

Länk¹ till detta material samt filmer: <https://www.geogebra.org/m/dzzaarw5> ←

GeoGebra för kursen Matematik 2

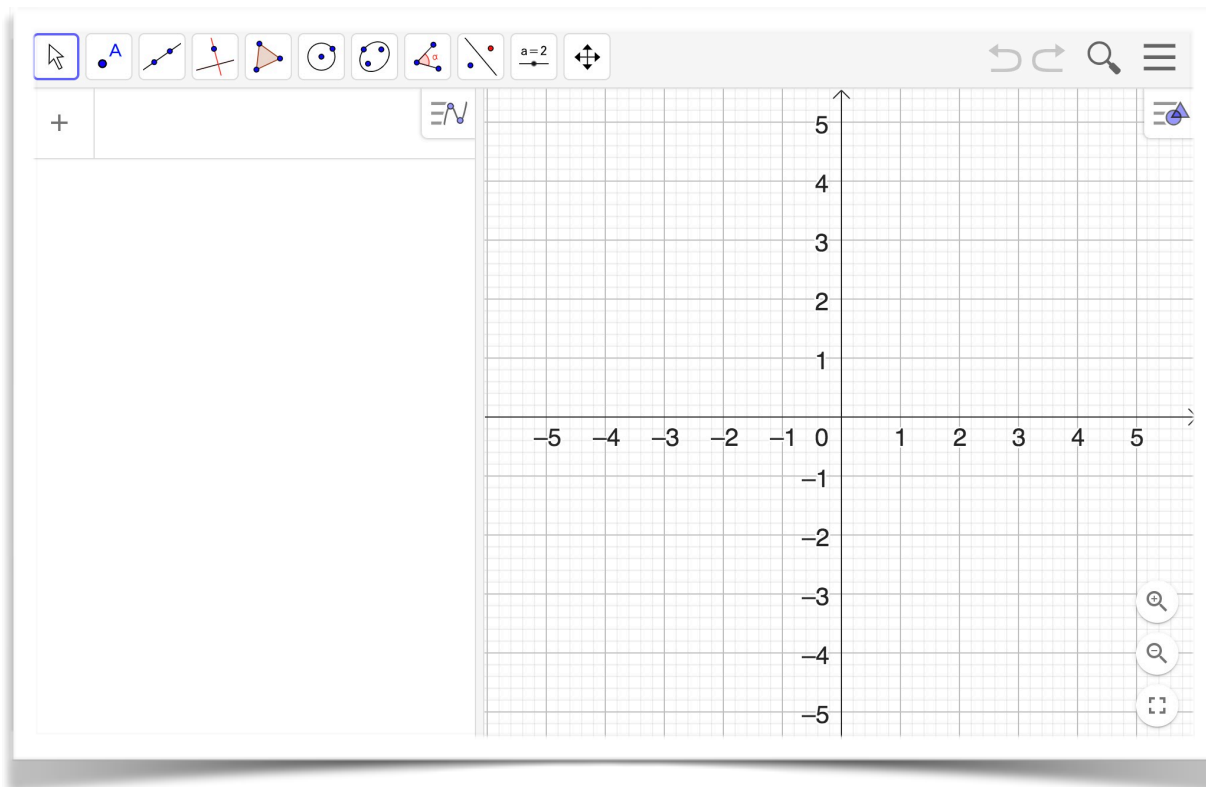
Innehållsförteckning:

Saker du bör ha träffat på i kurs 1:

Introduktion till miljön	sid 2
Beräkningar	sid 3
Verktuget Lös(...)	sid 4
Ritområdet och verktygsfältet	sid 5
Funktioner och grafer	sid 6
Att lösa ekvationer grafiskt	sid 7

Här kommer det som är nytt för kurs 2:

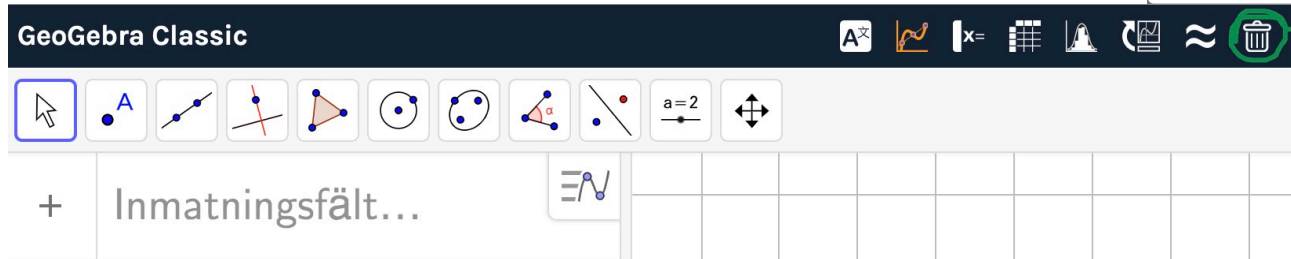
Nollställena och extrempunkter	sid 8
Skapa funktioner med regression	sid 9
Ekvationssystem	sid 10
Statistik och normalfördelning	sid 11
Tips och tricks	sid 12
NP VT 2022 löst med GeoGebra	finns här



¹ Om du hittar felaktigheter, maila gärna geogebra.se@gmail.com

GeoGebra inom ma2 (elevversion)**0. Själva GeoGebramiljön**

Vi rekommenderar att du övar i den miljön som du kommer kunna ha på prov. Ofta skriver man prov i exam.net Skriv in exam.net/matematik i sökrutan och välj GeoGebra i menyn till vänster, välj classic:

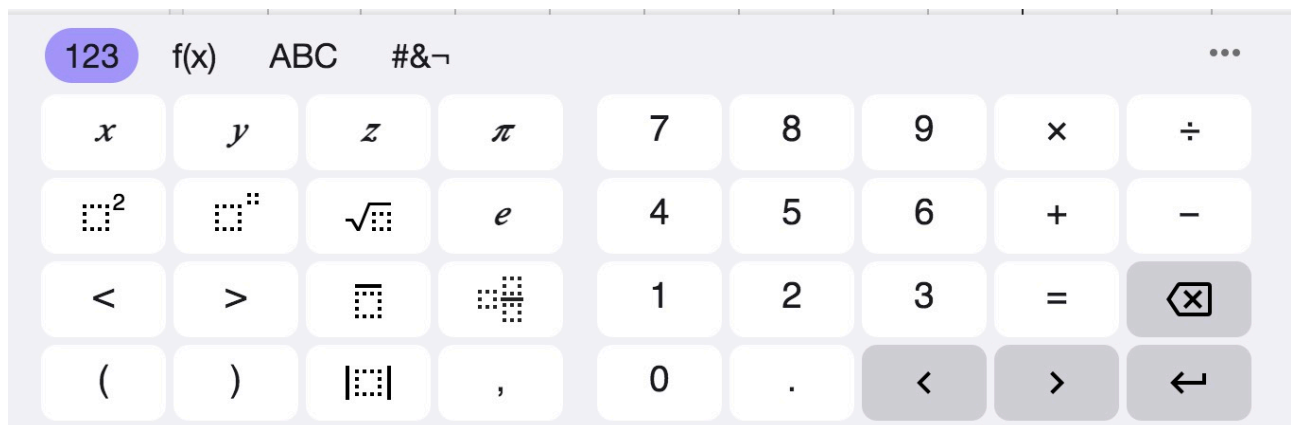


Soptunna högst upp klickar man på för att radera allt och starta om².

I inmatningsfältet skriver man. När man ställer sig där dyker symbolen för virtuellt tangentbord upp:



Klickar man på den får man alla möjliga roliga tecken:



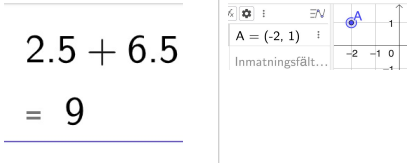
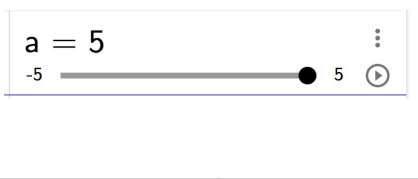
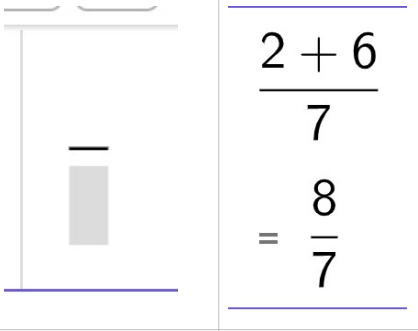
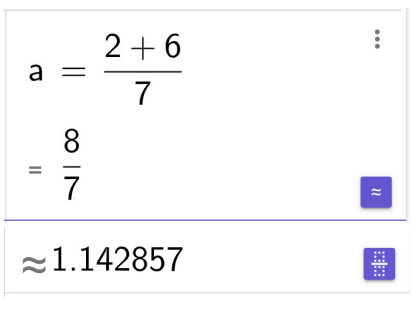
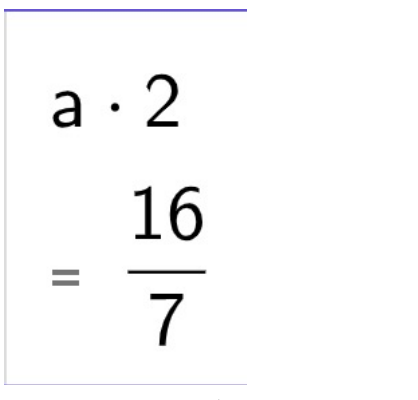
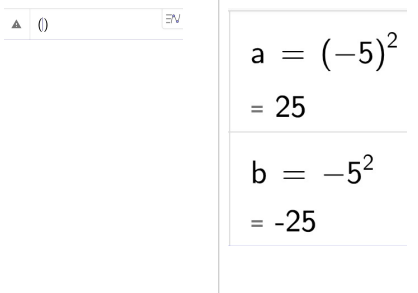
Man kan även använda tangentbordet för det mesta:

multiplikation	* stjärnan som sitter bredvid enter på höger sidan	
division = bråkstreck	/ slash som sitter på sjuan om man använder shift	
upphöjt till	^ brukar sitta bredvid enter på höger sidan, använd shift	

Vi börjar med att göra lite beräkningar.

² I geogebra.org/classic finns ingen soptunna, du går in bakom tre strecken, väljer arkiv, därefter spara och börja om, men klicka på spara inte.

1. Beräkningar

<p>Decimaltecken skrivs som punkt, inte komma Komma används för att dela av saker, till exempel, x-koordinaten från y-koordinaten i en punkt</p>	
<p>Om man bara skriver in ett tal så får det automatiskt ett namn och blir även en så kallad glidare: om man drar i svarta punkten så kan man ändra talet. Inom kurs 2 har man kanske inte så stor nytta av det, men det är bra att känna till vad som händer.</p>	
<p>Var noga med division! Ett tips är att börja med att skriva divisionstecken (Shift+7 eller virtuellt tangentbord) och sedan navigera med pilarna</p>	
<p>När man har tryckt på enter så får resultatet ett namn, oftast en liten bokstav om det är ett tal och en stor bokstav om det är en punkt.</p> <p>Om man klickar på det blåa tecknet \approx så får man ett avrundat värde. Det är automatiskt inställt på 6 decimaler.</p>	
<p>Man kan använda denna bokstav i senare uträkningar.</p>	
<p>När man öppnar ett parentes så får man automatiskt två parenteser, en som öppnas och en som stängs. Navigera med pilarna så du skriver på rätt ställe</p> <p>Titta på exempel här för att se vikten av parenteser!</p>	
<p>Har du skrivit något fel så är det oftast inte lönt att försöka omdefiniera. Det går fortare att radera och börja om. Öva regelbundet på att göra uträkningar i ggb. Det ser lätt ut när läraren gör det men för att man snabbt ska kunna göra det själv på ett prov behöver man ganska mycket övning.</p>	

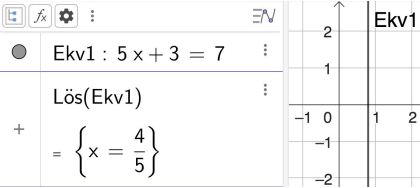
2. Verktöget Lös(...)

Ett mycket användbart verktyg. Precis som det låter, så löser det ekvationer. Använd alltid x som det obekanta talet. När du redovisar dina lösningar ange att du har använt verktöget lös, vilken ekvation du skrev in och vad det gav. Därefter formulera svaret. Vi tar först ett exempel från kurs 1:

Hur lång tid tar det för 5000 kronor att växa till 6000 om jag sätter in pengarna på ett konto med årsräntesatsen 2% ?

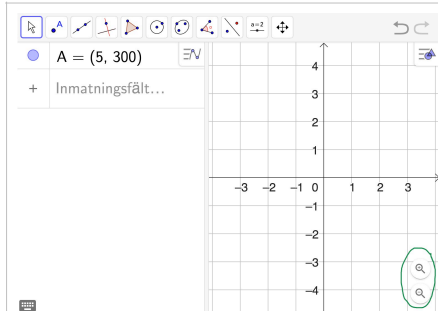
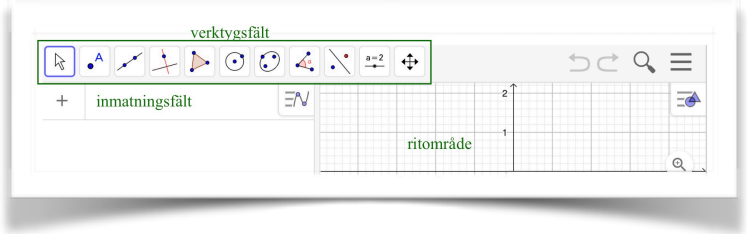
gama · ff^{tid} = nya
 ↓
 Lös(5000 · 1.02^x = 6000)
 x ≈ 9.2
 Svar: ca 9 år

Inom kursen ma2 behöver man lösa många olika typer av ekvationer, till exempel

$I1 = \text{Lös}\left(\frac{x}{7} = \frac{13}{45}\right)$ $= \left\{x = \frac{91}{45}\right\}$	<p>inom geometriavsnittet kommer rätt många ekvationer med division:</p>
$\text{Lös}(x^2 + 2x - 3 = 0)$ $= \{x = -3, x = 1\}$	<p>Vi provar även lösa en andragradsekvation (ekvation där x är upphöjt till två)</p>
$I2 = \text{Lös}(5^x = 7)$ $= \left\{x = \frac{\ln(7)}{\ln(5)}\right\}$	<p>$I1 = \text{NLös}(5^x = 7)$ $\approx \{x = 1.20906\}$</p> <p>Och en exponentialekvation (ekvation med x i exponenten). Svaret visas i en form som du inte behöver kunna i den här kursen, klicka på \approx så får du ett närmevärde och kommandot byts till NLös</p>
	<p>Om du skriver in din ekvation först, utan att skriva ordet lös, så får det namnet Ekv1 och lösningen ritas som en vertikal linje.</p> <p>Enklast är att därefter skriva Lös(Ekv1) och få ut lösningen.</p>
	<p>Om Lös(...) inte ger något, prova NLös(...) direkt</p>
$I1 = \text{NLös}(35.2 = 0.8365 x^{1.5})$ $\approx \{x = 12.09812\}$	<p>I januari år 2019 drabbade stormen Alfrida stora delar av Sverige. Den högsta vindhastigheten uppmättes till 35,2 m/s.</p> <p>Sambandet mellan vindhastigheten v m/s och Beauforttalet B ges av formeln $v = 0,8365 \cdot B^{1.5}$</p> <p>Beräkna Beauforttalet B för vindhastigheten 35,2 m/s och avrunda svaret till ett heltal.</p> <p>Det är faktiskt inte mer än att om man har en formel och får vissa värden och ska räkna ut det sista, så byt ut och använd kommandot Lös(...) Klart!</p>

3. Ritområdet och verktygsfältet

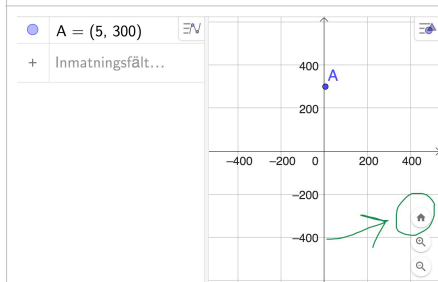
En av de viktigaste sakerna att lära sig från början är att anpassa ritområdet så att man ser det man vill se och ”hänga tillbaka verktyget” när man använt det = klicka på pilen.



Skriv in en punkt med koordinaterna (5,300) och tryck på enter. Punkten fick namnet A. Du ser inte punkten.

Längst ner till höger ser du knapparna för att zooma in och ut.

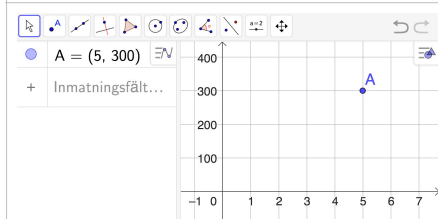
Prova zooma ut.



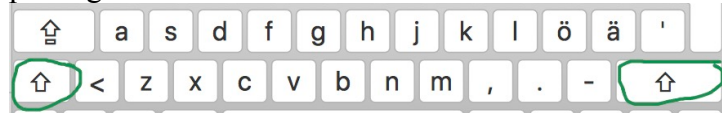
Nu ser det ut som punkten A ligger på y-axeln!
Men det gör den ju inte.

Vi börjar om och gör en annan grej.

Klicka på symbolen med huset så återgår ritområdet till standardinställning, där origo är i mitten och axlarna är graderade med 1,2,3 osv.



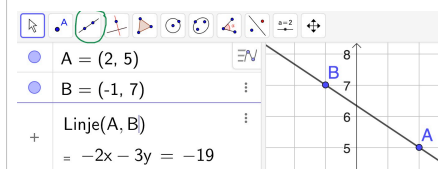
Klicka i ritområdet på valfritt ställe. Tryck ner skifftangenten på tangentbordet:



och tryck samtidigt på pilarna tills ditt ritområde ser ut som på bilden

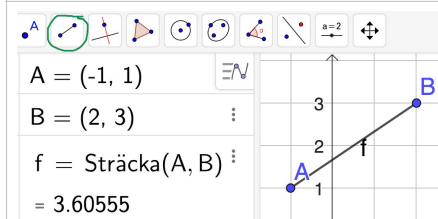


Gå inte vidare förrän du har lärt dig detta!



För att skapa ekvationen för en linje mellan två punkter: skriv in punkterna, därefter Linje(A,B) eller använd verktyget.

Högerklicka på linjen för att ändra linjen till k-form om du behöver

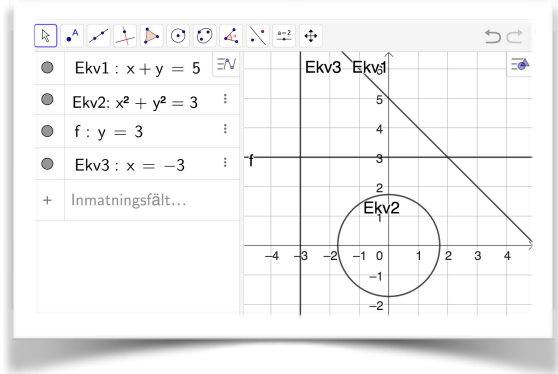


Använd verktyget sträcka för att mäta hur långt det är mellan punkter. Finns i menyn bakom linjen.

3. Funktioner och grafer.

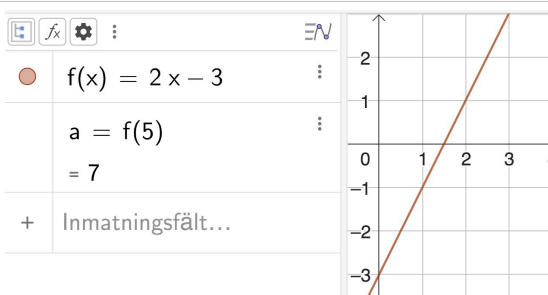
Till skillnad från en ”klassisk” grafitande räknare där man ska skriva upp sambanden som $y=...$ så kan GeoGebra rita upp samband oavsett hur de är skrivna.

I kurs 2 får du dock oftast jobba med funktioner av x .



Saker du redan känner till om funktioner från kurs 1:

Rita funktionen och bestämma funktionsvärdet:



Du skriver in funktionerna precis som de står i uppgifter.

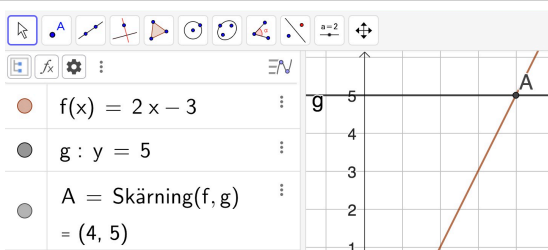
För att beräkna ett funktionsvärde skriver man också, precis som det står i uppgifterna. $f(5)$ ger i detta fallet 7 eftersom y -koordinaten är 7 när x -koordinaten är 5 för en punkt som ligger på grafen till denna funktion.

Var korsar den y -axeln?



För att få reda på var grafen korsar y -axeln (y -intercept) som oftast behövs när du ska svara på frågan om ”från början” skriv $f(0)$

Bestämma x -värdet om man vet y -värdet



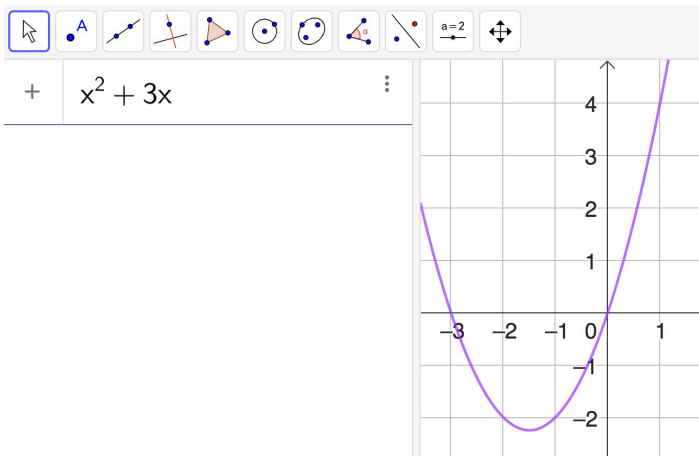
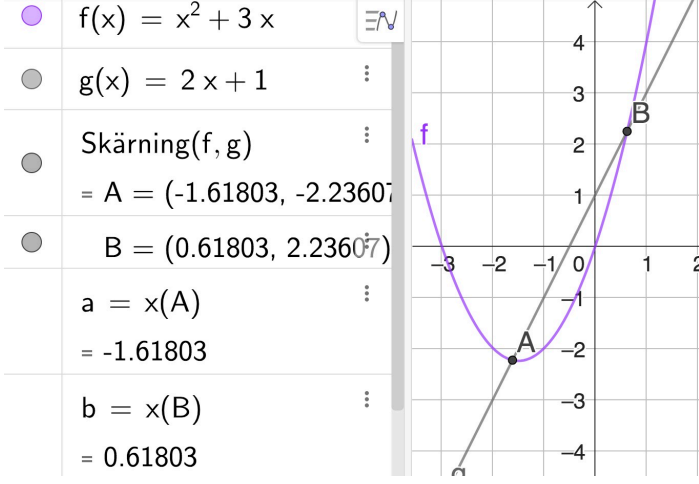
För att lösa ekvationen $f(x)=5$ grafiskt ritas du själva funktionen, därefter linjen $y=5$ och hittar skärningen med kommandot skärning. Skriv skärning eller använd verktyget som finns bakom knappen med A på.

Observera att svaret på frågan är då, i detta exempel, att $x=4$. Du svarar alltså bara med skärningspunktens x -koordinat.

Linjen $y=5$ är lite som en linjal som man lägger på grafen för att se vilket x -värde man har om höjden är 5.

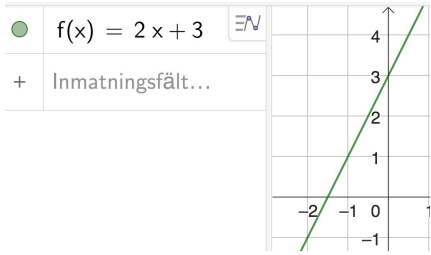
Att lösa ekvationer grafiskt, alltså genom att rita.

Vi tittade på kommandot Lös tidigare. Ibland funkar inte det av olika anledningar. Här får du en metod som alltid funkar. Det är att lösa ekvationen grafiskt.

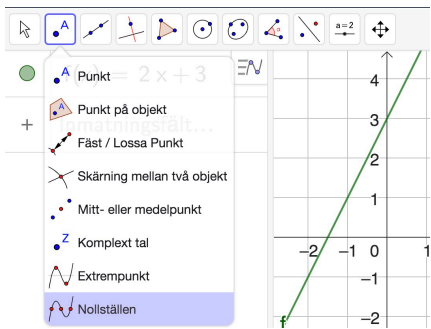
	<p>Vi löser ekvationen grafiskt (rita): $x^2 + 3x = 2x + 1$</p> <p>Skriv <u>INTE</u> hela ekvationen om du ska lösa grafiskt, utan skriv varje led (sida) på var sin rad och hitta därefter skärningar. Innan du trycker in enter, har den inget namn, därefter får den namnet f(x)</p>
	<p>Nu har vi f(x) och g(x) vi hittar skärningar och svarar med punkternas x-koordinater, alltså $x_1 \approx -1,6$ $x_2 \approx 0,6$</p> <p>Och ja, vi kunde lika gärna gjort det med kommandot lös()</p>

nya begrepp om funktioner i kurs 2:

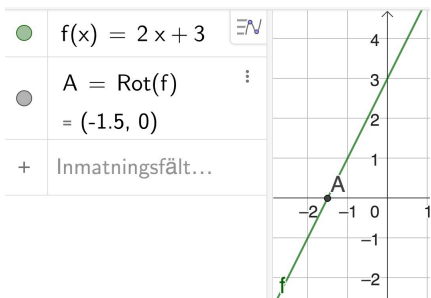
Om nollställen:



Skriv in funktionen

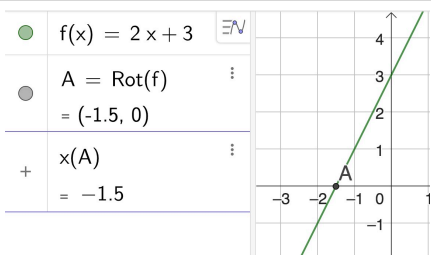


Välj verktyget Nollställe som finns bakom knappen med bokstaven A



Klicka därefter på grafen så får du en punkt som automatiskt får namnet A.

Punkten är skärningen mellan funktionsgrafens och x-axeln



JÄTTEVIKTIGT!!!

När du ska svara på frågan ”ange nollställen till funktionen”

så ska du inte svara med punktens båda koordinater utan med x-koordinaten.

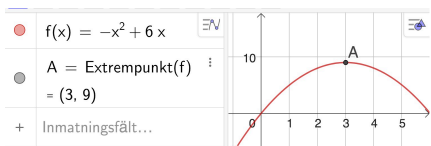
Om du skriver in $x(A)$ så får du bara x-koordinaten.

$$a = x(A)$$

$$= -1.5$$

När du har klickat på enter så får den även ett namn. Det är bra att kunna ifall man behöver göra något mer med nollstället i en senare uträkning.

Om extrempunkter:



Skriv in funktionen och skriv in ordet extrempunkt!

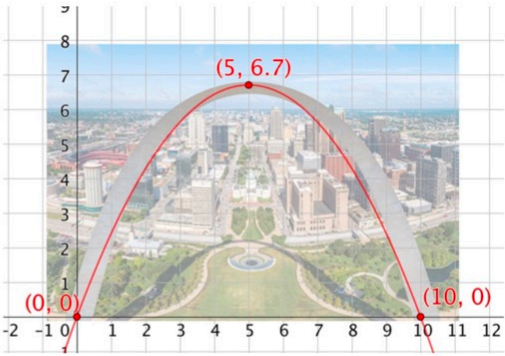
That's it! Om du behöver få ut varje koordinat för sig:

$$a = x(A)$$

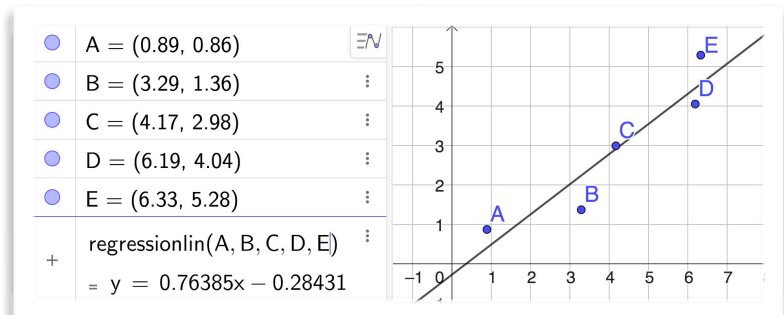
$$= 3$$

$$b = y(A)$$

$$= 9$$

Uppgift	Lösning
<p>Efter 1 år finns det 100 saker Efter 5 år finns det 400 saker</p> <p>Skapa en <u>linjär</u> funktion</p>	<p>$A = (1, 100)$</p> <p>$B = (5, 400)$</p> <hr/> <p>$\text{RegressionLin}(A, B)$</p> <p>$= y = 75x + 25$</p>
<p>Efter 1 år finns det 100 saker Efter 5 år finns det 400 saker</p> <p>Skapa en <u>exponentialfunktion</u></p>	<p>$A = (1, 100)$</p> <p>$B = (5, 400)$</p> <hr/> <p>$\text{RegressionExp}(A, B)$</p> <p>$= 70.71068 \cdot 1.41421^x$</p>
 <p>Använd regression för att skapa funktionen på bilden.</p>	<p>$A = (0, 0)$</p> <p>$B = (5, 6.7)$</p> <p>$C = (10, 0)$</p> <hr/> <p>$\text{RegressionPoly}(A, B, C)$</p> <p>$= -0.268x^2 + 2.68x$</p> <p>Skapar en <u>andragradsfunktion</u> om du utgår från 3 punkter</p>

Regression ska egentligen användas för att skapa funktionsuttryck som passar på ungefär till en massa punkter för att kunna göra en prognos om hur det kommer att utvecklas senare:



Linjen fick namnet f när vi klickar enter och punkterna fick krulliga parenteser runt sig (bry dig inte om dem, det ska vara så), så vi kan kolla hur det kommer att bli när x -koordinaten är 10 genom att skriva $f(10)$:

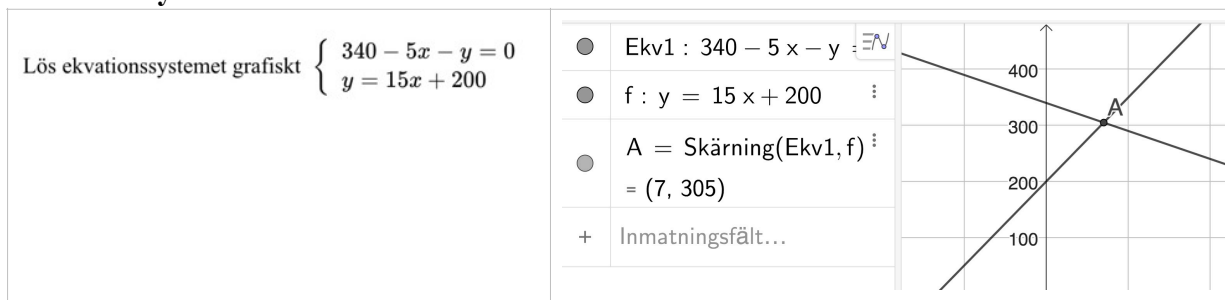
$$f : \text{RegressionLin}(\{A, B, C, D, E\})$$

$$= y = 0.76385x - 0.28431$$

$$a = f(10)$$

$$= 7.3542$$

Ekvationssystem



Skriv in ekvationerna precis som de står i uppgiften (fast utan krullparentesen {)

Du kan bara använda bokstäverna x och y som variabler.

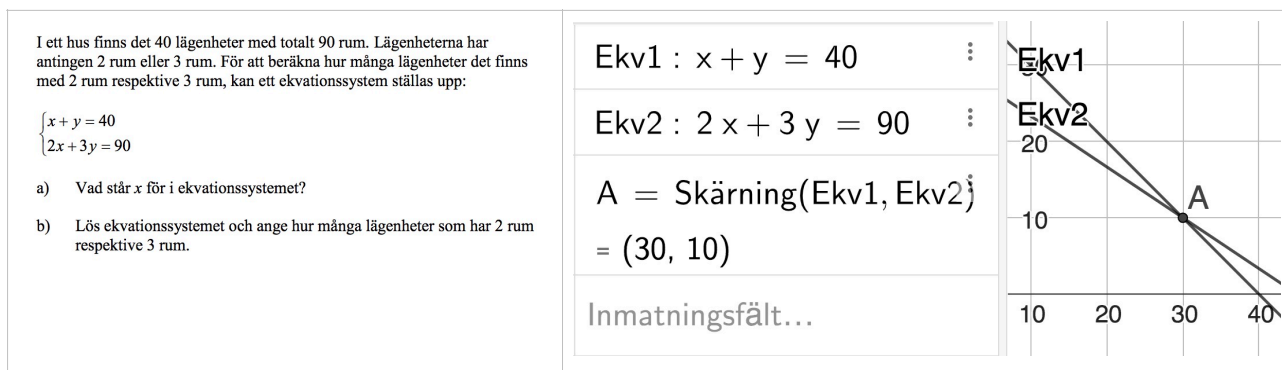
Välj därefter verktyget skärning och klicka på dina linjer, en i taget.

Du får en punkt som är skärningspunkten.

Svaret ska anges med båda koordinaterna.

Svar:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 305 \end{cases}$$



Observera att om uppgiften handlar om något ”verkligt” ska man skriva svaret med de enheter som efterfrågas, till exempel stycken, kronor, bananer etc.

Här ska svaret vara: Det är 30 lägenheter med 2 rum och 10 lägenheter med 3 rum.

Statistik och sannolikhet

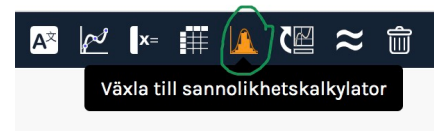
Det mesta går att räkna ut genom att skriva i inmatningsfältet:

medelvärde(1, 3, 6, 8, 9) = 5.4	medelvärde
median(2, 4, 6, 8, 9, 9) = 7	median
+ standardavv StandardAvvikelseFörPopulationen StandardAvvikelseFörUrval StandardAvvikelseFörUrvalX StandardAvvikelseFörUrvalY StandardAvvikelseX StandardAvvikelseY	Börja skriv ordet standardavvikelse , välj det du behöver (för population eller urval, skriv in dina värden) Observera att den byter namn när du har tryckt på enter och heter då stdv()
A = (-0.96, 1.18) B = (2.2, 1.56) C = (2.22, 3.92) D = (4.32, 3.66) + Korrelation(A, B, C, D) = 0.73202	korrelation

Beräkningar för normalfördelning:

Här behöver vi byta fönster. I exam.net gör du det genom att klicka på denna symbol i menyn högst upp

I classic går du in bakom tre strecken, välj visa, välj sannolikhetskalkylator.



	<p>Man skriver in de givna värden på medelvärde och standardavvikelse. (Observera att kurvan inte ändrar form) därefter väljer en av knapparna] [] [eller [och sist skriver in själva frågan.</p>
	<p>Här har vi beräknat utifrån medelvärdet 100 och standardavvikelsen 15, hur många procent hamnar mellan 120 och 130</p>

Tips och tricks för extra intresserade:

I kommandot Lös(...) kan man använda redan definierade funktioner:	
<p>Funktionen ges av $f(x) = 2x + 7$ Lös ekvationen $f(x) = 10$</p>	$f(x) = 2x + 7$ $l1 = \text{Lös}(f(x) = 10)$ $= \left\{ x = \frac{3}{2} \right\}$
<p>Uppgift från ett gammalt NP:</p> <p>Funktionen f ges av $f(x) = x^2 - 6x + 4$ Lös ekvationen $f(x+3) = -2$ och svara med minst två decimaler.</p> <p>Klicka på \approx för att få ett närmevärde med decimalerna</p>	$f(x) = x^2 - 6x + 4$ $l2 = \text{Lös}(f(x+3) = -2)$ $= \left\{ x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3} \right\}$ $l2 = \text{NLös}(f(x+3) = -2)$ $\approx \{ x = -1.73205, x = 1.73205 \}$
Några bra kommandon:	
Förenkla	$f(x) = \text{Förenkla}(2x + 3x + 7)$ $= 5x + 7$
Faktorisera	$g(x) = \text{Faktorisera}(2x^2 + 3x)$ $= x(2x + 3)$
<p>Statistik utifrån frekvenstabell Observera att man behöver krullparenteser!</p> <p>Om man har 5 stycken ettor, 7 stycken tvåor och 10 stycken treor, så är medelvärdet 2,23</p>	$\text{medel}(\text{Lista med tal}, \text{Lista med frekvenser})$ $\text{medel}(\{1, 2, 3\}, \{5, 7, 10\})$ $= 2.23$
<p>OBS! Det är skillnad på uträkning och ekvationslösning:</p> <p>Här gör vi en uträkning, och inte löser en ekvation, skriv inte ordet Lös()</p>	$1000 \cdot 1.07^{10}$ $= 1967.15136$
<p>Här löser vi en ekvation, där vi har både höger och vänster led och en obekant.</p> <p>(Om man råkar skriva lös(...) och inte ha med ett likamedtecken så tolkas det som att du menar =0)</p>	$\text{Lös}(2000 = 1000 \cdot x^{10})$ $= \left\{ x = -\sqrt[10]{2}, x = \sqrt[10]{2} \right\}$