från början temperaturen 80 °C. Fem minuter senare har temperaturen sjunkit till 66 °C. Vilken temperatur har kaffet efter 20 minuter om vi antar att kaffet är placerat i ett rum med temperaturen 20 °C?

3251. $T' = -k(T-20)$, $T(0)=80$, $k>0$

$$T_h = Ae^{-kt}$$

$$T_p = a \, , \; T_p' = 0$$

$$-ka + 20k = 0 \implies a = 20$$

$$T = Ae^{-kt} + 20$$

$$T(0) = 80 \implies A + 20 = 80 \implies A = 60$$

$$T(5) = 66 \implies 60e^{-5k} + 20 = 66 \implies k = \frac{\ln \frac{66-20}{60}}{-5} \approx 5{,}31 \cdot 10^{-2}$$

$$T(t) = 60e^{-0{,}0531t} + 20$$

$$T(20) = 60e^{-0{,}0531 \cdot 20} + 20 \approx 41\,°C$$

1 f(x, k) := SolveODE(y′ = k (y − 20), (0, 80))

→ $f(x,k) := 60\,e^{kx} + 20$

2 Solve(f(5, k) = 66, k)

≈ {k = −0.0531}

3 f(20, −0.0531)

≈ 40.7458

3252 I en elektrisk krets urladdas en kondensator genom en resistor. Laddningen förändras enligt differentialekvationen

$$R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

där q är kondensatorns laddning i coulomb vid tiden t sekunder och C dess kapacitans i farad. R ohm är resistorns resistans.

a) Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoret $q(0) = Q$.

b) Hur lång tid tar det innan laddningen sjunkit till hälften om $R = 10\ \text{k}\Omega$ och $C = 0{,}5\ \text{nF}$?

3252. a)

$$q' + \frac{1}{RC} \cdot q = 0$$

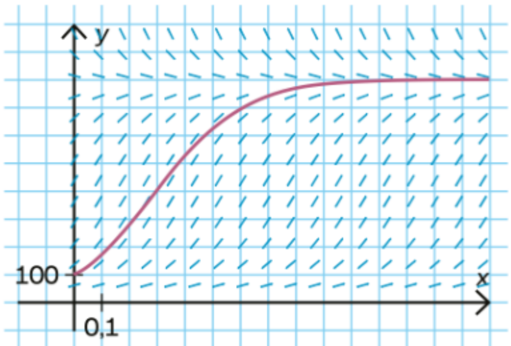
$$\underline{q = Q e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}}$$

b)

$$e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = RC \cdot \ln 2$$

$$t = 10 \cdot 10^{3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9} \cdot \ln 2 \approx \underline{3.5\ \mu s}$$

3253 En population kaniner har observerats under en längre tid. Populationens utveckling beskrivs av differentialekvationen
$y' = 0{,}008y(800 - y)$, där y är antalet kaniner x år efter observationens början.
Nedan ser du riktningsfältet till differentialekvationen och en lösningskurva.



a) Ange ett begynnelsevillkor som ger den inritade lösningskurvan.

b) Använd differentialekvationen, $y' = 0{,}008y(800 - y)$, för att bestämma hur stor populationen är då tillväxthastigheten är som störst.

c) I diagrammet syns det att populationens storlek stabiliseras med tiden. Förklara detta med hjälp av differentialekvationen.

d) Skissa lösningskurvan om det i stället fanns 300 kaniner från början.

(Provbanksprov Ma5 vt 2014)

3253. a) $y(0) = 100$

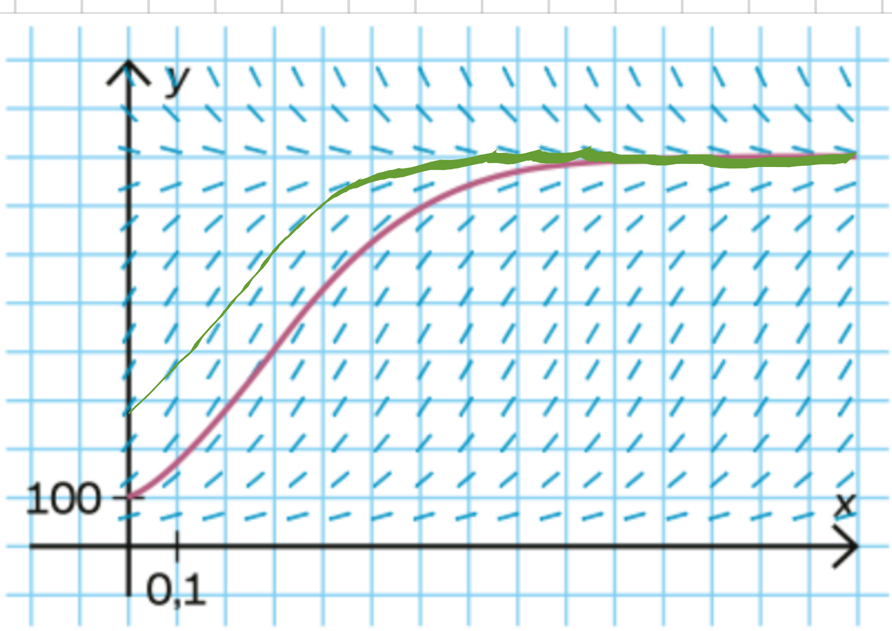
b) $y' = 6.4y - 0.008y^2$

$y'' = 6.4 - 0.016y$

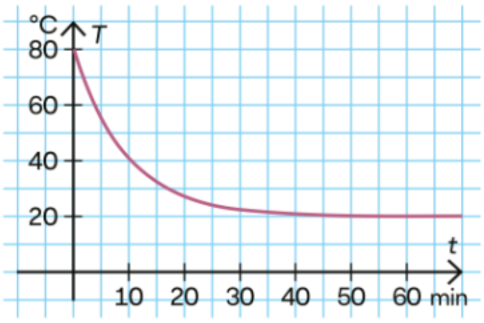
$y'' = 0 \Rightarrow y = \dfrac{6.4}{0.016} = 400$

c) Då $y \to 800 \Rightarrow y' \to 0$ och y stabiliseras.

d)



3254 Roger häller upp kaffe från sin termos. Enligt Newtons avsvalningslag kommer kaffets temperatur T °C att minska med en hastighet som är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kaffet och omgivningen. Omgivningens temperatur är K °C. Diagrammet här nedanför visar hur kaffet svalnar.



Teckna en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver temperaturens förändringshastighet $\frac{dT}{dt}$ vid tiden t minuter. Bestäm konstanterna i differentialekvationen med hjälp av diagrammet.

3254.

$$T = -q(T-K), \quad T(0) = 80, \quad q > 0$$

$$T' + qT = qK$$

$$T_h = Ae^{-qt}$$

Ansatz: $T_p = a$, $T_p' = 0 \Rightarrow$

$$qa = q \cdot K \Rightarrow a = K$$

$$T = T_h + T_p = Ae^{-qt} + K$$

$$T(0) = 80 \Rightarrow A + K = 80 \Rightarrow A = 80 - K$$

$$T(10) = 40 \Rightarrow (80-K)e^{-10q} + K = 40$$

$$K = 20 \Rightarrow q = \frac{\ln \frac{40-20}{80-20}}{-10} = \frac{\ln \frac{1}{3}}{-10} = \frac{\ln 3}{10} \approx 0{,}11$$

$$\underline{T = 60e^{-0{,}11t} + 20}$$

3255 Kalle är inblandad i en arbetsplatsolycka där han råkar inandas skadliga ångor från ett kemiskt preparat. Det dröjer ganska länge innan Kalle uppsöker ett sjukhus och inte förrän 20 timmar efter olyckan tas ett blodprov. Analysen visar att blodet innehåller 0,00372 mg/ml av det gift som han inandats. Efter ytterligare 8 timmar tas ett nytt blodprov och då har koncentrationen gift i blodet sjunkit till 0,00219 mg/ml.

Låt oss anta att förändringshastigheten för giftkoncentrationen är proportionell mot koncentrationen och låt y mg/ml vara koncentrationen av gift i blodet t timmar efter det första blodprovet.

Läkaren vill ge medicinsk behandling om giftkoncentrationen vid något tillfälle varit större än 0,017 mg/ml. Finns det enligt modellen någon risk för att giftkoncentrationen i Kalles blod varit så hög?

(Np MaE vt 1999)

3255.

$$y' = -ky \quad , \quad k > 0$$

$$y = Ae^{-kt}$$

$$y(20) = 0.00372 \Rightarrow Ae^{-20k} = 0,00372$$

$$y(28) = 0.00219 \Rightarrow \div \; Ae^{-28k} = 0,00219$$

$$e^{8k} = 1,6986 \Rightarrow k = 0,06623$$

$$y(20) = 0,00372 \Rightarrow A = 0,00372\, e^{20 \cdot 0,06623} \approx 0,0140$$

$$y = 0,0140\, e^{-0,06623t}$$

Nej, det högsta värdet var 0,014 mg/ml.

3261 En lösningskurva till $y' = \sqrt{y} - x$ går genom punkten (1, 4). Uppskatta värdet av $y(3)$ med hjälp av Eulers stegmetod och steglängden

a) $h = 1$ b) $h = 0{,}5$

3261

$y'(1) = \sqrt{4} - 1 = 1$

a) $y(2) = 4 + y'(1) \cdot h = 4 + 1 \cdot 1 = 5$

$y'(2) = \sqrt{5} - 2$

$y(3) = 5 + y'(2) \cdot h = 5 + \sqrt{5} - 2 = 3 + \sqrt{5} \approx \underline{5{,}24}$

b) $y(1{,}5) = 4 + y'(1) \cdot h = 4 + 1 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$

$y'(1{,}5) = \sqrt{4{,}5} - 1{,}5 = 0{,}6213$

$y(2) = 4{,}5 + y'(1{,}5) \cdot h = 4{,}5 + 0{,}6213 \cdot 0{,}5 = 4{,}8107$

$y'(2) = \sqrt{4.8107} - 2 = 0{,}1933$

$y(2{,}5) = 4{,}8107 + y'(2) \cdot h = 4{,}8107 + 0{,}1933 \cdot 0{,}5 = 4{,}9074$

$y'(2{,}5) = \sqrt{4.9074} - 2{,}5 = -0{,}2847$

$y(3) = 4{,}9074 + y'(2{,}5) \cdot h = 4{,}9074 - 0{,}2847 \cdot 0{,}5 = \underline{4{,}76}$

3262 Differentialekvationen $y' = x(2 - y)$ har begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

a) Bestäm $y(3)$ för hand med Eulers stegmetod. Använd steglängden 1.

b) Bestäm $y(3)$ med hjälp av en stegmetod på ditt digitala verktyg. Använd steglängden 0,1.

c) Lös differentialekvationen exakt med ditt digitala verktyg. Bestäm sedan $y(3)$ och jämför med resultaten i a) och b).

3262. a)

$y(0) = 0$

$y'(0) = 0 \cdot (2-0) = 0$

$y(1) = 0 + y'(0) \cdot 1 = 0$

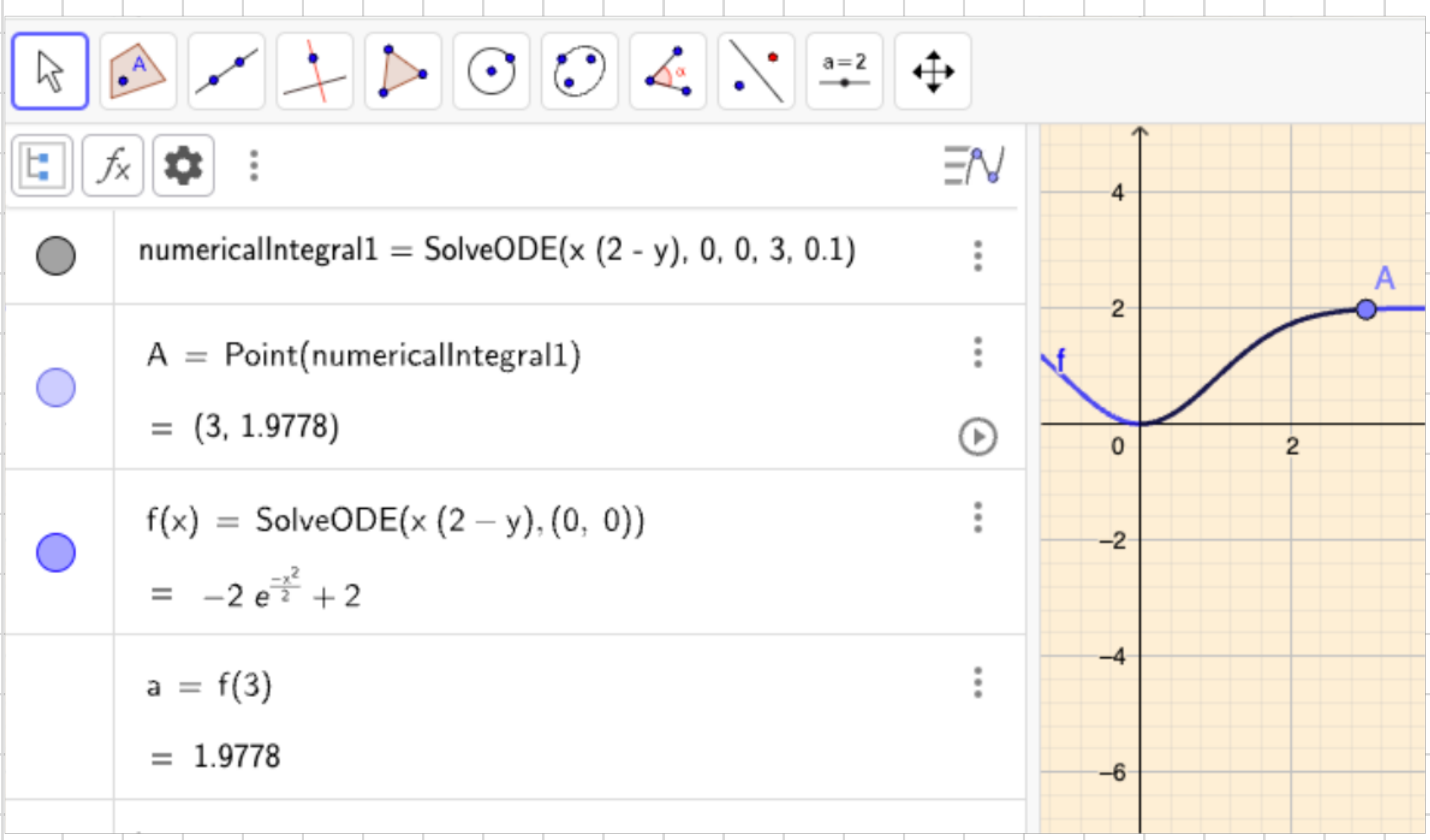
$y'(1) = 1 \cdot (2-0) = 2$

$y(2) = 0 + y'(1) \cdot h = 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$y'(2) = 2(2-2) = 0$

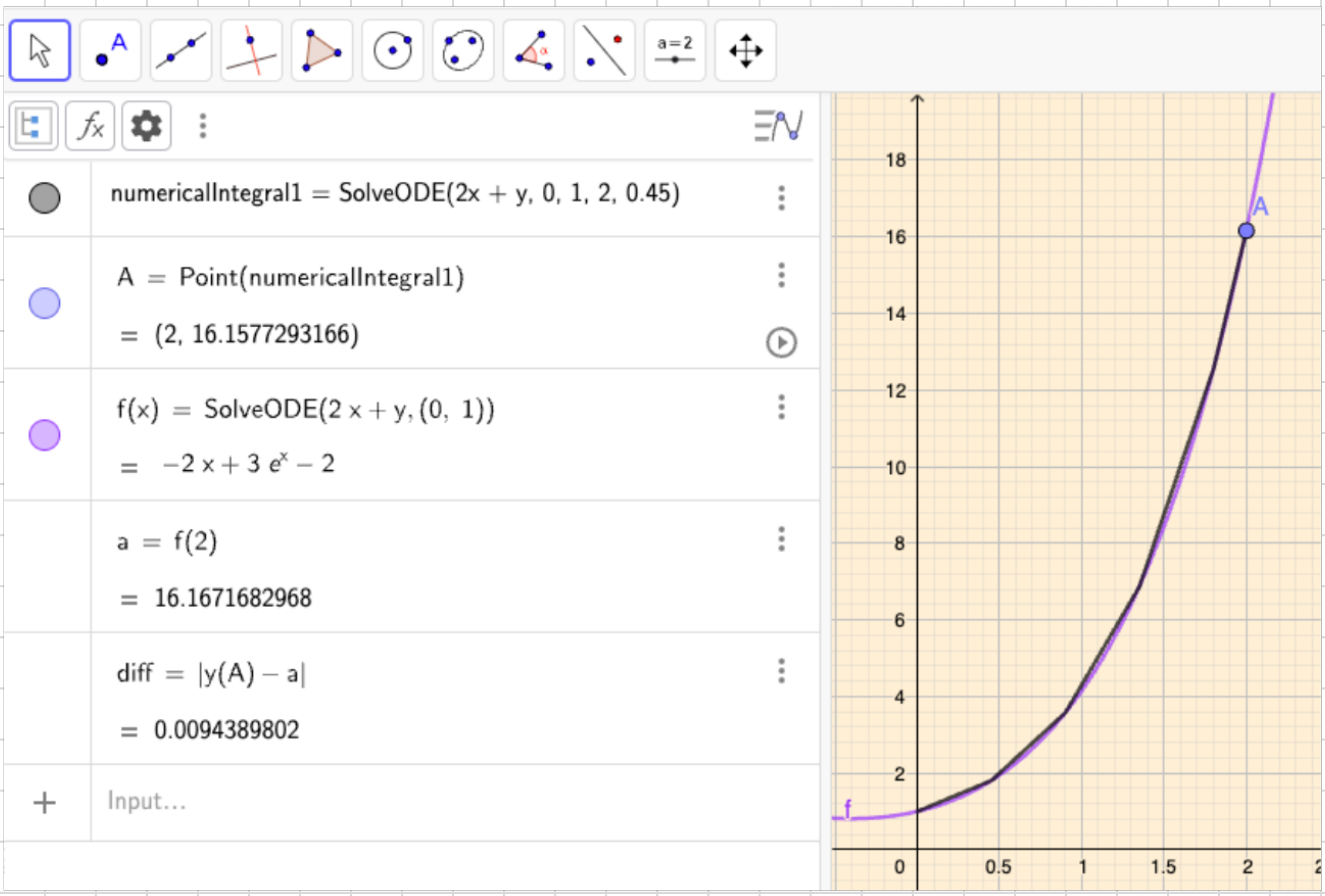
$y(3) = 2 + y'(2) \cdot h = 2 + 0 \cdot 1 = \underline{2}$

b + c)



3263 Differentialekvationen $y' - 2x - y = 0$ har tillsammans med begynnelsevillkoret (0, 1) den exakta lösningen $y = 3e^x - 2x - 2$. Lösningen kan också uppskattas med hjälp av en stegmetod. Undersök med ditt digitala verktyg vilken steglängd man bör använda för att skillnaden mellan de båda metodernas närmevärde till $y(2)$, ska bli mindre än 0,01 enheter.

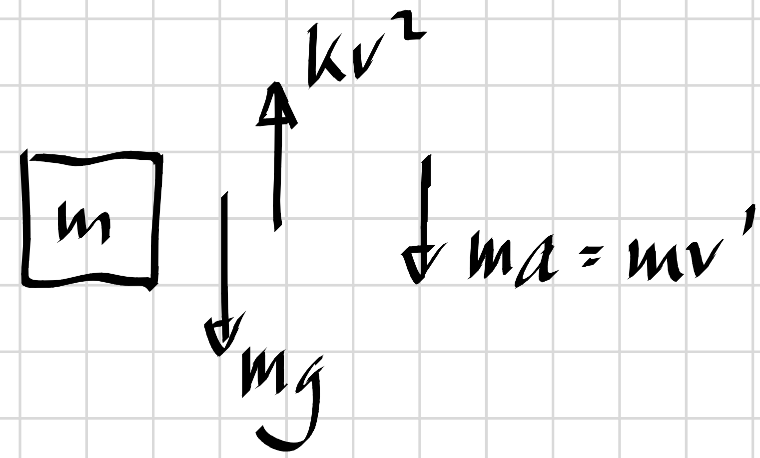
3263. Steglängd 0.45. Se nedan



3264 Anton tycker om att hoppa fallskärm. Tillsammans med skärmen väger han 78 kg. Då skärmen precis vecklats ut kan Antons fart v uppskattas till 35 m/s. Luftmotståndet antas vara proportionellt mot kvadraten på farten med proportionalitetskonstanten 14 kg/m.

a) Vid tiden t sekunder efter det att fallskärmen vecklats ut är farten v m/s. Ställ upp en differentialekvation som beskriver farten.

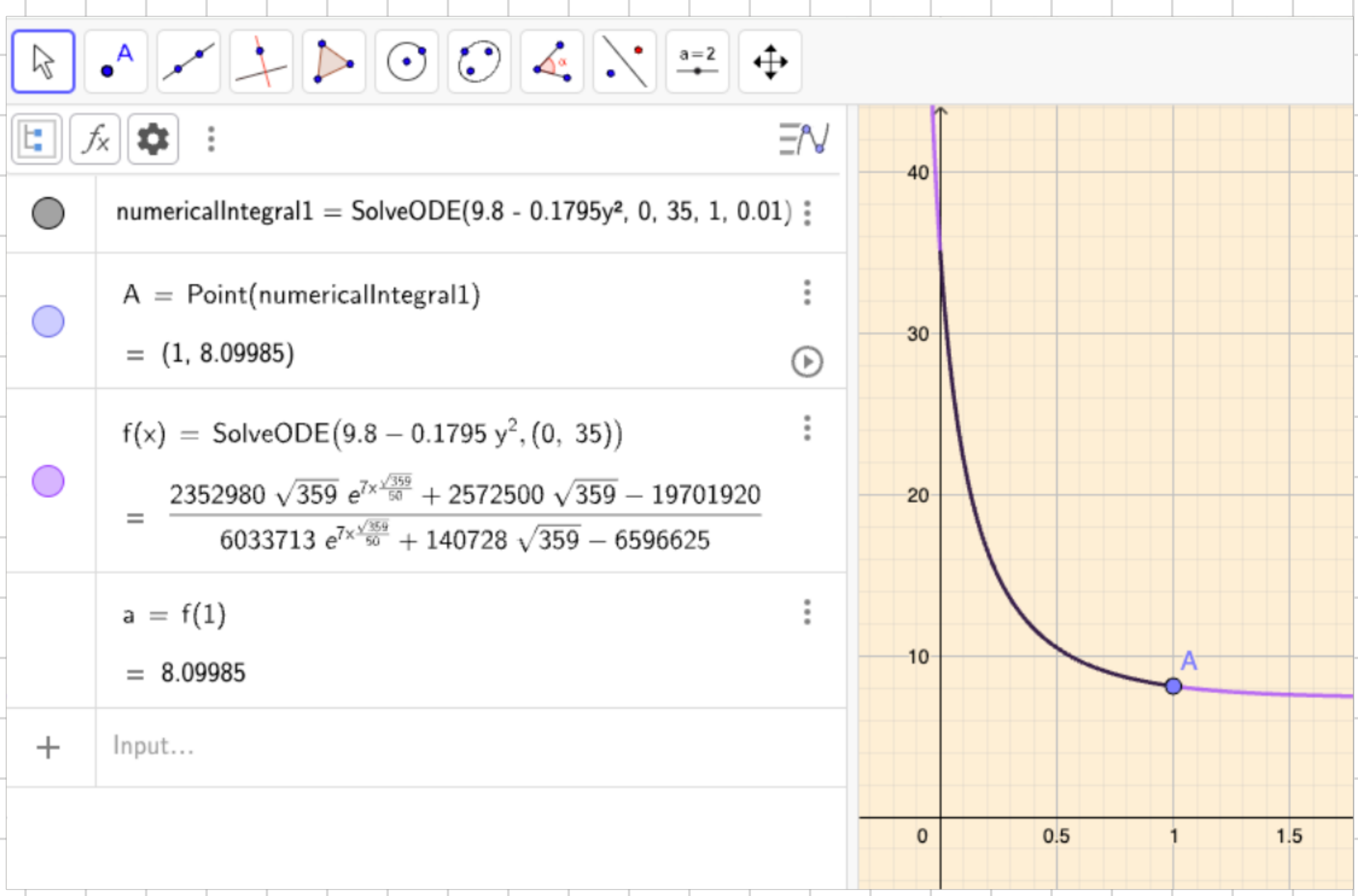
b) Bestäm med hjälp av en stegmetod Antons fart 1 sekund efter det att skärmen har vecklats ut.



3264. a) $\sum F_y$: $mv' = mg - kv^2$

$$v' = 9.8 - \frac{14}{78}v^2 \ , \quad v(0) = 35$$

b) $v(1) = 8.1$ m/s. Se nedan.



3309 Bestäm den lösning till

$5y'' - 5y' - 30y = 0$

som uppfyller $y(0) = -2$ och $y'(0) = -11$.

3309.

$$5r^2 - 5r - 30 = 0$$

$$5(r^2 - r - 6) = 0$$

$$5(r+2)(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = -2, \; r_2 = 3$$

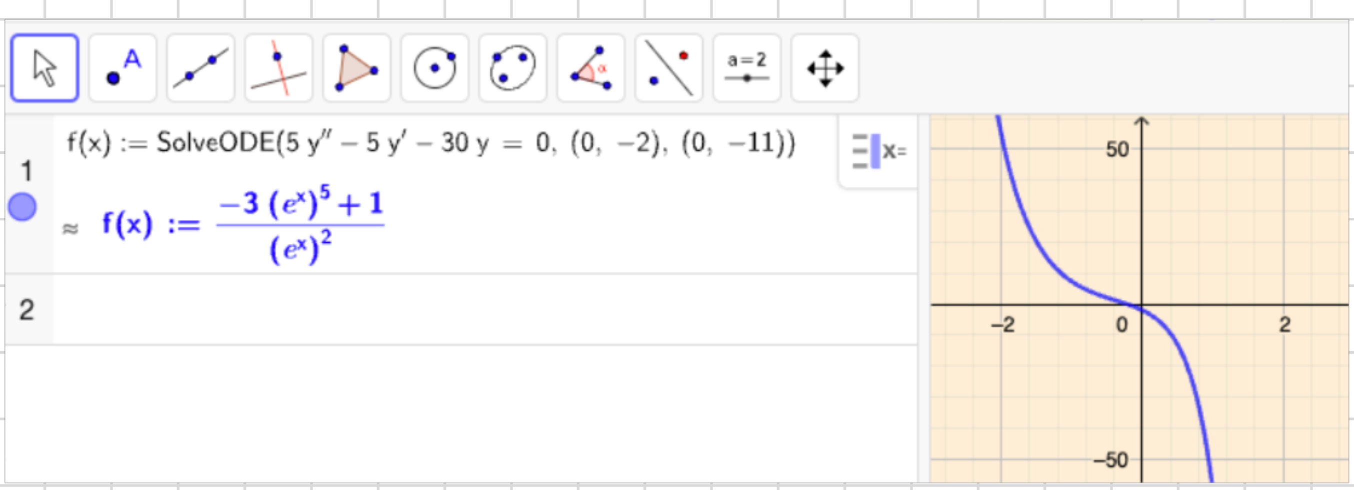
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$$

$$\begin{matrix} y(0) = -2 \Rightarrow \\ y'(0) = -11 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ -2C_1 + 3C_2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} 2C_1 + 2C_2 = -4 \\ + \quad -2C_1 + 3C_2 = -11 \\ \hline 5C_2 = -15 \end{array} \Rightarrow C_2 = -3, \; C_1 = 1$$

$$y = e^{-2x} - 3e^{3x}$$



3310 Bestäm den lösning till

$$3\frac{d^2y}{dt^2} = 6\frac{dy}{dt} + 105y$$

som skär y-axeln för $y = 1$ och vars tangent i den punkten har riktningskoefficienten 9.

3310.

$$3y'' - 6y' - 105y = 0$$

$$3r^2 - 6r - 105 = 0$$

$$3(r^2 - 2r - 35) = 0$$

$$r = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6 \Rightarrow r_1 = -5,\ r_2 = 7$$

$$y = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{7t}$$

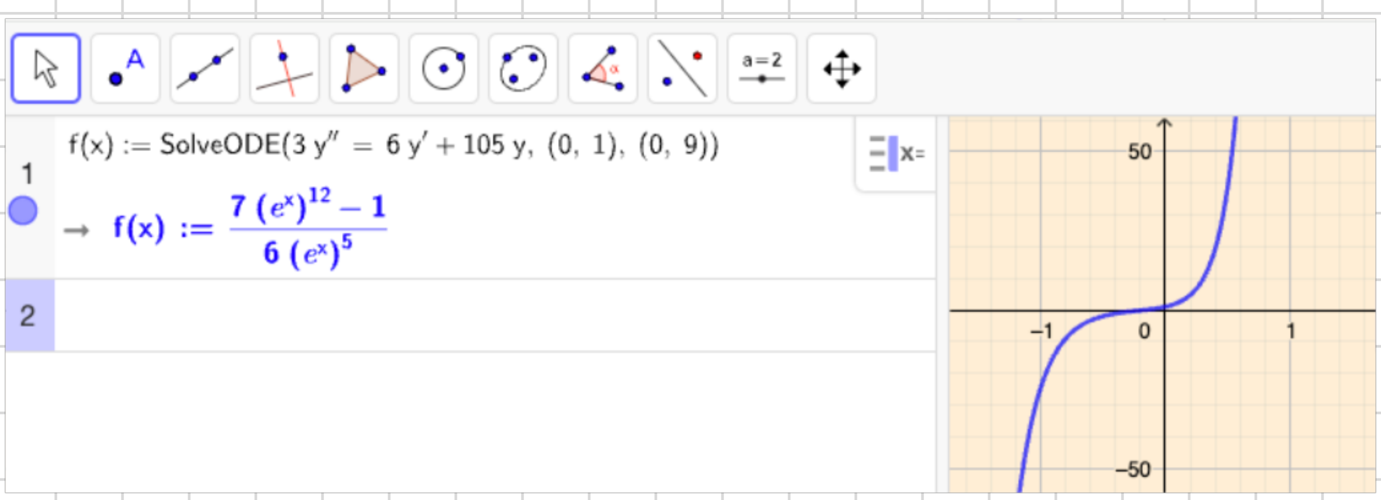
$$y' = -5C_1 e^{-5t} + 7C_2 e^{7t}$$

$$\begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -5C_1 + 7C_2 = 9 \end{cases}$$

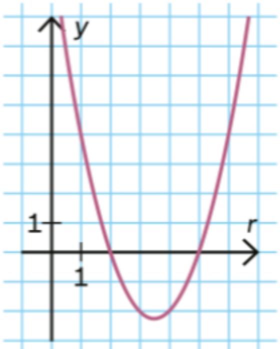
$$- \begin{cases} 7C_1 + 7C_2 = 7 \\ -5C_1 + 7C_2 = 9 \end{cases}$$

$$12C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{6},\ C_2 = \frac{7}{6}$$

$$\underline{y = \frac{7}{6}e^{7t} - \frac{1}{6}e^{-5t}}$$



3311 Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ kan skrivas i formen $f(r) = 0$. Bestäm differentialekvationens allmänna lösning med hjälp av figuren som visar grafen $y = f(r)$.



3311. $r_1 = 2$, $r_2 = 5$ $\Rightarrow$ $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$

3312 Visa att den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $ay'' + by' + cy = 0$ kan skrivas i formen $r^2 + pr + q = 0$.

3312. $$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$$

Ansats: $$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$
$$y' = r_1 C_1 e^{r_1 x} + r_2 C_2 e^{r_2 x}$$
$$y'' = r_1^2 C_1 e^{r_1 x} + r_2^2 C_2 e^{r_2 x}$$

Insatt i ekvationen:
$$r_1^2 C_1 e^{r_1 x} + r_2^2 C_2 e^{r_2 x} + \frac{b}{a} r_1 C_1 e^{r_1 x} + \frac{b}{a} r_2 C_2 e^{r_2 x} + \frac{c}{a} C_1 e^{r_1 x} + \frac{c}{a} C_2 e^{r_2 x} = 0$$

$$\left(r_1^2 + \frac{b}{a} r_1 + \frac{c}{a}\right) C_1 + \left(r_2^2 + \frac{b}{a} r_2 + \frac{c}{a}\right) C_2 = 0$$

$$C_1, C_2 \neq 0 \Rightarrow r_1^2 + \frac{b}{a} r_1 + \frac{c}{a} = 0,\quad r_2^2 + \frac{b}{a} r_2 + \frac{c}{a} = 0$$

$\Rightarrow$ r_1 och r_2 är rötter till ekv $r^2 + pr + q = 0$ #

3313 För vilket tal $k > 0$ har differentialekvationen $y'' + ky' - 15y = 0$ den allmänna lösningen $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-5x}$? Motivera ditt svar.

3313.

$$r^2 + kr - 15 = (r-3)(r+5)$$

$$r^2 + kr - 15 = r^2 + 2r - 15 \Rightarrow \underline{k = 2}$$

3314 Konstruera en differentialekvation med begynnelsevillkor som har lösningen $y = e^{-5x} + e^{8x}$.

3314.

$$(r+5)(r-8) = 0$$

$$r^2 - 3r - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$y'' - 3y' - 40y = 0$$

Begynnelsevillkor:

$$y(0) = 1 + 1 = 2$$

$$y'(0) = -5 + 8 = 3$$

$$\underline{y'' - 3y' - 40y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3}$$

3315 Lösningen till en viss differentialekvation av andra ordningen ges av

$y = 3e^{r_1 x} - 3e^{r_2 x}$

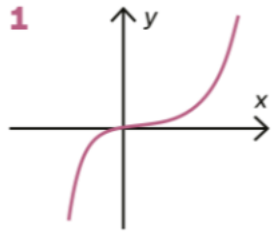
där r_1 och r_2 är rötterna till differentialekvationens karakteristiska ekvation. Lösningskurvans utseende kommer att bero på värdet av rötterna r_1 och r_2. Para ihop varje graf 1–3 med rätt alternativ A–C utan att använda ett digitalt hjälpmedel.

A $r_1 > 0$ och $r_2 < 0$

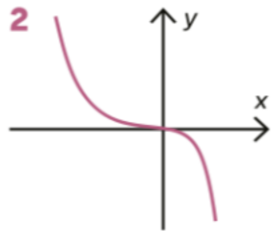
B $0 < r_1 < r_2$

C $r_1 < 0$ och $r_2 > 0$

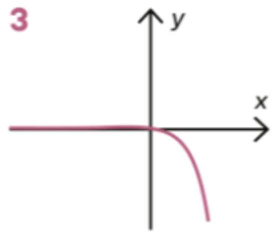
1



2



3



3315.

A - 1

B - 3

C - 2

3321 Bestäm den lösning till

a) $y'' - 12y' + 36y = 0$ som uppfyller $y(0) = 5$ och $y'(0) = 26$

b) $y'' + 7y = 8y'$ som uppfyller $y(0) = -1$ och $y'(0) = 17$

3321 a) $r^2 - 12r + 36 = 0$

$(r-6)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 6 \Rightarrow$

$y = (C_1x + C_2)e^{6x}$,

$y' = (C_1 + 6C_1x + 6C_2)e^{6x}$

$y(0) = 5 \Rightarrow C_2 = 5$

$y'(0) = 26 \Rightarrow C_1 + 6 \cdot 5 = 26 \Rightarrow C_1 = -4$

$y = (5 - 4x)e^{6x}$

b) $r^2 - 8r + 7 = 0$

$(r-1)(r-7) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 7$

$y = C_1e^x + C_2e^{7x}$

$y' = C_1e^x + 7C_2e^{7x}$

$y(0) = -1 \Rightarrow C_1 + C_2 = -1$

$y'(0) = 17 \Rightarrow - \quad C_1 + 7C_2 = 17$

$6C_2 = 18 \Rightarrow C_2 = 3,\ C_1 = -4$

$y = 3e^{7x} - 4e^x$

3322 Bestäm den lösningskurva till

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + 90\frac{dy}{dt} + 675y = 0$$

som har en extrempunkt i (0, 2).

3322.

$$3r^2 + 90r + 675 = 0$$

$$3(r^2 + 30r + 225) = 0$$

$$(r+15)^2 = 0 \Rightarrow r = -15$$

$$y = (c_1 t + c_2)e^{-15t}$$

$$y' = (c_1 - 15c_1 t - 15c_2)e^{-15t}$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 - 15\cdot 2 = 0 \Rightarrow c_1 = 30$$

$$\underline{y = (30t + 2)e^{-15t}}$$

3323 För vilket tal k har differentialekvationen $y'' + ky' + 121y = 0$ den allmänna lösningen $y = (Cx + D)e^{-11x}$? Motivera ditt svar.

3323. Dess karakteristiska ekvation har dubbelroten $r = -11 \Rightarrow$

$$r^2 + kr + 121 = (r+11)^2 \Rightarrow \underline{k = 22}$$

3324 Rörelsen hos en partikel kan vid tiden t beskrivas med hjälp av dess läge s, hastighet v och acceleration a. Sambandet mellan sträckan, hastigheten och accelerationen ges av differentialekvationen $a(t) - 6v(t) + 9s(t) = 0$. Bestäm den allmänna lösningen $s(t)$.

3324.

$$s'' - 6s' + 9s = 0$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = 3$$

$$\underline{s(t) = (C_1 t + C_2)e^{3t}}$$

3325 Konstruera en differentialekvation med begynnelsevillkor som har lösningen $y = (2x - 5)e^{-3x}$.

3325.

$$r = -3 \Rightarrow (r+3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$a(r^2 + 6r + 9) = 0$$

$$a(y'' + 6y' + 9y) = 0$$

a väljes till 1 $\Rightarrow$ $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$y = (2x-5)e^{-3x} \qquad x = 0 \Rightarrow y = -5$$

$$y' = (2 - 6x + 15)e^{-3x} \qquad x = 0 \Rightarrow y = 17$$

$$\underline{y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 17}$$

3330 För vilka tal k kan den allmänna lösningen av differentialekvationen $y'' + 7y' + ky = 0$ skrivas i formen

a) $y = Ce^{ax} + De^{bx}$, där a och b är reella tal

b) $y = e^{cx}(A\cos dx + B\sin dx)$

3330 $\quad r^2 + 7r + k = 0$

a) Två reella rötter =>

Diskriminanten $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - k > 0 \Rightarrow \underline{k < \frac{49}{4}}$

b) Två imaginära rötter =>

Diskriminanten $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - k < 0 \Rightarrow \underline{k > \frac{49}{4}}$

3331 En vikt med massan 0,1 kg är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten $k = 0{,}9$ N/m. Vikten påverkas av kraften $F = -ky$ när den befinner sig i läget y i förhållande till jämviktsläget. Läget y anges i enheten centimeter. Med hjälp av kraftekvationen ($F = m \cdot a$) kan man ställa upp differentialekvationen

$y'' + \frac{k}{m}y = 0$

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$.

3331. $\quad r^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i = \pm 3i$

a) $\underline{y = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t}$

b) $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y'(0) = 6 \Rightarrow 3C_2 = 6 \Rightarrow C_2 = 2$

$\underline{y = 2\sin 3t}$

3332 ”Jag vet hur man bestämmer den allmänna lösningen till en differentialekvation av typen $y'' + ay' + by = 0$ när den karakteristiska ekvationen har två reella rötter, en reell dubbelrot respektive två icke-reella rötter”, säger Embla. ”Men hur gör jag om den karakteristiska ekvationen har en icke-reell dubbelrot.” Vad svarar du henne?

3332. Det finns inget som heter icke-reell dubbelrot.
Om imaginärdelen är noll återstår bara
en reell dubbelrot.

3333 Bestäm den lösning till $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 10y = 0$ som uppfyller $y(0) = 4$ och $y'(0) = 19$.

3333.

$$r^2 - 2r + 10 = 0$$

$$r = 1 \pm 3i$$

$$y = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

$$y' = e^t(C_1 \cos 3t - 3C_1 \sin 3t + C_2 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t)$$

$$y(0) = 4 \Rightarrow C_1 = 4$$

$$y'(0) = 19 \Rightarrow 4 + 3C_2 = 19 \Rightarrow C_2 = 5$$

$$\underline{y = e^t(4\cos 3t + 5\sin 3t)}$$

3341 Bestäm den lösning till

$y'' + 4y' = 8x$

som uppfyller villkoren

$y(0) = 0{,}5$ och $y'(0) = 7$.

3341. $r^2 + 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \ r_2 = -4$

$y_h = C_1 + C_2 e^{-4x}$

Ansats: $y_p = ax^2 + bx$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a \quad \Rightarrow$

$2a + 8ax + 4b = 8x$

$a = 1$

$2 \cdot 1 + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$y = C_1 + C_2 e^{-4x} + x^2 - \frac{x}{2}$

$y' = -4C_2 e^{-4x} + 2x - \frac{1}{2}$

$y'(0) = 7 \Rightarrow -4C_2 - \frac{1}{2} = 7 \Rightarrow C_2 = -\frac{\frac{15}{2}}{4} = -\frac{15}{8} = -1{,}875$

$y(0) = 0{,}5 \Rightarrow C_1 - 1{,}875 = 0{,}5 \Rightarrow C_1 = 2{,}375$

$y = 2{,}375 - 1{,}875 e^{-4x} + x^2 - \frac{x}{2}$

3342 Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 4 \sin t + 3 \cos t$.

3342. Ansats: $y_p = a\sin t + b\cos t$

$y_p' = a\cos t - b\sin t$

$y_p'' = -a\sin t - b\cos t$

$-a\sin t - b\cos t + a\cos t - b\sin t + 2a\sin t + 2b\cos t = 4\sin t + 3\cos t$

$$+\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2} - \frac{8}{2} = -\frac{1}{2}$

$y_p = \frac{7}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$

3343 Maria har fått i uppgift att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - 6y = -18x^2$. Hon vill ansätta $y_p = ax^2$, eftersom hon tror att den ansatsen kommer att leda till ett korrekt resultat. Har hon rätt eller fel? Motivera ditt svar.

3343. Maria har fel. $y_p'' = 2a \Rightarrow$

$2a - 6ax^2 = -18x^2$

a måste vara skild från noll.

En korrekt ansats vore $y_p = ax^2 + b$

3344 Finns det något tal k, så att $y = 2x + Ce^{-5x} + De^{5x}$ satisfierar differentialekvationen $y'' - ky = -50x$? Motivera ditt svar.

3344. $r^2 - k = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{k}$

$y_h = Ce^{-5x} + De^{5x} \Rightarrow \underline{k = 25}$

3345 En vikt som är upphängd i en fjäder svänger kring jämviktsläget. Om man bortser från att rörelsen dämpas, så kan rörelsen beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

där x m är avståndet till jämviktsläget vid t s och k är en konstant.

a) Bestäm en lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoret $x(0) = 0$.

b) Hur stor blir viktens högsta fart?

3345. $x^2 + kx = 0$

$r^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{k}\, i$

$x = C_1 \cos\sqrt{k}t + C_2 \sin\sqrt{k}t$

a) $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \underline{x = C\sin\sqrt{k}t}$

b) $x' = C\sqrt{k}\cos\sqrt{k}t \Rightarrow$

$\underline{x'_{max} = C\sqrt{k}}$

3346 En odämpad svängning som påverkas av en drivande kraft $F = 2\cos 3t$ kan beskrivas med differentialekvationen

$y'' + 4y = 2\cos 3t$

där y är avståndet från jämviktsläget vid tiden t sekunder. Lös differentialekvationen.

3346. $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \Rightarrow$

$$y_h = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

Ansats: $y_p = C_3 \cos 3t + C_4 \sin 3t$

$$y_p' = -3C_3 \sin 3t + 3C_4 \cos 3t$$

$$y_p'' = -9C_3 \cos 3t - 9C_4 \sin 3t$$

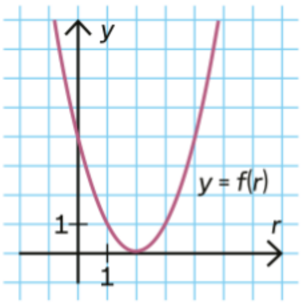
$$-9C_3 \cos 3t - 9C_4 \sin 3t + 4C_3 \cos 3t + 4C_4 \sin 3t = 2\cos 3t$$

$$-5C_3 = 2 \Rightarrow C_3 = -\frac{2}{5}$$

$$-5C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{2}{5}\cos 3t$$

3347 Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + ay' + by = x + 7$ kan skrivas i formen $f(r) = 0$. Figuren visar grafen till funktionen $f(r)$. Bestäm differentialekvationens allmänna lösning.



3347. $r = 2 \Rightarrow a(r-2)^2 = 0$

$f(0) = 4 \Rightarrow a\cdot(0-2)^2 = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$y'' - 4y' + 4y = x + 7$$

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{2x}$$

Ansats: $y_p = ax + b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0 \Rightarrow$

$$-4a + 4ax + 4b = x + 7$$

$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$-1 + 4b = 7 \Rightarrow b = 2$

$$y = (C_1 x + C_2)e^{2x} + \frac{x}{4} + 2$$

3351 En partikel svänger runt sitt jämviktsläge. Partikelns läge x cm från jämviktsläget vid tiden t sekunder bestäms av differentialekvationen $x'' + 4x = 0$, med begynnelsevillkoren $x(0) = 0$ och $x'(0) = -2$.

a) Bestäm x som funktion av tiden.

b) Efter hur lång tid passerar partikeln jämviktsläget för första gången efter $t = 0$?

c) Vilken fart har partikeln när den passerar jämviktsläget för första gången?

3351 a) $\underline{x = -\sin 2t}$

b) $t = \frac{\pi}{2} \approx \underline{1{,}57 \text{ s}}$

c) $v = x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{2 \text{ cm/s}}$

1 f(x) := solveode(y'' + 4y = 0, (0, 0), (0, −2))

→ $f(x) := -\sin(2\,x)$

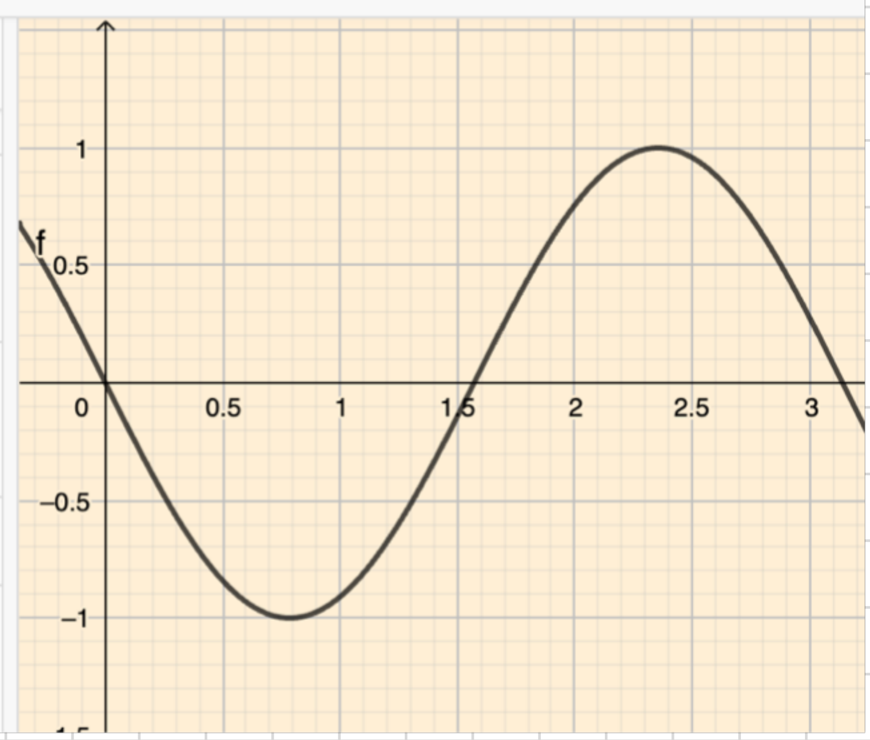
2 solve(f = 0)

→ $\left\{x = \frac{1}{2} k_1 \pi\right\}$

3 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

→ 2

4



3352 En vikt med massan 0,10 kg är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten $k = 0{,}9$ N/m. Vikten påverkas av kraften $F = -ky$ då den befinner sig y meter från jämviktsläget. Med hjälp av kraftekvationen $F = ma$ kan vi ställa upp differentialekvationen

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0{,}06$ och $y'(0) = 0$.

Vi inför nu en dämpning som är proportionell mot hastigheten, dvs. vi har $F = -by'$. Då kan vi ställa upp differentialekvationen

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

där $b = 0{,}20$ kg/s.

c) Bestäm med hjälp av digitalt verktyg den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0{,}06$ och $y'(0) = 0$.

Vi lägger nu till en vibrationsgenerator. Den är kopplad till vikten via ett snöre, och drar i snöret periodiskt på ett sätt som kan beskrivas med hjälp av differentialekvationen

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0{,}1 \sin 2t$$

d) Bestäm med hjälp av digitalt verktyg den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0{,}06$ och $y'(0) = 0$.

3352. Se lösning i Geogebra nedan. (t ersatt med x).

1 f(x) := SolveODE(y'' + 9 y = 0, (0, 0.06), (0, 0))

$\to f(x) := \frac{3}{50}\cos(3x)$

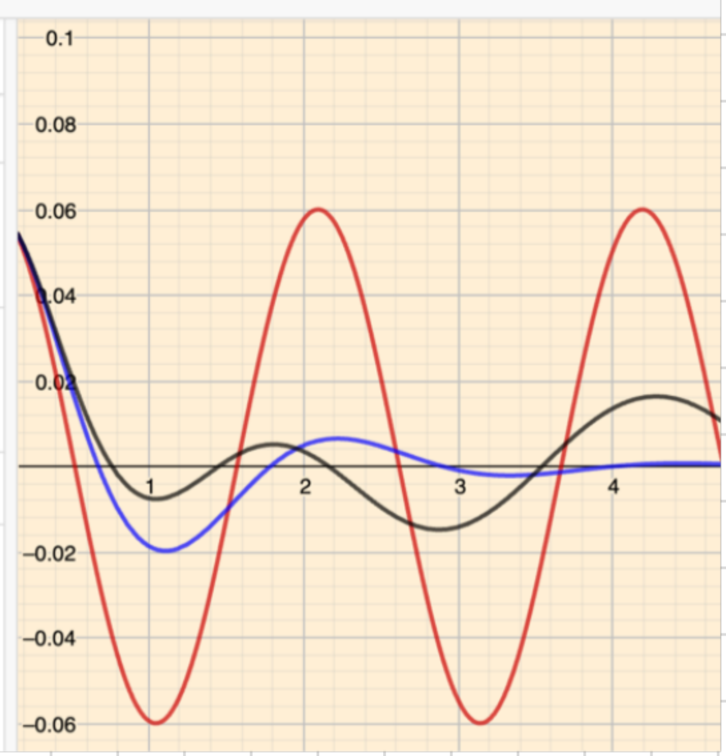
2 g(x) := SolveODE(y'' + 2 y' + 9 y = 0, (0, 0.06), (0, 0))

$\to g(x) := \frac{3}{50} e^{-x} \cos\left(2\sqrt{2}\,x\right) + \frac{3}{200}\sqrt{2}\, e^{-x} \sin\left(2\sqrt{2}\,x\right)$

3 h(x) := SolveODE(y'' + 2 y' + 9 y = 0.1 sin(2 x), (0, 0.06), (0, 0))

$\to h(x) := \frac{-2}{205}\cos(2x) + \frac{1}{82}\sin(2x) + \frac{143}{2050} e^{-x}\cos\left(2\sqrt{2}\,x\right) + \frac{93}{8200}\sqrt{2}\, e^{-x}\sin\left(2\sqrt{2}\,x\right)$

4



3353 En viss svängningsrörelse kan beskrivas med differentialekvationen

$y''(t) + by'(t) + 4y(t) = 0$

Sätt $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Undersök med hjälp av digitalt verktyg hur värdet av konstanten b påverkar svängningsrörelsen.

3353. Faktorn b motsvarar systemets dämpning.

$b = 0 \Rightarrow$ konstant amplitud

$b < 0 \Rightarrow$ Amplituden växer (negativ dämpning)

$b > 0 \Rightarrow$ Amplituden sjunker (positiv dämpning)

1 f(x) := SolveODE(y'' + 0 y' + 4 y = 0, (0, 1), (0, 0))

$\rightarrow f(x) := \cos(2x)$

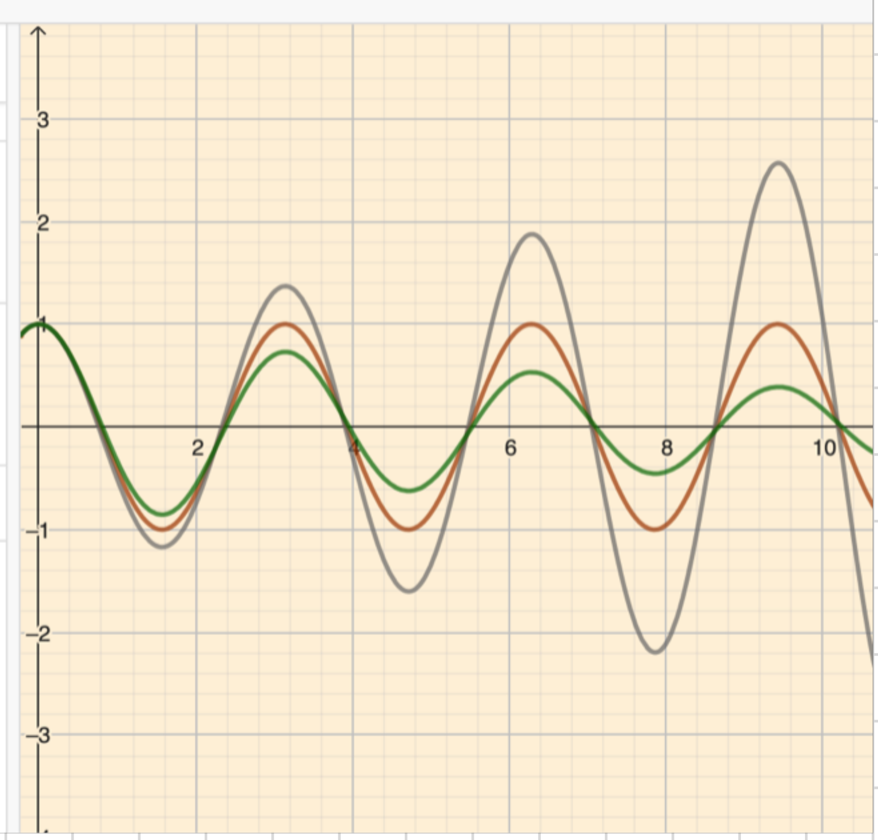
2 a(x) := SolveODE(y'' − 0.2 y' + 4 y = 0, (0, 1), (0, 0))

$\rightarrow a(x) := e^{\frac{1}{10}x} \cos\left(\frac{1}{10}\sqrt{399}\,x\right) - \frac{1}{399}\sqrt{399}\,e^{\frac{1}{10}x} \sin\left(\frac{1}{10}\sqrt{399}\,x\right)$

3 b(x) := solveODE(y'' + 0.2y' + 4y = 0, (0, 1), (0, 0))

$\rightarrow b(x) := e^{\frac{-1}{10}x} \cos\left(\frac{1}{10}\sqrt{399}\,x\right) + \frac{1}{399}\sqrt{399}\,e^{\frac{-1}{10}x} \sin\left(\frac{1}{10}\sqrt{399}\,x\right)$

4



3354 En kedja med längden 10,0 m hänger över en tunn metallstång som har en mycket glatt yta. Den kortare änden, som har längden 4,0 m hålls fast. Då kedjan släpps glider den av stången på grund av sin egen tyngd. Efter t sekunder har kedjan glidit y meter. Man kan visa att approximativt gäller

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2 + 2y$$

för kedjan ovan.

a) Visa att $y = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t} - 1$ är en lösning till differentialekvationen ovan.

b) Bestäm med funktionen i a) hur lång tid det tar för kedjan att glida av stången. Svara med två gällande siffror.

(Cp NT3 1983)

3354. a)

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y'' = e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}$$

$$VL = e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}$$

$$HL = 2 + 2\left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t} - 1\right) = e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t} = VL \quad \#$$

b) $y = 4 \Rightarrow \underline{t = 1{,}6\ s}$

Function

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}x} - 1$$

List

l1 = NSolve(f = 4)

$\approx \{x = -1.62,\ x = 1.62\}$

3355 En boll med massan 0,50 kg släpps och faller sedan under inverkan av tyngdkraften och luftmotståndet. Vi betecknar bollens hastighet med $v(t)$ m/s och kraften från luftmotståndet med F_L. Vi antar dessutom att luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten i kvadrat med proportionalitetskonstanten 0,025 kg/m.

a) Använd Newtons andra lag, $F = ma$, och teckna en första ordningens differentialekvation med lämpligt begynnelsevillkor som beskriver rörelsen.

b) Vilken hastighet har bollen 1,0 sekunder efter ögonblicket den släpps, om vi antar att bollen släpps tillräckligt högt uppifrån? Lös uppgiften med digitalt verktyg.

c) Rita grafen som beskriver bollens hastighet som funktion av tiden och undersök om det finns någon största möjliga hastighet som bollen kan nå. Lös uppgiften med digitalt verktyg.

d) För låga hastigheter kan man anta att luftmotståndet är proportionellt enbart mot hastigheten och inte mot hastigheten i kvadrat. Anta som ovan att proportionalitetskonstanten är 0,025 kg/s och undersök vilken största möjliga hastighet denna modell ger. Lös uppgiften med digitalt verktyg.

e) Utgå från den differentialekvation du tecknade i a)-uppgiften och teckna en andra ordningens differentialekvation som beskriver bollens läge.

3355. a) $mv' = mg - k \cdot v^2$

$$v' + 0.05v^2 = 9.8 \quad , \quad v(0) = 0$$

b) $v \approx 8.5$ m/s

c) Se nedan. $V_{max} = 14$ m/s

d) $V_{max} = 196$ m/s

1 f(x) := SolveODE(y′ + 0.05 y² = 9.8, (0, 0))

$\approx$ $f(x) := \dfrac{-14\, e^{-1.4x} + 14}{e^{-1.4x} + 1}$

2 f(1)

$\approx$ 8.46

3 Limit(f, ∞)

$\approx$ 14

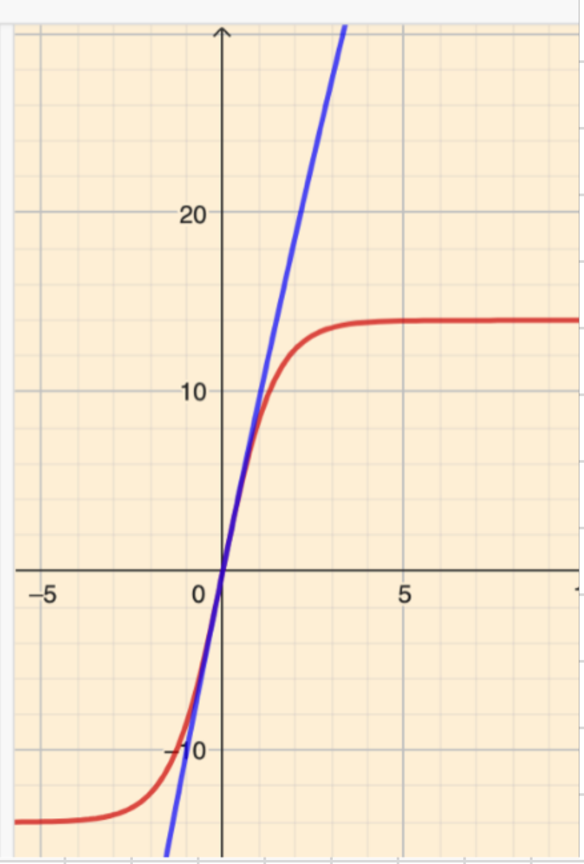
4 g(x) := solveode(y′ + 0.05 · y = 9.8, (0, 0))

$\approx$ $g(x) := -196\, e^{-0.05x} + 196$

5 limit(g, ∞)

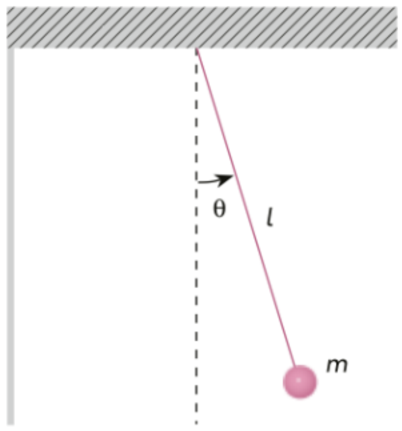
→ 196

6



e) $ms'' = mg - k \cdot (s')^2$

3356 En pendel består av en kula med massan m kg, som är upphängd i en tråd med längden l m.



Krafterna som verkar på kulan ger differentialekvationen

$ml \cdot \theta''(t) = -mg \sin \theta(t)$

Den differentialekvationen går inte att lösa med exakta metoder. Däremot kan vi hitta en approximativ lösning genom att utnyttja att det för små vinklar gäller att $\sin \theta \approx \theta$. Det ger

$ml\theta'' + mg\theta = 0$

a) Sätt $g = 9{,}82$ m/s^2 och $l = 1{,}09$ m. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Bestäm den lösning som uppfyller villkoren $\theta(0) = 0{,}5$ och $\theta'(0) = 2$.

3356. a) $\theta'' + 9\theta = 0$

$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \Rightarrow$

$\theta = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$

b) $\theta' = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t$

$\theta'' = -9C_1 \cos 3t - 9C_2 \sin 3t$

$\theta(0) = 0.5 \Rightarrow C_1 = 0.5$

$\theta'(0) = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3} = 0.67$

$\theta = 0.5 \cos 3t + 0.67 \sin 3t$

3357 För en dämpad fjäderpendel kan man ställa upp differentialekvationen $y'' + \frac{r}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$.

I differentialekvationen är m viktens massa, r dämpningskonstanten och k fjäderkonstanten. Det är vanligt att man inför dämpningskoefficienten $\gamma = \frac{r}{2m}$ och vinkelhastigheten $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

a) Skriv om differentialekvationen så att den innehåller γ och ω i stället för r, k och m.

b) Lös den karakteristiska ekvationen med de nya beteckningarna.

c) Bestäm, för hand, den allmänna lösningen till differentialekvationen om $\omega^2 > \gamma^2$.

d) Bestäm dämpningskoefficienten γ och vinkelhastigheten ω givet att $m = 0{,}10$ kg, $r = 0{,}20$ kg/s, $k = 2{,}0$ N/m.

e) Lös differentialekvationen, för hand, med begynnelsevillkoren $y(0) = 0{,}05$ och $y'(0) = 0$.

f) Lös differentialekvationen med digitalt verktyg och rita lösningen.

3357.

a) $$y'' + 2\gamma \cdot y' + \omega^2 y = 0$$

b) $$r^2 + 2\gamma \cdot r + \omega^2 = 0$$

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, i$$

c) $\omega^2 > \gamma^2 \Rightarrow$

$$y = e^{-\gamma t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\cdot t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\cdot t\right)$$

d) $$\gamma = \frac{0.2}{2 \cdot 0.1} = 1 \,, \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{0.1}} = \sqrt{20}$$

e) $$y = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{19}t + c_2 \sin\sqrt{19}t\right)$$

$$y' = -e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{19}\,t + \sqrt{19}c_1 \sin\sqrt{19}t - c_2 \sin\sqrt{19}t - \sqrt{19}c_2 \cos\sqrt{19}t\right)$$

$y(0) = 0.05 \Rightarrow c_1 = 0{,}05$

$y'(0) = 0 \Rightarrow -(0{,}05 - \sqrt{19}c_2) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{0.05}{\sqrt{19}} \approx 0.015$

$$y = e^{-t}\left(0.05 \cos\sqrt{19}t + 0.015 \sin\sqrt{19}t\right)$$

f)

1 $f(x) := \text{solveode}(y'' + 2y' + 20y = 0, (0, 0.05), (0, 0))$

$\rightarrow f(x) := \frac{1}{20} e^{-x} \cos(\sqrt{19}\, x) + e^{-x} \sin(\sqrt{19}\, x) \frac{1}{380} \sqrt{19}$