4111 Gäller följande olikheter? Motivera dina svar.

a) en rak vinkel + en spetsig vinkel < 270°

b) en rät vinkel + en trubbig vinkel > 270°

c) en spetsig vinkel + en trubbig vinkel < 180°

4111.

a) Ja, $\alpha = 180°$, $0° < \beta < 90°$ $\Rightarrow$

$180° < \alpha + \beta < 270°$

b) Nej, $\alpha = 90°$, $90° < \beta < 180°$ $\Rightarrow$

$180° < \alpha + \beta < 270°$

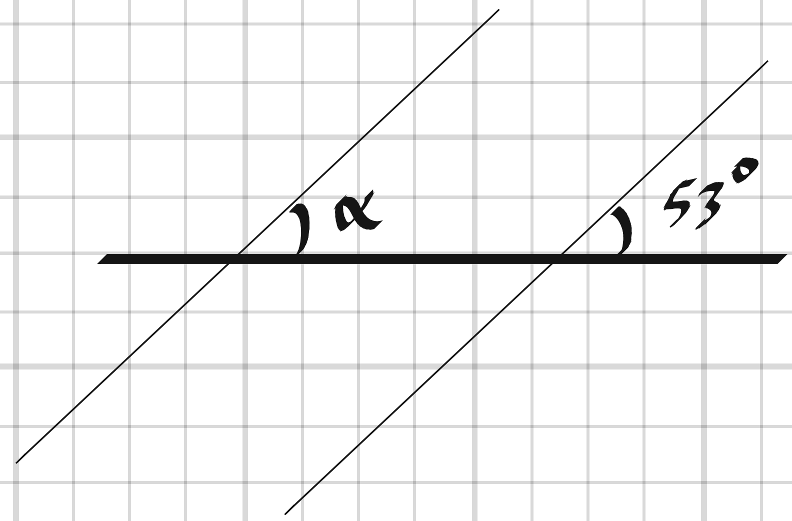
c) Nej, $0° < \alpha < 90°$, $90° < \beta < 180°$ $\Rightarrow$

$90° < \alpha + \beta < 270°$

4112 Beräkna vinkeln mellan visarna.

4112. $\frac{5}{12} \cdot 360° = 5 \cdot 30° = 150°$

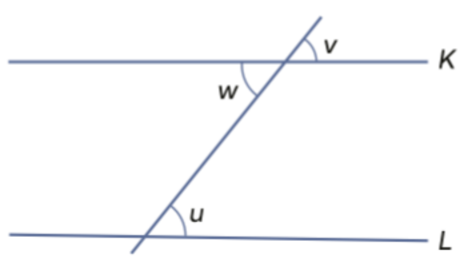
4113 Konstruera en uppgift där man ska beräkna en vinkel som bildas när två parallella linjer skärs av en tredje linje. Svaret ska vara 53°.



4113.

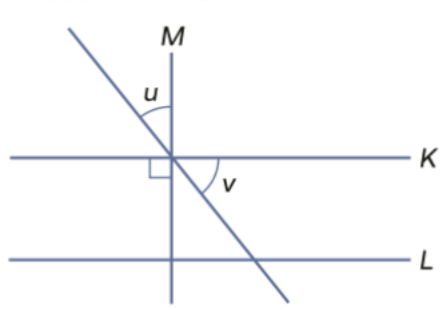
Hur stor är vinkeln α?

4114 I figuren är linjerna *K* och *L* inte parallella. Har några av vinklarna *u*, *v* och *w* samma storlek? Motivera ditt svar.



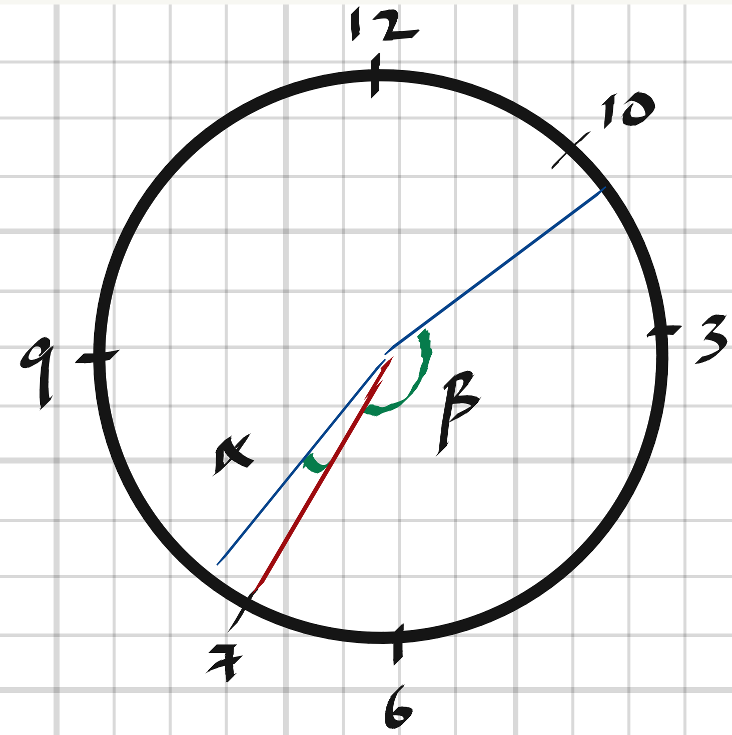
4114. Vertikalvinklarna v och w förblir lika.

4115 I figuren är linjerna *K* och *L* parallella. Linjen *M* bildar rät vinkel med *K* och *L* och vinkeln *u* är en tredjedel av vinkeln mellan *K* och *M*. Bestäm vinkeln *v*.



4115. $v = 90° - u = 90° - \frac{90°}{3} = \underline{60°}$

4116 Beräkna den minsta vinkeln mellan visarna när klockan är tolv minuter över sju.



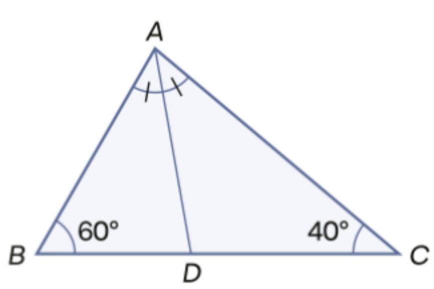
4116.

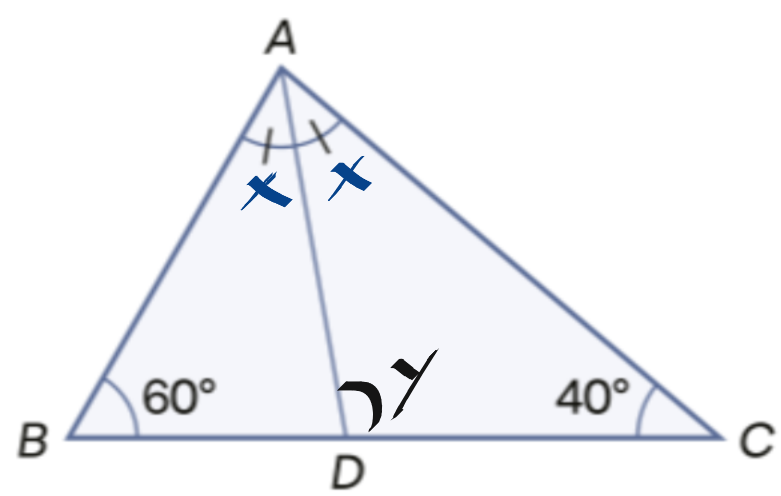
$$\alpha = \frac{5}{60} \cdot \frac{12}{60} \cdot 360^\circ = 6^\circ$$

$$\beta = \frac{35-12}{60} \cdot 360^\circ = 138^\circ$$

Minsta vinkeln $= \alpha + \beta = 6 + 138 = \underline{144^\circ}$

4123 I triangeln *ABC* är sträckan *AD* bisektris. Bestäm alla vinklar i triangeln *ADC*.





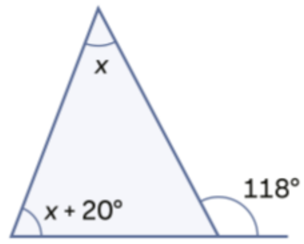
4123.

$$2x + 60^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

$$x + y + 40 = 180^\circ \Rightarrow y = 100^\circ$$

Vinklarna i ΔADC är $40^\circ, 40^\circ$ och 100°

4124 Bestäm vinkeln x.



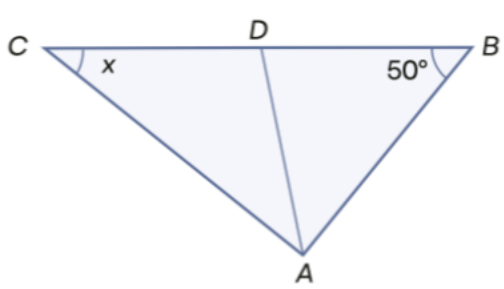
4124. $x + x + 20^\circ = 118^\circ \Rightarrow x = \underline{49^\circ}$

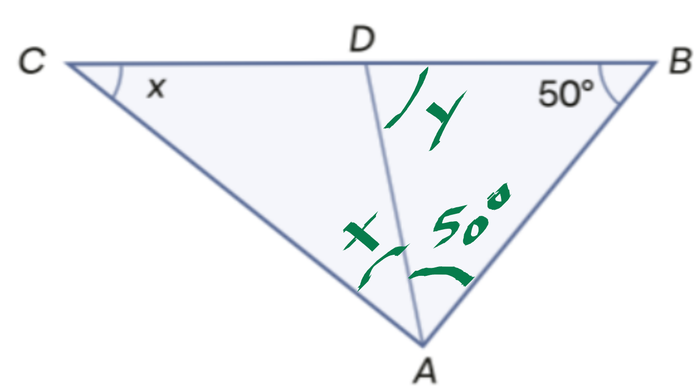
4125 Liam och Johanna ska göra en ritning till ett dansgolv. Hur stora ska vinklarna vara för att dansgolvet ska få formen av en regelbunden sexhörning?

4125. Vinkelsumman i en n-hörning $= 180^\circ \cdot (n-2)$

$\Rightarrow$ Vinkeln i en regelbunden sexhörning $= \dfrac{180^\circ \cdot (6-2)}{6} = \underline{120^\circ}$

4126 Sträckorna *AD*, *BD* och *DC* är lika långa. Hur stor är vinkeln x?





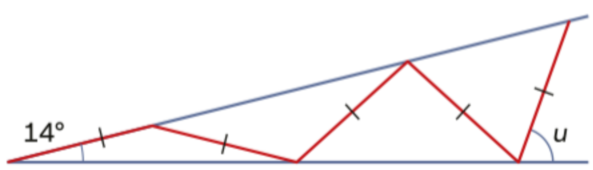
4126. $y = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$

$2x = y \Rightarrow x = \dfrac{80^\circ}{2} = \underline{40^\circ}$

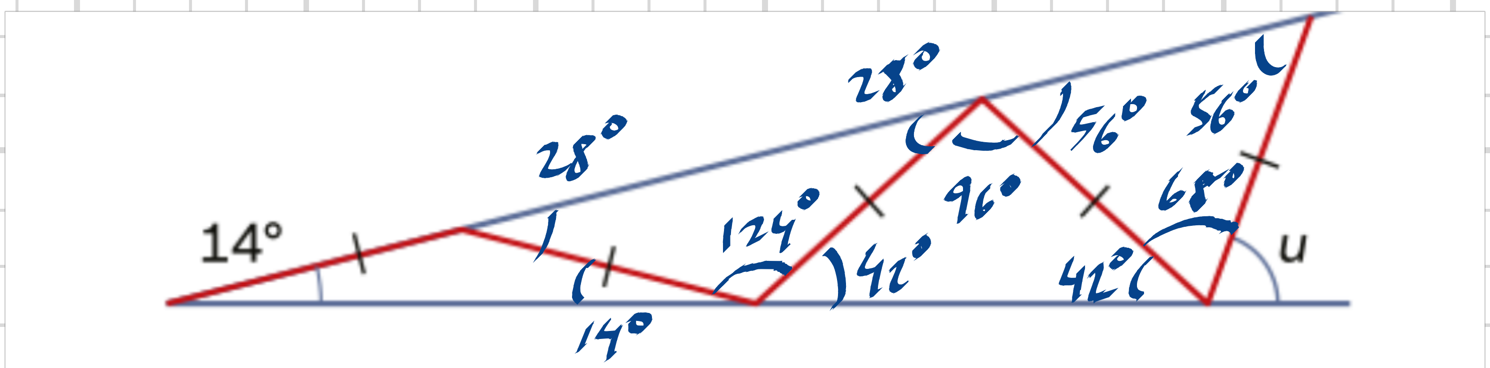
4127 Konstruera en uppgift till dina kamrater där de ska beräkna vinkelsumman i en månghörning. Svaret ska vara 1 440°.

4127. Beräkna vinkelsumman i en tiohörning.

4128 De markerade sträckorna är lika långa. Bestäm vinkeln u.



4128.



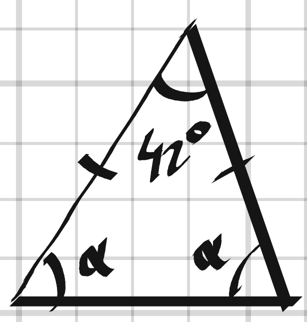
$u = 180° - 42° - 68° = \underline{70°}$

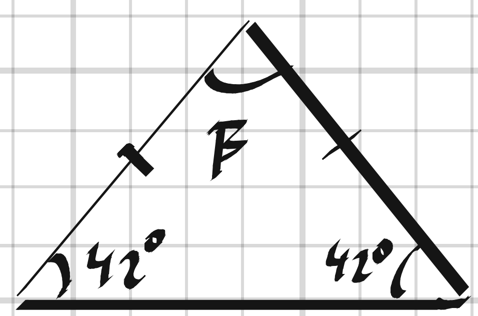
4129 I en likbent triangel är en vinkel 42°. Hur stora kan de övriga vinklarna vara?

4129.

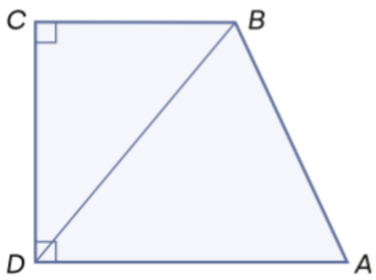
$\alpha = \dfrac{180° - 42°}{2} = \underline{69°}$

$\beta = 180° - 2 \cdot 42° = \underline{96°}$

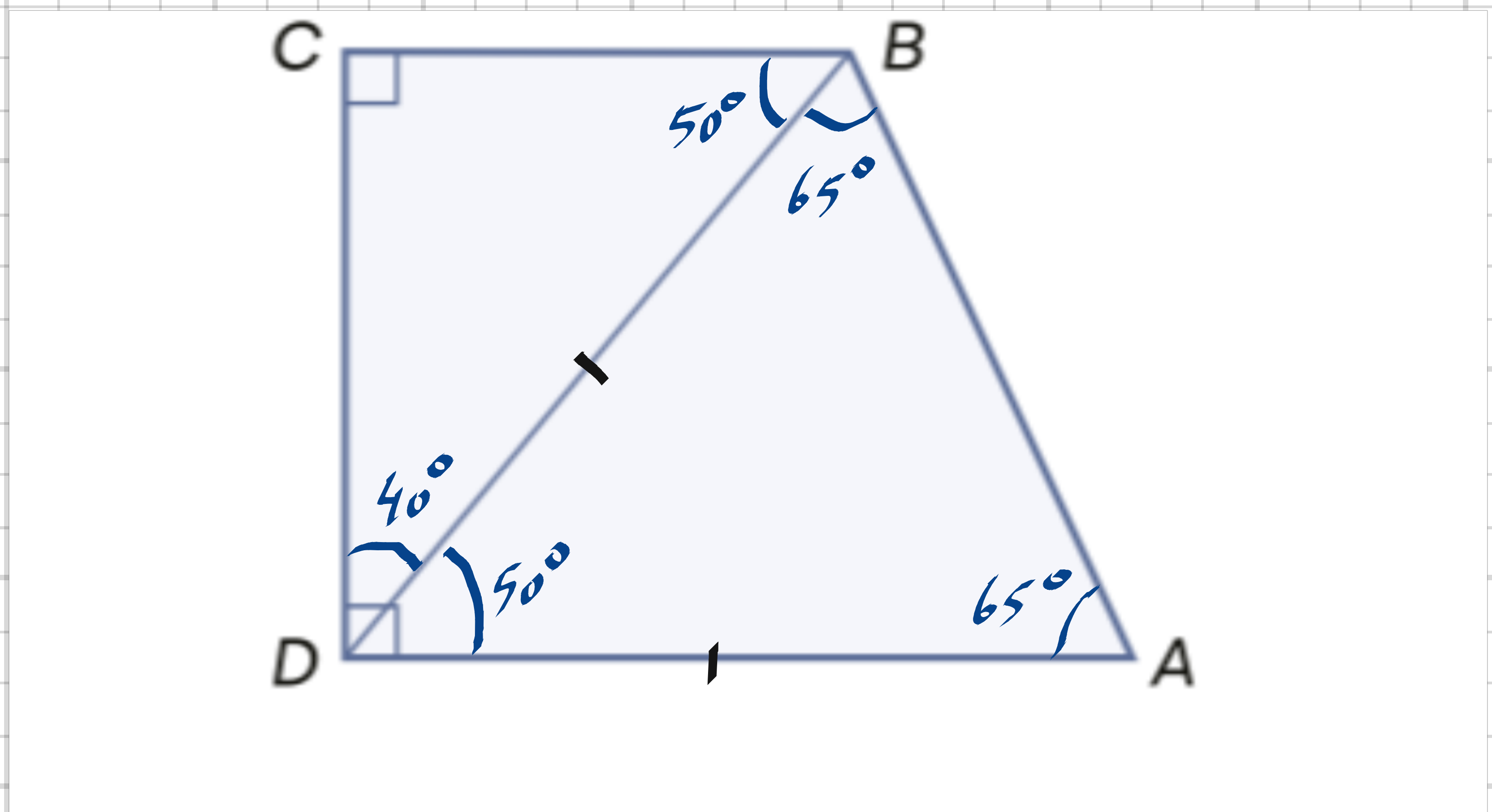




4130 I fyrhörningen *ABCD* är diagonalen *BD* och sidan *AD* lika långa. Vinkeln *BDC* är 40°. Bestäm ∧*BAD* och ∧*CBA*.



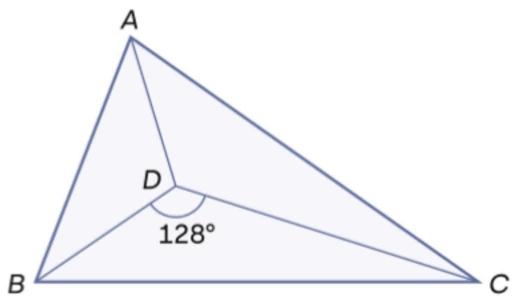
4130.



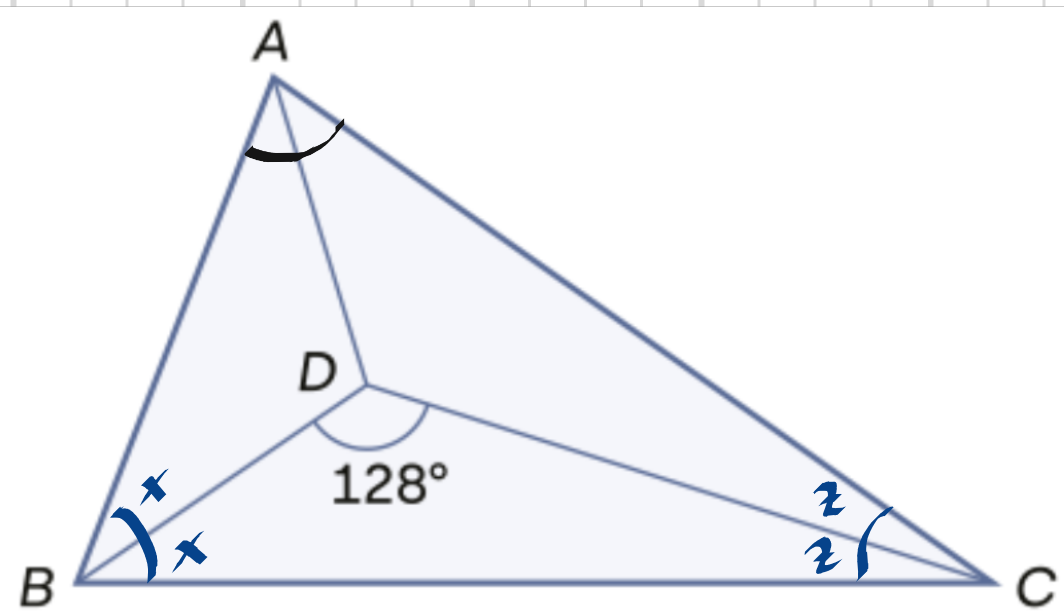
∧BAD = 65°

∧CBA = 115° (50° + 65°)

4131 Sträckorna *AD*, *BD* och *CD* är bisektriser i triangeln *ABC*. Hur stor är $\angle BAC$?



4131.



$$\angle BAC = 180^\circ - 2x - 2z = 180^\circ - 2(x+z) =$$

$$= 180^\circ - 2(180^\circ - 128^\circ) = \underline{76^\circ}$$

4138 Skriv av och sätt ut $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$ mellan påståendena. Motivera ditt svar.

a) $4x + 1 = 9$ ☐ $x = 2$

b) *Triangeln är rätvinklig* ☐ *Det finns två vinklar i triangeln som har summan 90°*

c) $x = 0$ ☐ $a^x = 1, a > 0$

4138.

a) $4x+1=9 \Leftrightarrow x=2$

Påståendet gäller åt bägge hållen.

b) Triangeln är rätvinklig $\Leftrightarrow$ Det finns två vinklar i triangeln som har summan 90°.

Påståendet gäller åt bägge hållen.

c) $x=0 \Rightarrow a^x=1,\ a>0$

$a^x=1,\ a>0$ gäller även om $x=1$ och $a=1$

4139 Visa med hjälp av beräkningar att följande implikationer gäller.

a) *Linjen L beskrivs av ekvationen* $y = 3x - 8 \Rightarrow$ *Punkten* $(1, -5)$ *ligger på linjen L*

b) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$ eller $x = 0$

c) *En vanlig symmetrisk tärning har sex sidor* $\Rightarrow$ *Sannolikheten att man får två treor i rad vid två tärningskast är 1/36*

4139. a) $3 \cdot 1 - 8 = -5$ #

b) $x(x-2) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 2$ #

c) $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ #

4140 Skriv av uppgiften och fyll i ett påstående till vänster om ekvivalenspilen, så att ekvivalensen gäller.

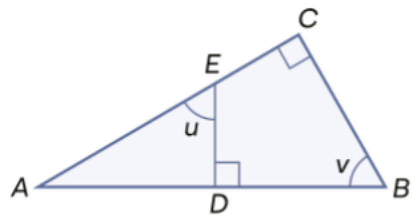
$\boxed{} \Leftrightarrow x^2 - 5x = x - 9$

4140 $x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = x - 9$

4141 Vilket samband finns mellan vinklarna *u* och *v*? Använd implikationer för att motivera ditt svar.



4141. $u + (180° - v) = 180° \Leftrightarrow \underline{u = v}$

4142 Betrakta följden av implikationer:

Sebastian delar ut reklamblad ⇒ Sebastian får en biobiljett

Sebastian får en biobiljett ⇒ Sebastian går på bio

Sebastian går på bio ⇒ Sebastian ser en komedi

Sebastian ser en komedi ⇒ Sebastian blir glad

Gäller följande implikation?

Att Sebastian delar ut reklamblad medför att Sebastian blir glad.

Motivera ditt svar.

4142. Ja, implikationen gäller förutsatt att hela händelsekedjan gäller.

4143 Det finns en implikation mellan följande uttryck, ekvationer och olikheter. Skriv av dem och sätt ut implikationspilen i rätt riktning mellan dem. Motivera ditt svar.

a) $x^2 - 121 = 0$ $\boxed{}$ $x = 11$

b) $a - b < 7$ $\boxed{}$ $a + b < 9$, *för alla positiva heltal a och b*

4143.

a) $x^2 - 121 = 0 \Leftarrow x = 11$

x kan också vara -11.

b) $a - b < 7 \Leftarrow a + b < 9$, för alla positiva heltal a och b

① $\Rightarrow$ $a - b < 7 \Rightarrow a + b < 7 + 2b$

Om det också gäller att $a + b < 9$ måste

$7 + 2b \leq 9 \Rightarrow b = 1, \quad 0 < a < 7$

② $\Leftarrow$ $a + b < 9 \Rightarrow a - b < 9 - 2b$

Om det också gäller att $a - b < 7$ måste

$9 - 2b \leq 7 \Rightarrow b \geq 1, \quad 0 < a < 8$

Villkor ② gäller om $b = 1$ och $a = 7$ vilket inte uppfylls av villkor ①

4144 Avgör om det är implikation eller ekvivalens mellan följande utsagor. Motivera ditt svar.

a) $f(x) = (x - 3)(x + 5)$

Grafen till f skär x-axeln i $(-5, 0)$ *och* $(3, 0)$

b) *Linjerna K och L har ekvationerna* $y = 2x - 8$ *och* $y = x - 8$

Linjerna K och L skär y-axeln i $(0, -8)$

4144.

a) Implikation, ty $f(x)$ ex.v kan vara $(x-3)(x+5)(x+8)$

b) Implikation, ty K och L ex.v kan vara $y=3x-8$ och $y=-x-8$

4145 Mellan följande likheter finns det antingen en implikation eller ekvivalens. Placera rätt sorts pil mellan uttrycken och motivera ditt svar.

$\sqrt{a^2} = x$ $\square$ $x = a$, för alla $a \geq 0$

4145. $\sqrt{a^2} = x \Leftrightarrow x = a$, för alla $a \geq 0$

Bivillkoret $a \geq 0$ gör att ekvivalens råder.

4146 Följande två utsagor handlar om en given rektangel.

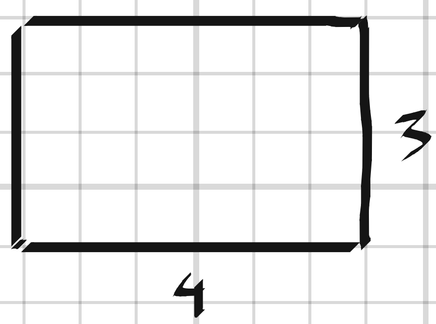
Rektangelns omkrets blir större

Rektangelns area blir större

Passar någon av symbolerna ⇒, ⇐ eller ⇔ mellan utsagorna? Motivera ditt svar.

4146. <u>Varken implikation eller ekvivalens gäller.</u>

Visas enklast med motbevis.



Omkrets = 14 l.e

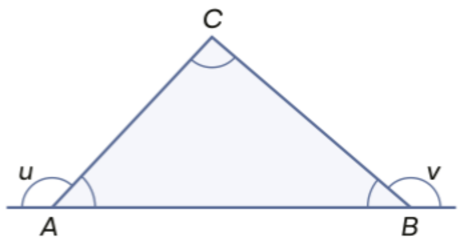
Area = 12 a.e.

Omkrets = 20 l.e.

Area = 9 a.e.

#

4147 Vinkeln u och vinkeln A är sidovinklar.



Betrakta följande implikationer.

u och $\angle A$ är sidovinklar $\Rightarrow$ $u + \angle A = 180°$

$u + \angle A = 180° \Rightarrow u = 180° - \angle A$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow$
$u = \angle A + \angle B + \angle C - \angle A$

$u = \angle A + \angle B + \angle C - \angle A \Rightarrow u = \angle B + \angle C$

a) Gäller det att vinkeln u är lika med summan av vinklarna B och C?

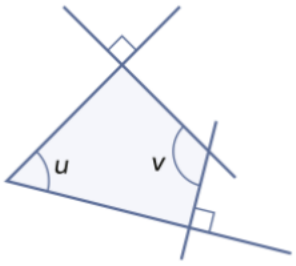
b) Gäller det att vinkeln v är lika med summan av vinklarna A och C? Använd implikationer för att motivera ditt svar.

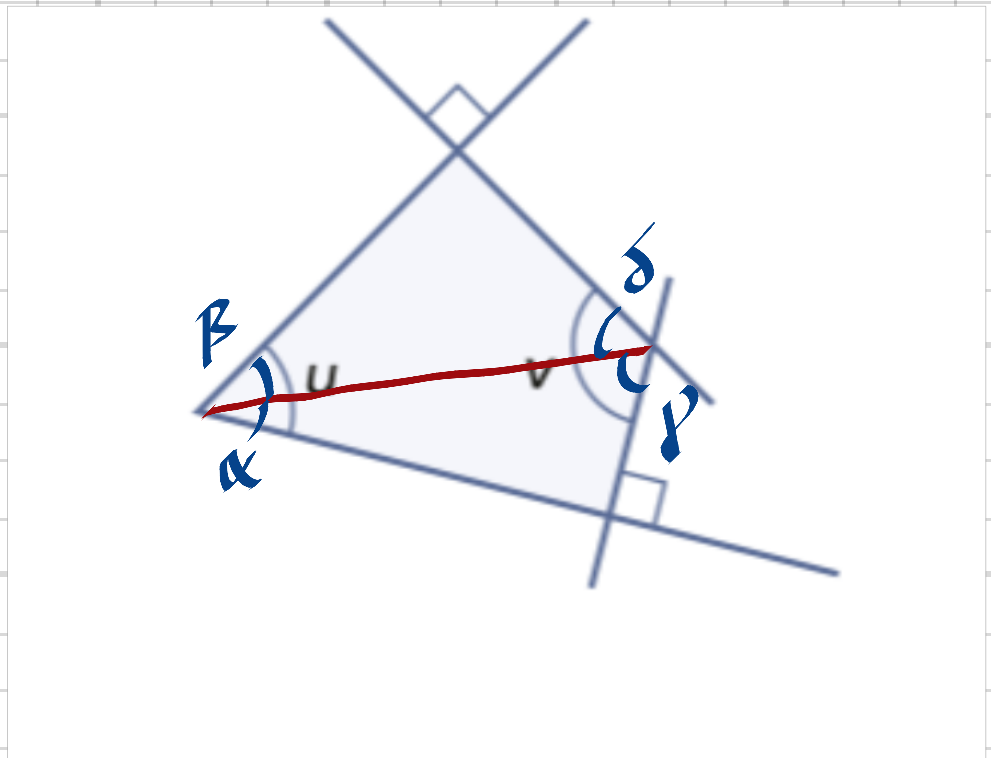
4147.

a) Ja, enligt beviset ovan vilket ger yttervinkelsatsen.

b) Ja, symmetrin i problemet gör att motsvarande bevis kan användas även för vinkeln v.

4156 Visa att $u + v = 180°$.





4156.

Vi vet att vinkelsumman i en triangel är $180° \Rightarrow$

$\alpha + \gamma = 90°$, $\beta + \delta = 90°$

$u + v = \alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 90° + 90° = 180°$

#

4157 Sven undersökte sambandet mellan diagonalen och sidan i kvadrater. Han ritade flera kvadrater, mätte och gjorde beräkningar och förde sedan in sina mätvärden i en tabell.

Sida (cm)	Diagonal (cm)	Diagonal/sida
1,5	2,1	1,40
3,6	5,1	1,42
5,2	7,2	1,39
6,9	9,7	1,41
10,7	15,1	1,42
15,6	21,8	1,40
24,5	34,4	1,41

a) Har Sven rätt när han påstår att det nu är bevisat att diagonalen d i en kvadrat beror av sidan s enligt $d = k \cdot s$ där k är en konstant som är ungefär 1,4? Motivera ditt svar.

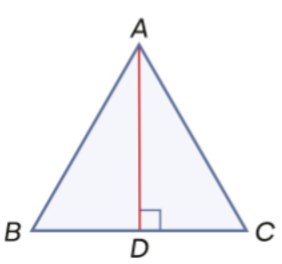
b) Hur påverkas giltigheten av Svens bevis om han mäter sida och diagonal i hundra kvadrater till?

4157.

a) Det exakta svaret är $k = \sqrt{2}$. Han får således en bra uppskattning men något reellt bevis är det inte.

b) Nogrannheten kommer förmodligen att öka, men det är fortfarande inte bevisat att det gäller i alla fall.

4158 Avgör utifrån resonemanget här nedanför om det är bevisat att vinkeln mellan höjden och en av sidorna i en liksidig triangel är 30°. Triangeln i figuren är liksidig och AD är höjden mot BC.



$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$	Vinklarna är lika i liksidiga trianglar
$\angle ADC = 90°$	Höjden är rätvinklig mot basen
$\angle DAC + 90° + 60° = 180°$	Vinkelsumman i en triangel
$\angle DAC = 180° - 90° - 60° = 30°$	

Enligt samma resonemang är $\angle DAB$ också 30°.

4158. Beviset är korrekt, men bygger på att vinkelsumman i en triangel tidigare anses bevisat.

4159 Enligt ett påstående är summan av tre på varandra följande positiva heltal delbar med 3, dvs. att summan delat med tre är ett heltal.

a) Undersök om påståendet verkar gälla genom att testa några exempel.

b) Bevisa att påståendet gäller.

4159. a) $3+4+5=12=3\cdot 4$ ok!

$6+7+8=21=3\cdot 7$ ok!

b) $x+(x+1)+(x+2)=3x+3=3\cdot(x+1)$ #

4160 Enligt ett påstående är summan av två udda tal jämn.

a) Undersök om påståendet verkar gälla genom att testa några exempel.

b) Bevisa att påståendet gäller.

> **Tips!** Ett godtyckligt jämnt tal kan skrivas $2k$ och ett godtyckligt udda tal kan skrivas $2m+1$, där k och m är heltal.

4160. a) $3+5=8$ ok!

$7+11=18$ ok!

b) $(2a+1)+(2b+1)=2(a+b)+2=2(a+b+1)=2k$ #

4161 Visa att differensen mellan två jämna tal är ett jämnt tal.

4161. $2a-2b=2(a-b)=2k$ #

4162 Visa att differensen mellan två udda tal är ett jämnt tal.

4162. $(2a+1)-(2b+1)=2a-2b=2(a-b)=2k$ #

4163 Enligt ett påstående är produkten av två på varandra följande heltal delbar med 2.

a) Testa först genom ett par konkreta exempel om ovanstående påstående verkar gälla.

b) Bevisa att påståendet gäller.

4163. a) $3\cdot 4=12=2\cdot 6$ ok!

$7\cdot 8=56=2\cdot 23$ ok!

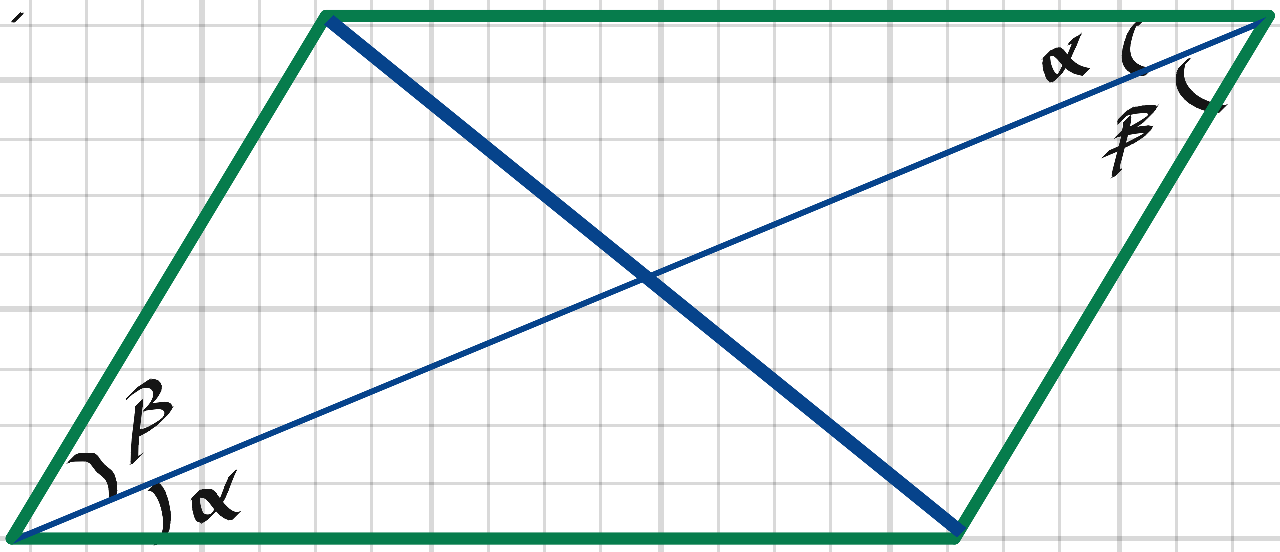
b) Den ena faktorn är jämn och den andra udda $\Rightarrow$

1:a faktorn jämn: $2a\cdot(2a+1)=2\cdot(2a^2+a)$ #

2:a faktorn jämn: $(2a+1)\cdot(2a+2)=4a^2+4a+2a+2=2\cdot(2a^2+2a+a+1)$ #

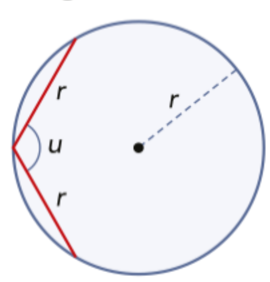
4164 En parallellogram är en fyrhörning med parvis parallella sidor. Visa att motstående vinklar i en parallellogram är lika stora.

4164.

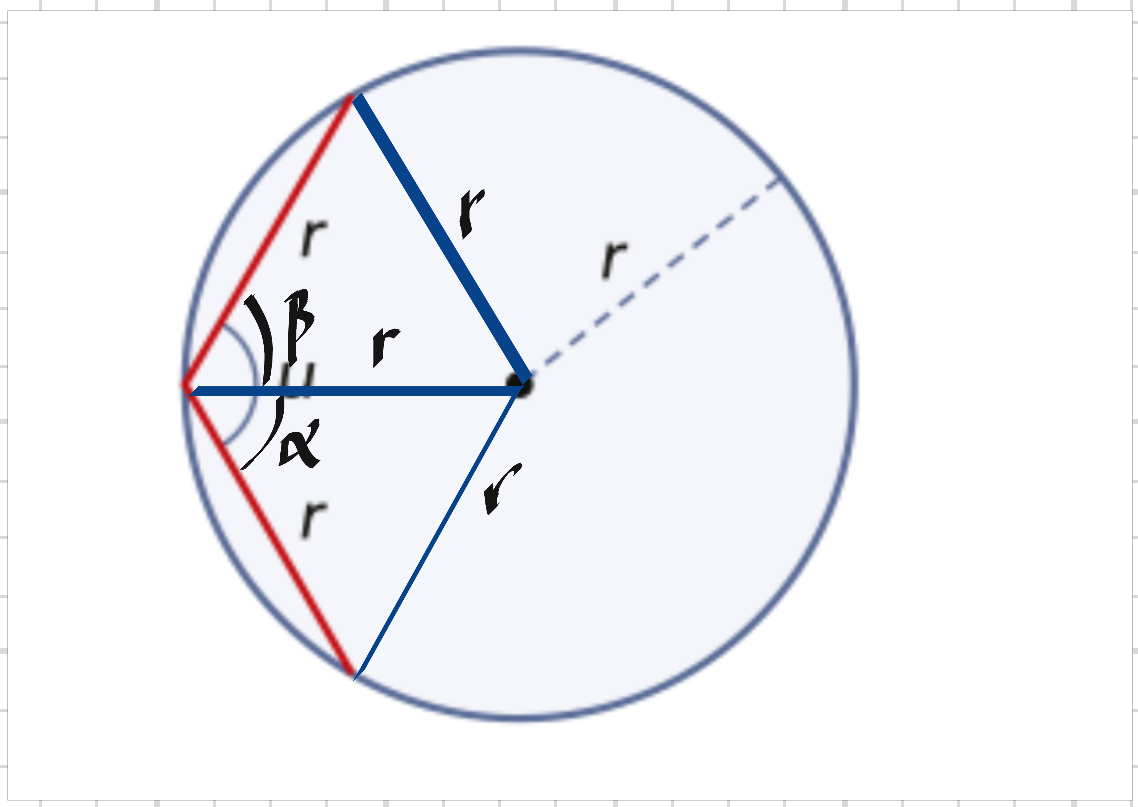


α-α resp β-β blir alternatvinklar.
Således blir bägge vinklarna α+β. #

4165 De markerade sträckorna i figuren är lika långa som cirkelns radie. Visa att $u = 120°$.



4165.



Man kan få två liksidiga trianglar med vinklarna $\alpha = \beta = 60°$ => $u = \alpha + \beta = 120°$. #

4166 Visa att det aritmetiska medelvärdet av två naturliga tal, a och b, är större än eller lika med talens geometriska medelvärde, dvs. att $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

4166 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$

$\Rightarrow$ $(a+b)^2 \geq 4ab$

$\Rightarrow$ $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$\Rightarrow$ $a^2 + 2ab + 2ab - 2ab + b^2 \geq 4ab$

$\Rightarrow$ $(a-b)^2 + 4ab \geq 4ab$

$\Rightarrow$ $(a-b)^2 \geq 0$ #

4167 I en likbent triangel är basens längd a och längden av de lika långa sidorna är b. Visa att $a + b < \frac{3}{4} \cdot$ triangelns omkrets.

Tips! I en triangel är summan av två sidors längder alltid större än den tredje sidans längd.

$b + b > a$

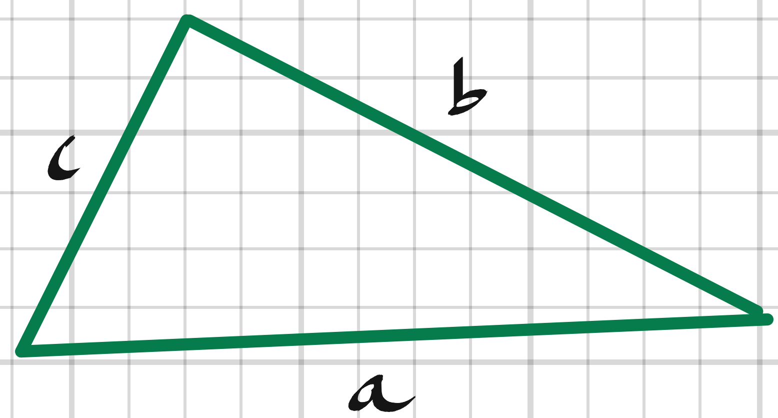
4167.

$$a + b < \frac{3}{4} \cdot (a + 2b)$$

$$\Rightarrow \quad 4a + 4b < 3a + 6b$$

$$\Rightarrow \quad 2b > a \qquad \#$$

4168 Visa att det i varje triangel finns en sida som är längre än eller lika med medelvärdet av de andra två sidorna.



4168. $a \geq \frac{b + c}{2}$

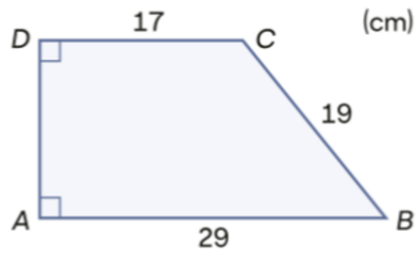
$$\Rightarrow \quad b + c \leq 2a$$

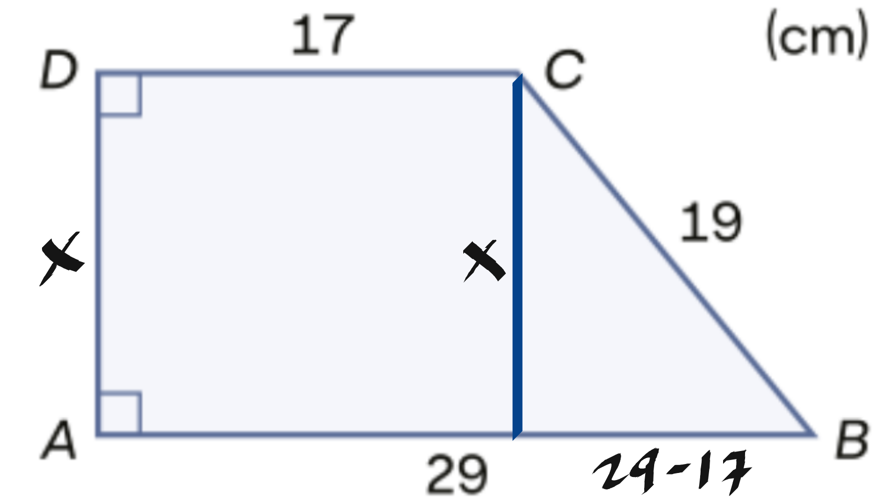
I en triangel måste alltid gälla att $a \geq b \geq c$.

$$\Rightarrow \quad b \leq a \, , \; c \leq a \quad \Rightarrow$$

$$b + c \leq 2a \qquad \#$$

4173 Beräkna längden av sidan *AD* i parallelltrapetset.

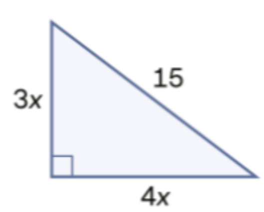




4173.

$$AD = x = \sqrt{19^2 - (29-17)^2} = \sqrt{361-144} = \sqrt{217} \approx \underline{14.7 \text{ cm}}$$

4174 Beräkna triangelns sidlängder.



4174.

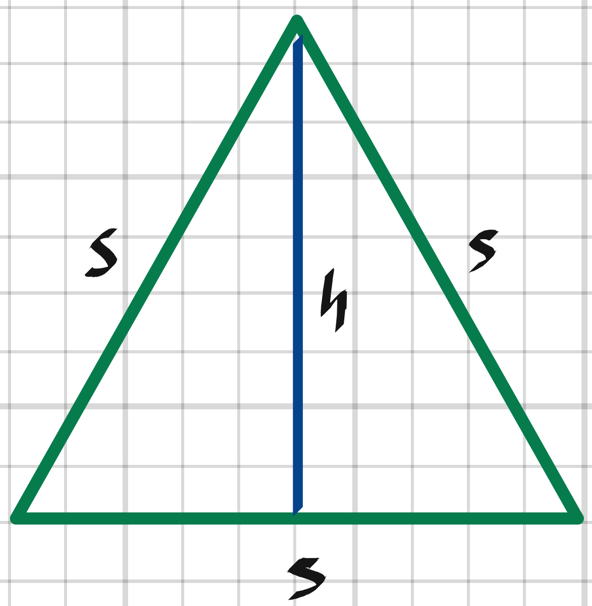
$$(3x)^2 + (4x)^2 = 15^2$$

$$25x^2 = 225$$

$$x = \pm\sqrt{9} = 3 \quad \Rightarrow$$

<u>Sidlängderna är 9, 12 och 15 l.e.</u>

4175 Hur långa är sidorna i en liksidig triangel med höjden 32 cm?



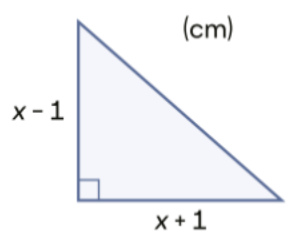
4175.

$$s^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\frac{3s^2}{4} = h^2 \Rightarrow$$

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}} h \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 32 \approx \underline{37 \text{ cm}}$$

4176 Bestäm längden av hypotenusan om triangelns area är 100 cm^2.



4176.

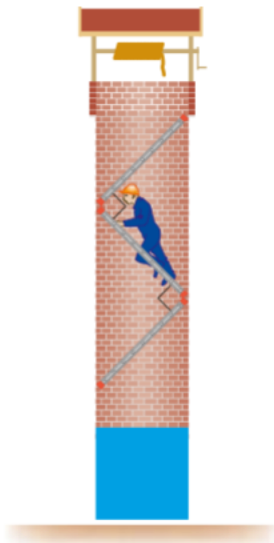
$$(x+1)(x-1) = 2 \cdot 100$$

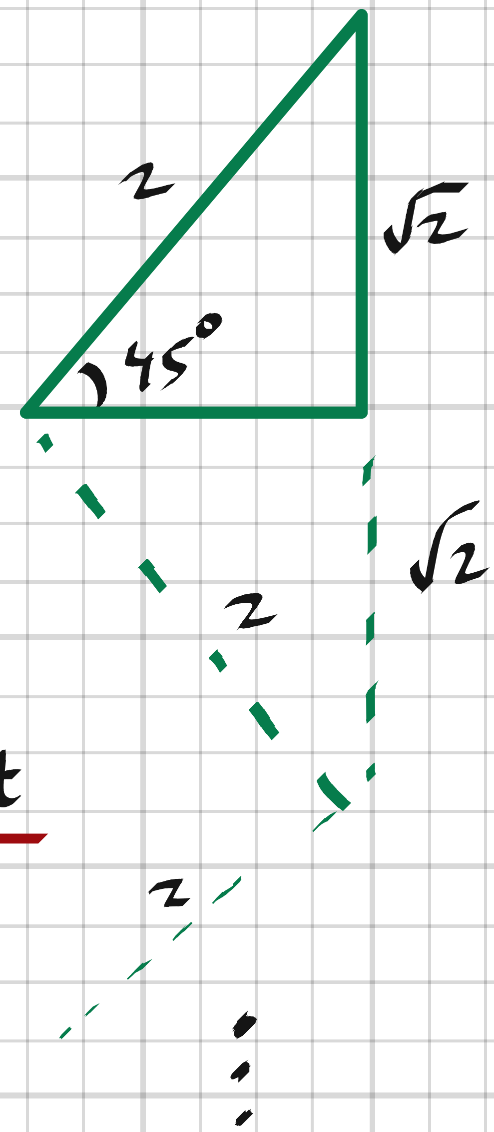
$$x^2 - 1 = 200$$

$$x = (\pm)\sqrt{201} \approx 14{,}18$$

$$\text{Hypotenusan} = \sqrt{(x+1)^2 + (x-1)^2} \approx \sqrt{15{,}18^2 + 13{,}18^2} \approx \underline{20{,}1 \text{ cm}}$$

4177 Sverker ska försöka ta sig ner i en 17 meter djup brunn genom att lägga ett antal två meter långa stegar rätvinkligt mot varandra. Hur många stegar behövs för att han ska kunna klättra ner i brunnen?





4177. Antal stegar $= \frac{17}{\sqrt{2}} = \underline{12 \text{ st}}$

4178 Visa att om sidlängderna i en godtycklig triangel står i proportion 3:4:5 till varandra, så är triangeln rätvinklig.

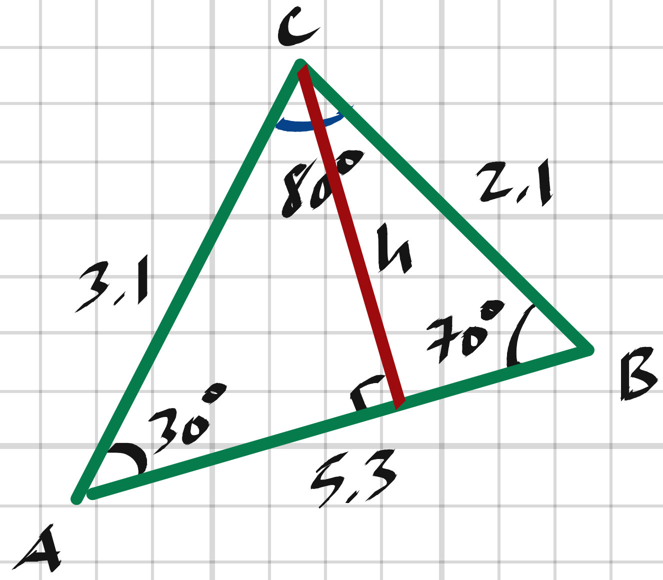
4178. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 \Rightarrow$

Pythagoras sats gäller $\Rightarrow$ Triangeln är rätvinklig #

4179 I Klaras matematikbok finns följande uppgift:

> I triangeln *ABC* är sidorna 2,1 cm, 3,1 cm och 5,3 cm. Vinklarna $A = 30°$ och $B = 70°$. Beräkna höjden mot den längsta sidan.

Hon tror att det är något som inte stämmer i uppgiften. Har hon rätt eller fel? Motivera ditt svar.



4179.

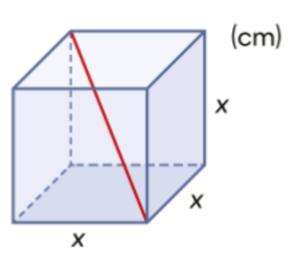
$$\begin{cases} h = 3{,}1 \cdot \sin 30° = 1{,}55 \text{ cm} \\ h = 2{,}1 \cdot \sin 70° \approx 1{,}97 \text{ cm} \end{cases}$$

Olika värden på h vilket inte är möjligt.

$a + b = 2{,}1 + 3{,}1 = 5{,}2 < c$ vilket inte är möjligt.

$\Rightarrow$ Klara har rätt, något mått måste vara fel.

4180 I kuben här nedanför är rymddiagonalen rödmarkerad. Rymddiagonalen är 30 cm lång. Bestäm kubens sidlängd.



4180. $x^2 + x^2 + x^2 = 30^2$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{30^2}{3} = 300 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{300} \approx 17 \text{ cm}$$

4187 Använd omvändningen av Pythagoras sats för att avgöra om triangeln är rätvinklig. Triangelns hörn ligger i punkterna

a) (2, 2), (−1, 2) och (0, 4)

b) (−2, −1), (2, −2) och (−1, 3)

4187.

a)
$$a^2 = (2-2)^2 + (2-1)^2 = 1$$
$$b^2 = (4-2)^2 + (0+1)^2 = 5$$
$$c^2 = (4-2)^2 + (0-2)^2 = 8 \quad \Rightarrow$$

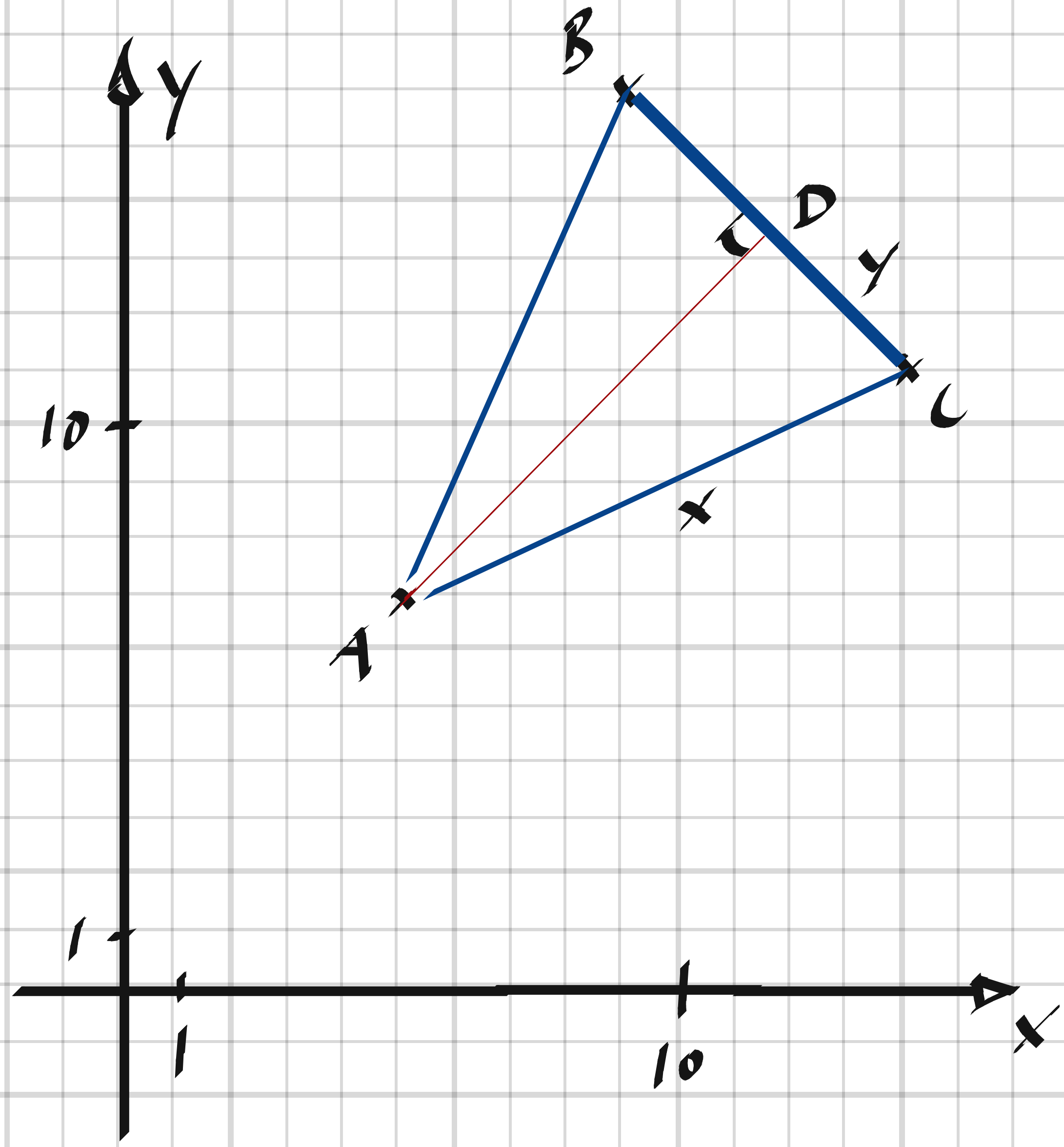
$c^2 \neq a^2 + b^2 \Rightarrow$ Triangeln är ej vinkelrät.

b)
$$a^2 = (-2+1)^2 + (2+2)^2 = 17$$
$$b^2 = (3+2)^2 + (-1-2)^2 = 34$$
$$c^2 = (3+1)^2 + (-1+2)^2 = 17 \quad \Rightarrow$$

$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow$ Triangeln är vinkelrät.

4189 En likbent triangel har hörnen i punkterna $A = (5, 7)$, $B = (9, 16)$ och $C = (14, 11)$. Sträckan AD är höjden från A till sidan BC. Beräkna längden av AD.

4189.



$$x^2 = (11-7)^2 + (14-5)^2 = 16 + 81 = 97$$

$$(2y)^2 = (16-11)^2 + (14-9)^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow y^2 = 12{,}5$$

$$AD = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{97 - 12{,}5} = \sqrt{84{,}5} \approx 9{,}2 \text{ l.e.}$$

4191 Andragradskurvan $y = x^2 - 8x$ och linjen $y = 2x - 9$ skär varandra i två punkter.

a) Beräkna avståndet mellan punkterna.

b) Bestäm mittpunkten mellan punkterna.

4191.

$$x^2 - 8x = 2x - 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

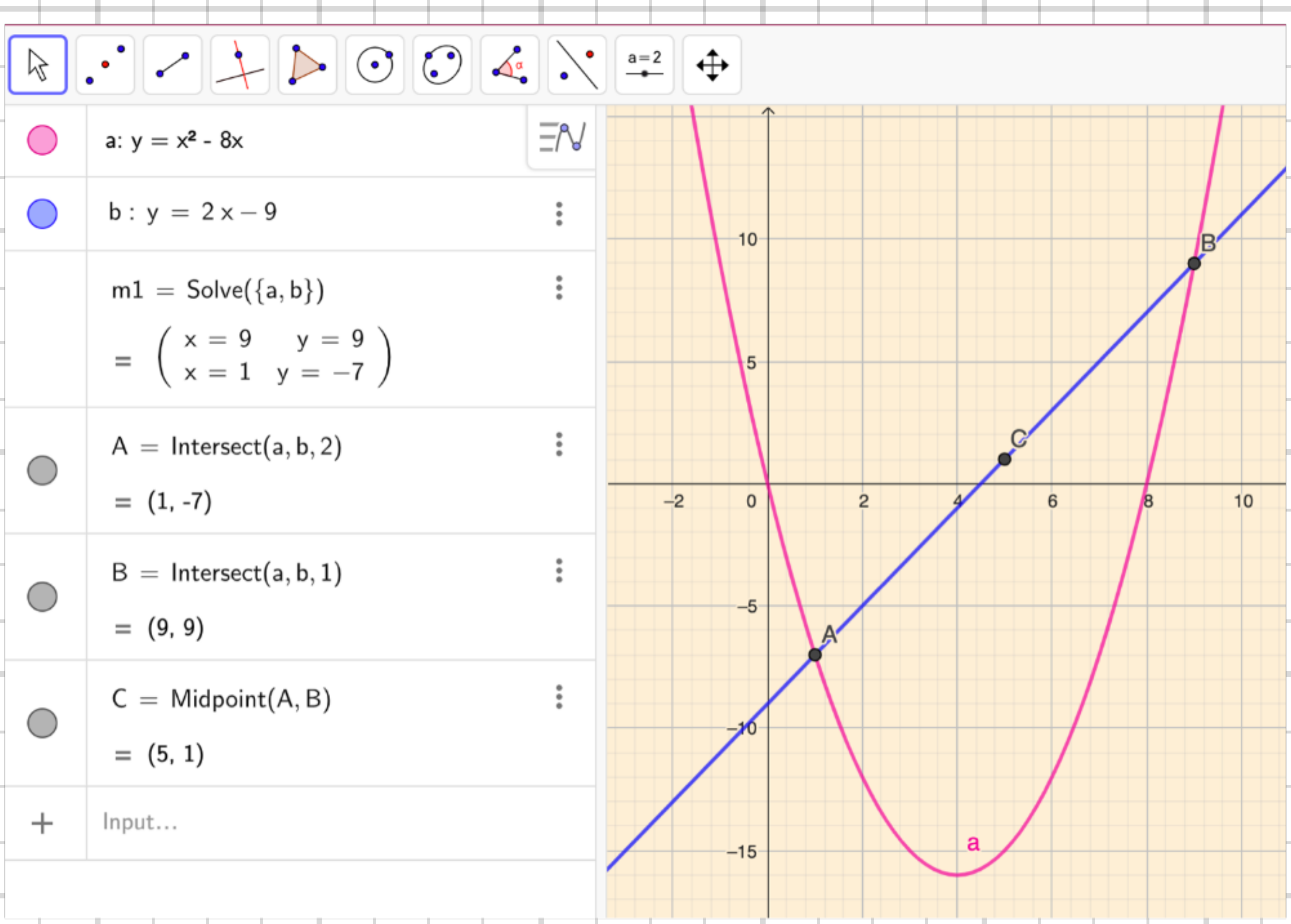
$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2 - 9 = -7$$

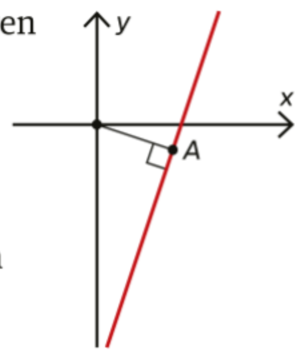
$$x_2 = 9 \Rightarrow y_2 = 18 - 9 = 9$$

a) $d = \sqrt{(9+7)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{320} \approx \underline{17{,}9 \text{ l.e.}}$

b) $M = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{-7+9}{2}\right) = \underline{(5, 1)}$



4192 Den röda räta linjen i figuren beskrivs av ekvationen $y = 3x - 4$. Punkten A är den punkt på linjen som befinner sig på kortast avstånd från origo. Bestäm koordinaterna för A.



4192. Linjens ekvation: $y = -\frac{x}{3}$

$$-\frac{x}{3} = 3x - 4$$

$$-x = 9x - 12$$

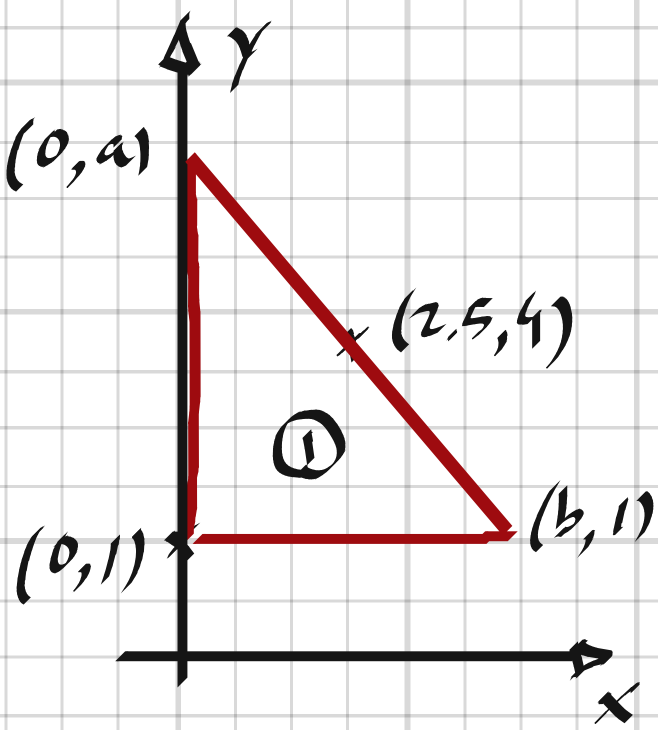
$$10x = 12$$

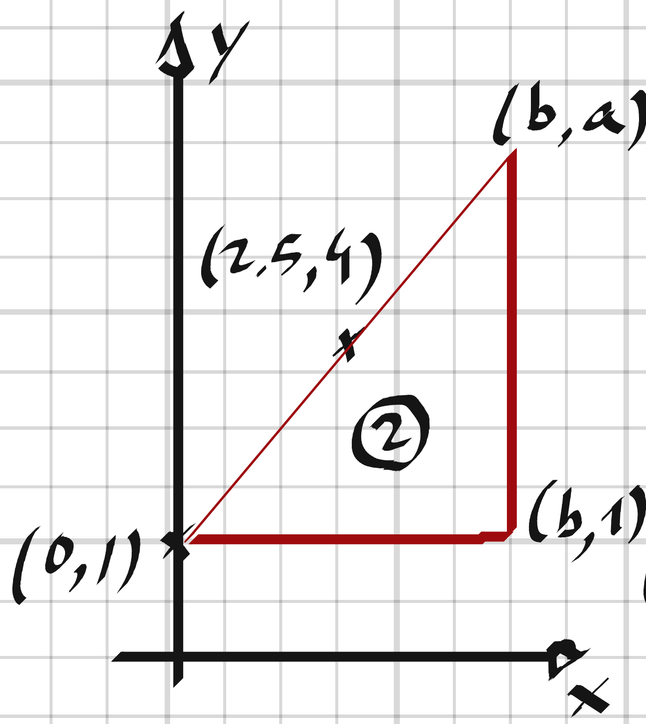
$$x = \frac{6}{5}, \quad y = -\frac{6}{5 \cdot 3} = -\frac{2}{5}$$

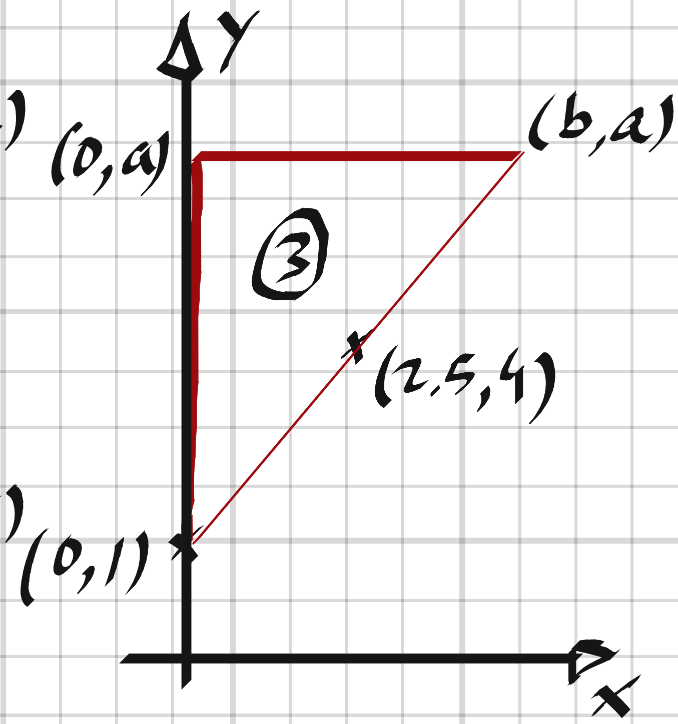
$$\underline{A = \left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)}$$

4193 En rätvinklig triangel ritas i ett koordinatsystem så att kateterna är parallella med x- respektive y-axeln. Ett av triangelns hörn ligger på y-axeln i punkten (0, 1). Hypotenusans mittpunkt har koordinaterna (2,5; 4). Var ligger triangelns övriga hörn?

4193.







$$\frac{a+1}{2} = 4 \Rightarrow a = 7$$

$$\frac{b+0}{2} = 2.5 \Rightarrow b = 5$$

Triangelns övriga hörn ligger i

1 : (5,1) och (0,7)

2 : (5,1) och (5,7)

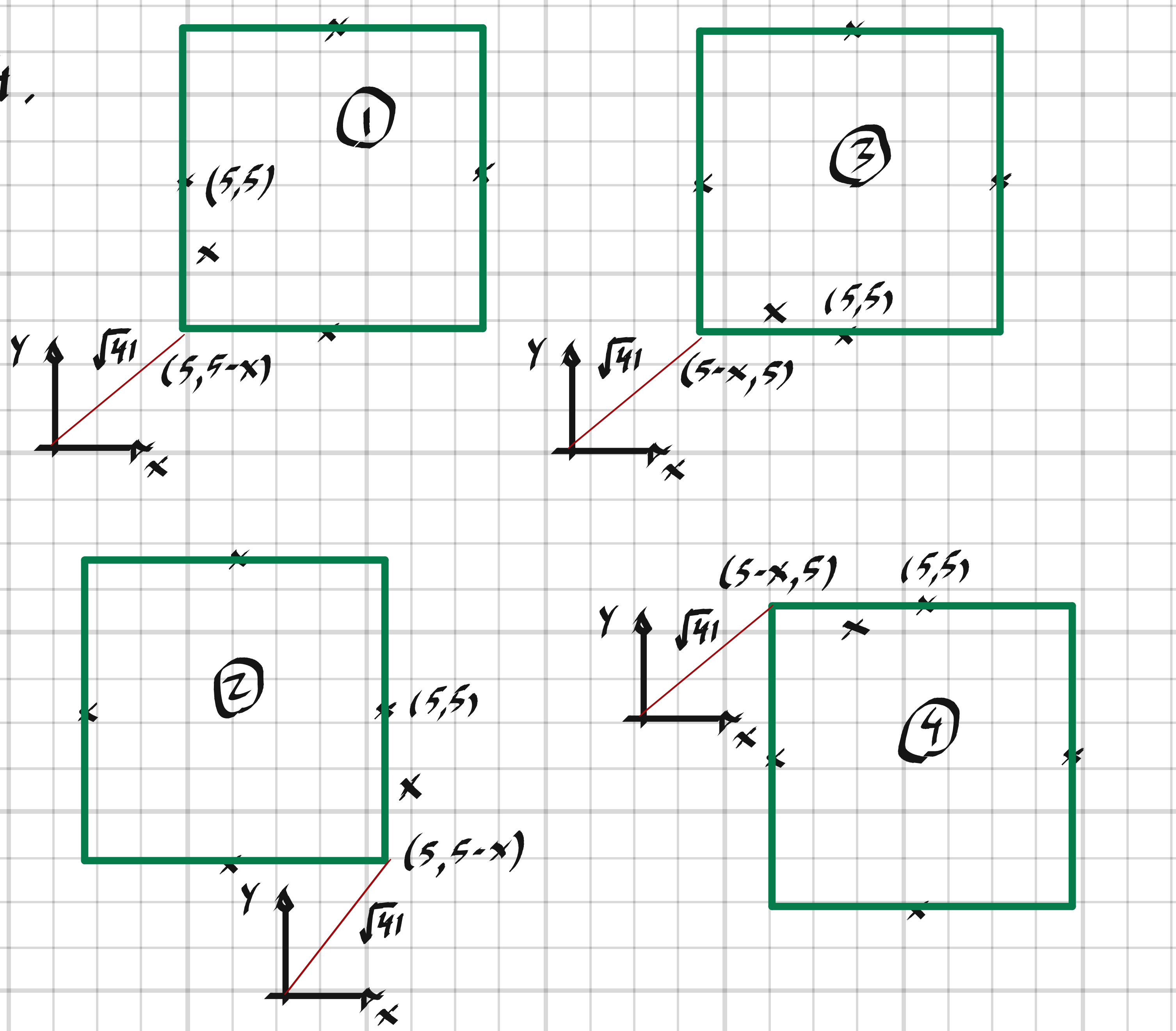
3 : (0,7) och (5,7)

4194 Punkten (5, 5) är mittpunkt på en sida i en kvadrat, vars sidor är parallella med koordinataxlarna. Till ett av hörnen i kvadraten är avståndet från origo $\sqrt{41}$ l.e.

a) Ange hörnets koordinater om dess koordinater är positiva heltal.

b) Hur många sådana kvadrater är möjliga att rita i första kvadranten?

4194.



a) $5^2 + (5-x)^2 = 41$

$25 + 25 - 10x + x^2 = 41$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$(x-1)(x-9) = 0$

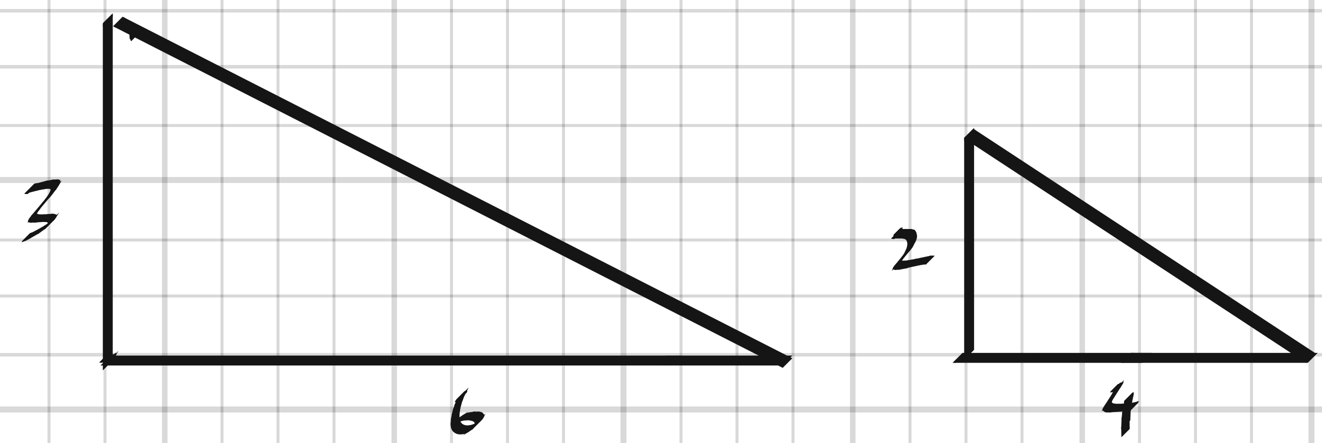
$5 - x > 0 \Rightarrow x = 1$

Hörnkoordinaten $= (5,4)$ eller $(4,5)$

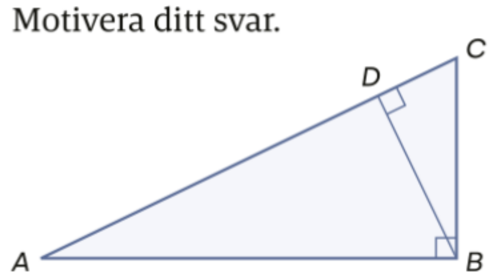
b) 4 st

4213 Konstruera två likformiga trianglar, där förhållandet mellan motsvarande sidor är 3:2.

4213.



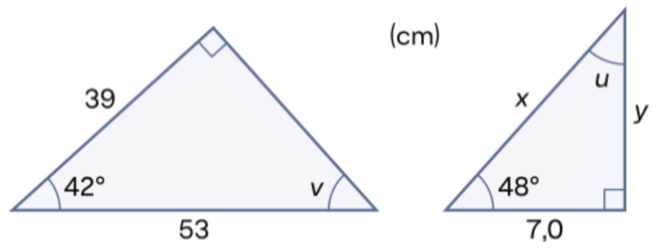
4214 Vilka trianglar i figuren är likformiga? Motivera ditt svar.



4214. Alla tre är likformiga.

- Alla tre har en rät vinkel
- ΔABC och ΔABD delar vinkeln $\angle BAC$
- ΔABC och ΔBCD — " — $\angle ACB$
- Vinkeln $\angle DBC = 90° - \angle ACB$ och är således lika med vinkeln $\angle BAC$.

4215 Bestäm vinklarna u och v samt sidorna markerade med x och y.



4215.

$v = 90^\circ - 42^\circ = \underline{48^\circ}$

$u = 90^\circ - 48^\circ = \underline{42^\circ}$

$x = \dfrac{7}{\cos 48^\circ} \approx \underline{10.5 \text{ cm}}$

$y = 7 \cdot \tan 48^\circ \approx \underline{7.8 \text{ cm}}$

Not: Siffrorna i uppgiften är kraftigt avrundade.

4216 Vilka ord saknas i texterna här nedanför?

a) *Trianglar är likformiga om de … i tre vinklar.*

b) *Trianglar är likformiga om … mellan motsvarande sidor är … .*

c) *Det är inte säkert att månghörningar är likformiga bara för att … mellan motsvarande sidor är … .*

d) *Det är inte säkert att två månghörningar är likformiga även om … i den ena månghörningen är … … som vinklarna i den andra.*

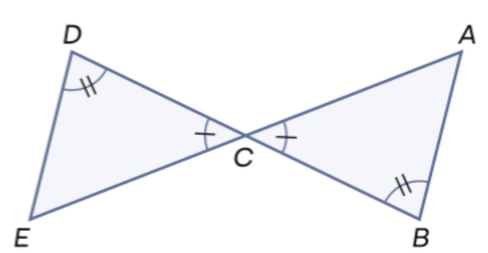
4216. a) överensstämmer

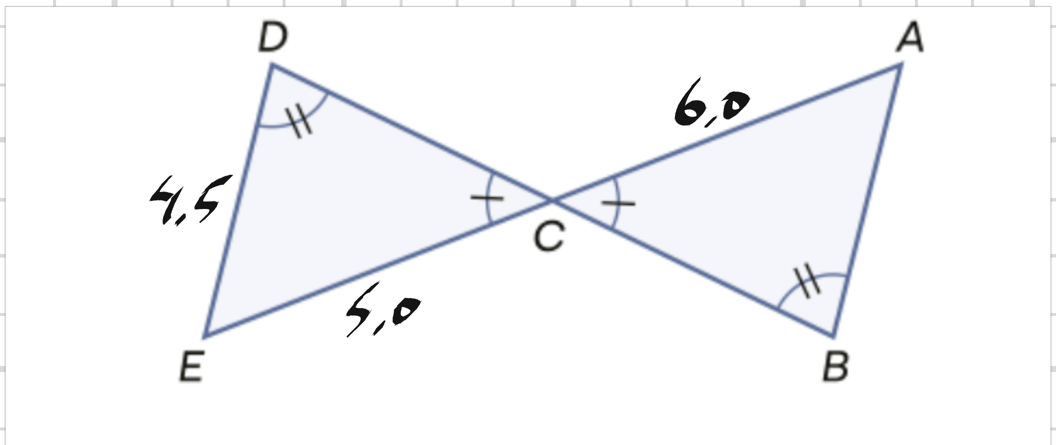
b) förhållandet, lika

c) förhållandet, lika

d) vinklarna, lika stora

4217 I figuren är DE parallell med AB. Dessutom gäller att är $|DE| = 4{,}5$ cm, $|AC| = 6{,}0$ cm och $|EC| = 5{,}0$ cm. Beräkna längden av sidan AB.

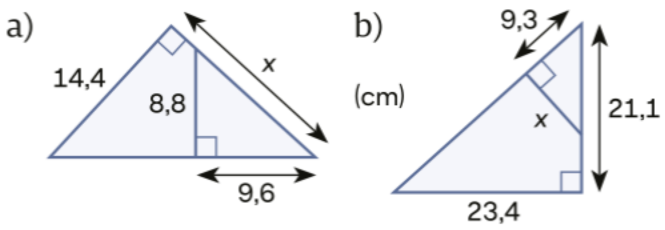




4217. $\Delta CDE \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$$\frac{|AB|}{6} = \frac{4{,}5}{5} \Rightarrow |AB| = \frac{6 \cdot 4{,}5}{5} = 5{,}4 \text{ cm}$$

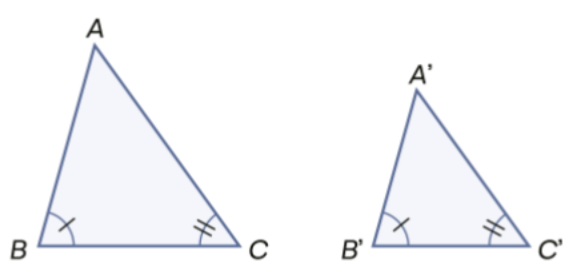
4218 Bestäm längden av de sträckor som är markerade med *x*.



4218. a) $\dfrac{x}{14{,}4} = \dfrac{9{,}6}{8{,}8} \Rightarrow x = \dfrac{14{,}4 \cdot 9{,}6}{8{,}8} \approx \underline{15{,}7 \text{ cm}}$

b) $\dfrac{x}{9{,}3} = \dfrac{23{,}4}{21{,}1} \Rightarrow x = \dfrac{9{,}3 \cdot 23{,}4}{21{,}1} \approx \underline{10{,}3 \text{ cm}}$

4219 Trianglarna i figuren är likformiga.



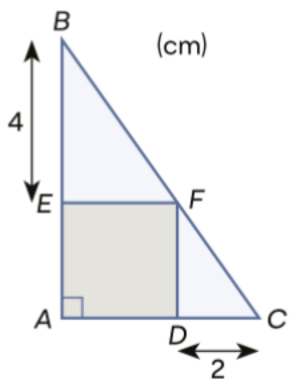
Visa att likformigheten medför att förhållandet mellan två sidor i den ena triangeln är lika med förhållandet mellan motsvarande sidor i den andra triangeln, dvs.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$$

4219. $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$

$$\frac{\cancel{|A'B'|}}{|BC|} \cdot \frac{|AB|}{\cancel{|A'B'|}} = \frac{\cancel{|BC|}}{|B'C'|} \cdot \frac{|A'B'|}{\cancel{|BC|}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \quad \#$$

4220 I en rätvinklig triangel *ABC* finns en grå kvadrat *AEFD* inritad. Sträckan *BE* är 4 cm och sträckan *CD* är 2 cm.



Visa att den grå kvadratens area är 8 cm².

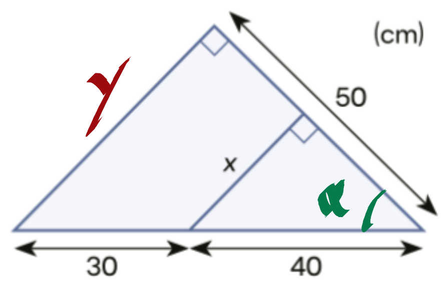
(Np Ma2c vt 2015)

4220. x = kvadratens sida $\Rightarrow$ Arean $= x^2$

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{2}$$

$$x^2 = 8 \text{ cm}^2$$

4221 Bestäm längden av sträckan markerad med *x*.



4221.

$$\begin{cases} \text{①} \quad \dfrac{y}{70} = \dfrac{x}{40} \\ \text{②} \quad y = \sqrt{70^2 - 50^2} \end{cases}$$

①: $y = \dfrac{7x}{4} \Rightarrow y^2 = \dfrac{49x^2}{16}$

②: $y^2 = 70^2 - 50^2 = 2400$

① + ②: $\dfrac{49x^2}{16} = 2400$

$$49x^2 = 38400$$

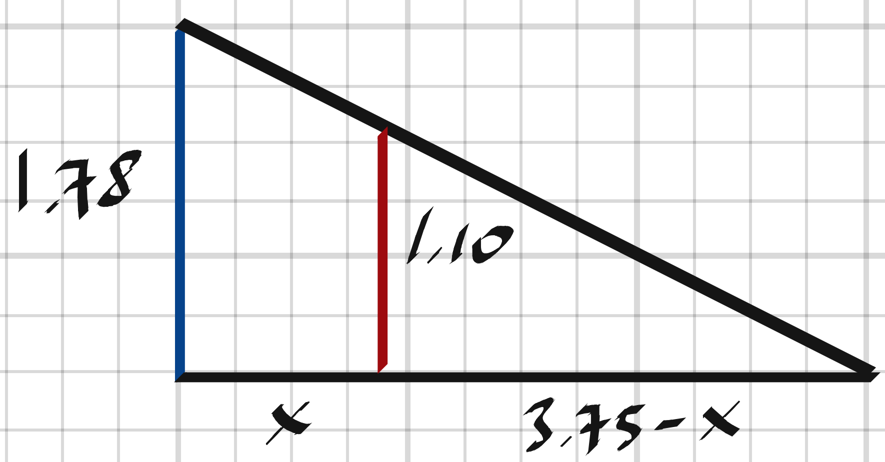
$$x = (\pm) \sqrt{\frac{38400}{49}} = \underline{28 \text{ cm}}$$

Alt. lösning:

$$x = 40 \cdot \sin \alpha = 40 \cdot \sin\left(\arccos \frac{50}{70}\right) = \underline{28 \text{ cm}}$$

4222 Johanna som är 1,78 m lång får en viss tid under en solig dag en skugga som är 3,75 m. Hon vill helt skugga sin lillebror Torsten, som är 1,10 m lång. Hur långt ifrån honom kan hon som längst stå?

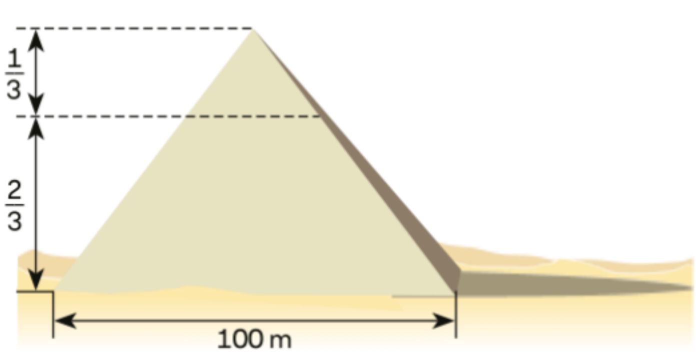
4222.

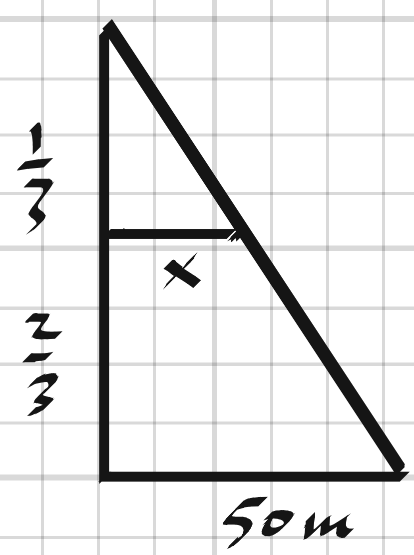


$$\frac{3{,}75 - x}{1{,}10} = \frac{3{,}75}{1{,}78} \Rightarrow$$

$$x = 3{,}75 - 1{,}10 \cdot \frac{3{,}75}{1{,}78} = \underline{1{,}43 \text{ m}}$$

4230 Pyramiderna i Giza byggdes för flera tusen år sedan. Beräkna hur stor arean av den kvadratiska platån på toppen av pyramiden var när 2/3 av pyramiden var färdigbyggd.





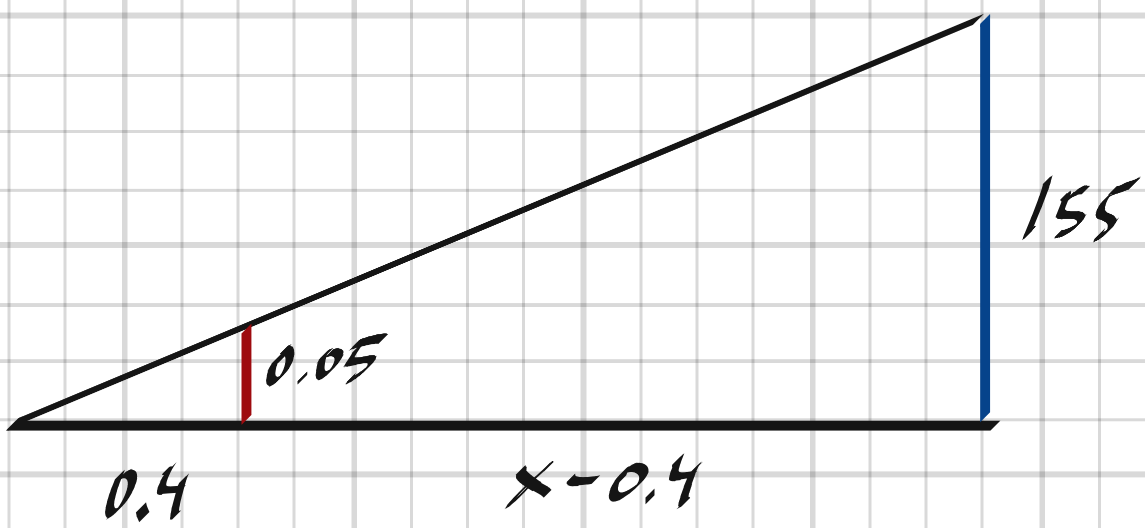
4230.

$$\frac{x}{1/3} = \frac{50}{1} \Rightarrow x = \frac{50}{3}$$

$$\text{Arean} = (2x)^2 = \left(\frac{100}{3}\right)^2 \approx \underline{1100 \text{ m}^2}$$

4231 Rickard är på väg till Kaknästornet, men vet inte hur långt från tornet han befinner sig. Han vet dock att Kaknästornet är 155 m högt. För att bedöma avståndet, sträcker han ut sin hand 40 cm från sitt vänstra öga och ser till att tornet får plats exakt mellan tummen och pekfingret. Avståndet mellan tummen och pekfingret mäter Rickard till 5 cm. Nu vet jag hur långt jag befinner mig från tornet, säger Rickard. Bestäm avståndet från platsen där Rickard står till Kaknästornet.

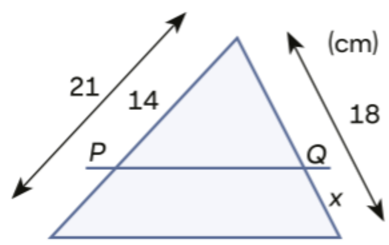
4231.



$$\frac{x}{155} = \frac{0.4}{0.05} \Rightarrow \underline{x = 1240 \text{ m}}$$

(Höjden upp till ögat försummas)

4232 I figuren är PQ en parallelltransversal. Beräkna längden av sträckan markerad med x.



4232.

$$\frac{x}{18-x} = \frac{21-14}{14}$$

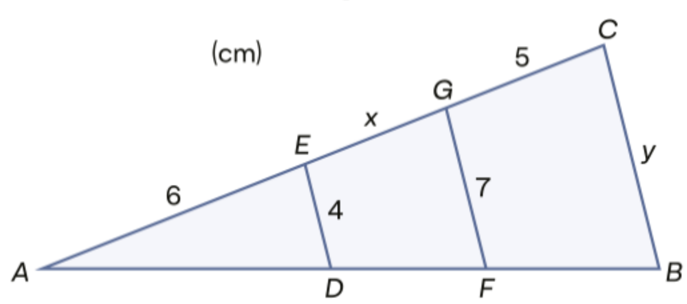
$$14x = 7\cdot(18-x)$$

$$14x = 126-7x$$

$$21x = 126$$

$$\underline{x = 6 \text{ cm}}$$

4233 I figuren är sträckorna DE, FG och BC parallella. Beräkna längden av sträckorna markerade med x och y.

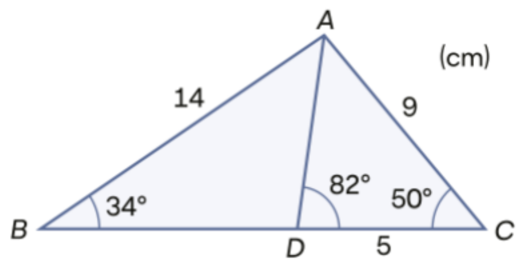


4233.

$$\frac{x+6}{7} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{7\cdot 6}{4} - 6 = \frac{9}{2}\text{ cm} = \underline{4{,}5\text{ cm}}$$

$$\frac{y}{6+x+5} = \frac{4}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}\left(6+\frac{9}{2}+5\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{31}{2} = \underline{\frac{31}{3}\text{ cm} \approx 10\text{ cm}}$$

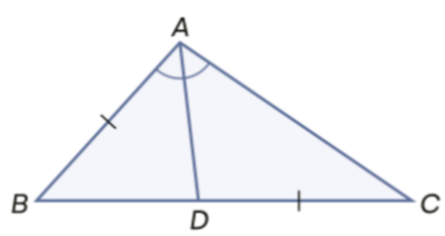
4234 Beräkna längden av sträckan BD.



4234. $\angle BAD = \angle DAC = 48^\circ \Rightarrow AD$ bisektris $\Rightarrow$

$$\frac{14}{|BD|} = \frac{9}{5} \Rightarrow |BD| = \frac{14 \cdot 5}{9} = \frac{70}{9} \approx \underline{7{,}8 \text{ cm}}$$

4235 I figuren är AD bisektris. Lika långa sträckor är markerade. Visa att $|AC| \cdot |BD| = |AB|^2$.

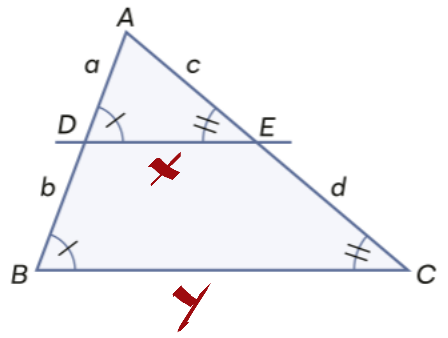


4235

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|}$$

$$|CD| = |AB| \Rightarrow |AC| \cdot |BD| = |AB|^2 \quad \#$$

4236 Enligt transversalsatsen delar en parallelltransversal två sidor i en triangel enligt samma förhållande. Bevisa transversalsatsen med hjälp av figuren.



4236. $\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{a+b} \\[2ex] \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{c+d} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{a+b} \\[2ex] \dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{c+d} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

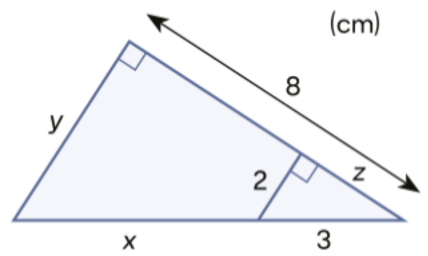
$$a(c+d) = c(a+b)$$

$$\cancel{ac} + ad = \cancel{ac} + bc$$

$$ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \#$$

4237 Beräkna längden av sträckorna markerade med x, y och z.



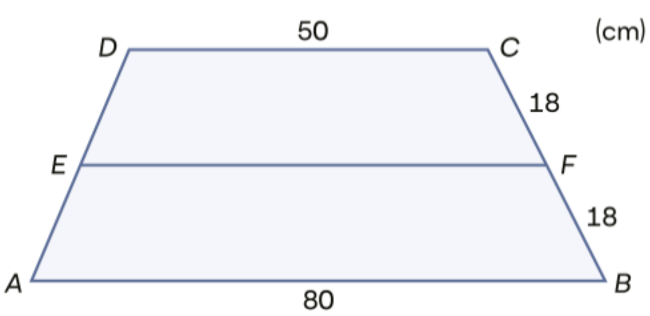
4237.

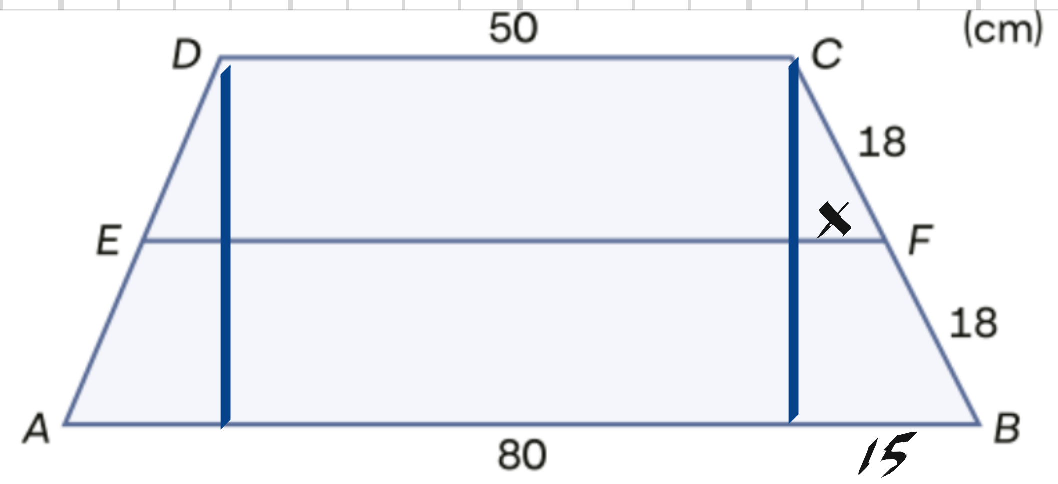
$$z = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \approx \underline{2{,}2 \text{ cm}}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{2}{z} \Rightarrow y = \frac{16}{\sqrt{5}} \approx \underline{7{,}2 \text{ cm}}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{8-z}{z} \Rightarrow x = \frac{3(8-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \approx \underline{7{,}7 \text{ cm}}$$

4238 I figuren är sträckorna AB, CD, och EF parallella. Bestäm längden av sträckan EF.





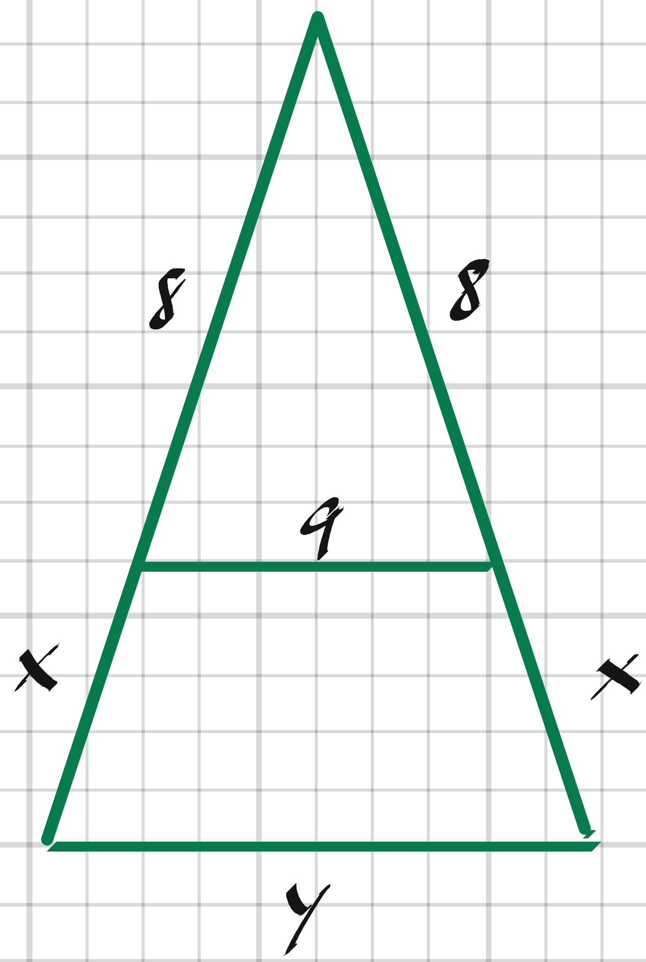
4238.

$$\frac{x}{18} = \frac{15}{36} \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 15}{36} = \frac{15}{2}$$

$$EF = 50 + 2x = 50 + 15 = \underline{65 \text{ cm}}$$

4239 I en likbent triangel dras en linje så att linjen delar triangeln i en topptriangel och ett parallelltrapets. Topptriangelns bas blir gemensam med en av sidorna i parallelltrapetset och får längden 9,0 cm. Topptriangelns andra två sidor blir då 8,0 cm vardera. Beräkna längden av parallelltrapetsets sidor om topptriangeln har lika stor omkrets som parallelltrapetset.

(Np Ma2c vt 2014)



4239.

$$\begin{cases} 2x + y + 9 = 25 & (1) \\ \dfrac{y}{8+x} = \dfrac{9}{8} & (2) \end{cases}$$

(2): $y = \frac{9}{8}(8+x) = 9 + \frac{9}{8}x$

(1) + (2): $2x + 9 + \frac{9}{8}x + 9 = 25$

$$x\left(2 + \frac{9}{8}\right) = 7$$

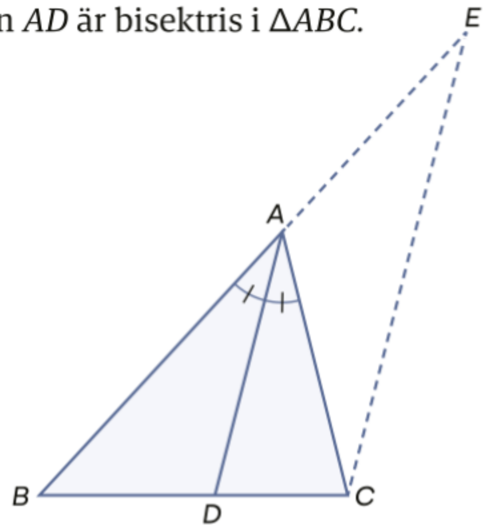
$$\frac{25}{8}x = 7$$

$$x = \frac{7 \cdot 8}{25} \approx 2{,}2 \text{ cm}$$

$$y = 9 + \frac{9}{8} \cdot \frac{56}{25} \approx 11{,}5 \text{ cm}$$

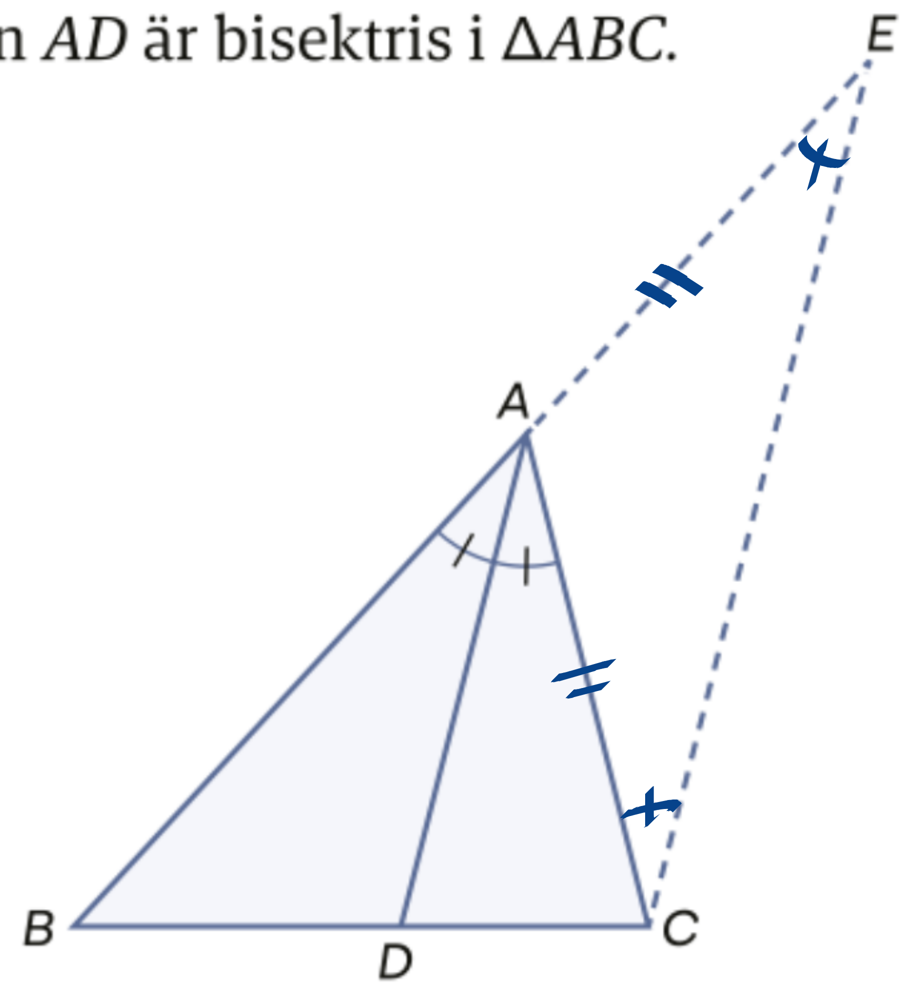
Sidorna är 2,2, 2,2, 9 och 11,5 cm

4240 Sträckan *AD* är bisektris i ΔABC.



Vi har förlängt sidan *AB* från hörnet *A*, och sedan dragit en linje från *C* parallell med bisektrisen tills den skär den förlängda linjen genom *AB* i punkten *E*. Fullfölj det påbörjade beviset och visa att bisektrissatsen gäller, dvs. att $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

ckan *AD* är bisektris i ΔABC.



4240.

$\angle ACE = \angle CAD$ (vertikalvinklar)

$\angle AEC = \angle BAD$ (likabelägna vinklar) $\Rightarrow$

ΔACE likbent $\Rightarrow |AE| = |AC|$

$\Delta ABD \sim \Delta BCE \Rightarrow$

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|BD| + |DC|}{|AB| + |AE|}$$

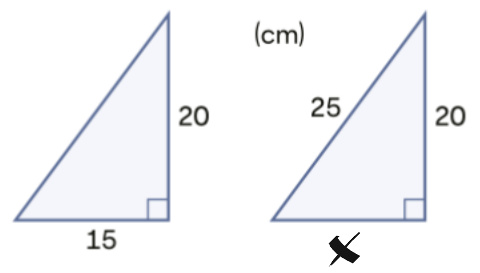
$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|BD| + |DC|}{|AB| + |AC|}$$

$$|BD| \cdot (|AB| + |AC|) = |AB| \cdot (|BD| + |DC|)$$

$$\cancel{|BD| \cdot |AB|} + |BD| \cdot |AC| = \cancel{|AB| \cdot |BD|} + |AB| \cdot |DC| \Rightarrow$$

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{AC} \quad \#$$

4247 Är trianglarna kongruenta? Motivera ditt svar.



4247.

$$x = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = 15 \Rightarrow$$

Ja, ty de har två sidor och mellanliggande vinkel gemensamma.

4248 Vilka ord saknas i texterna här nedanför?

a) *Månghörningar är kongruenta om de överensstämmer i motsvarande … och … .*

b) *Trianglar är kongruenta om de överensstämmer i … sidor och den … vinkeln.*

c) *Trianglar är kongruenta om de överensstämmer i … sidor.*

d) *Om två trianglar överensstämmer i … vinklar och den … sidan, så är de kongruenta.*

4248.

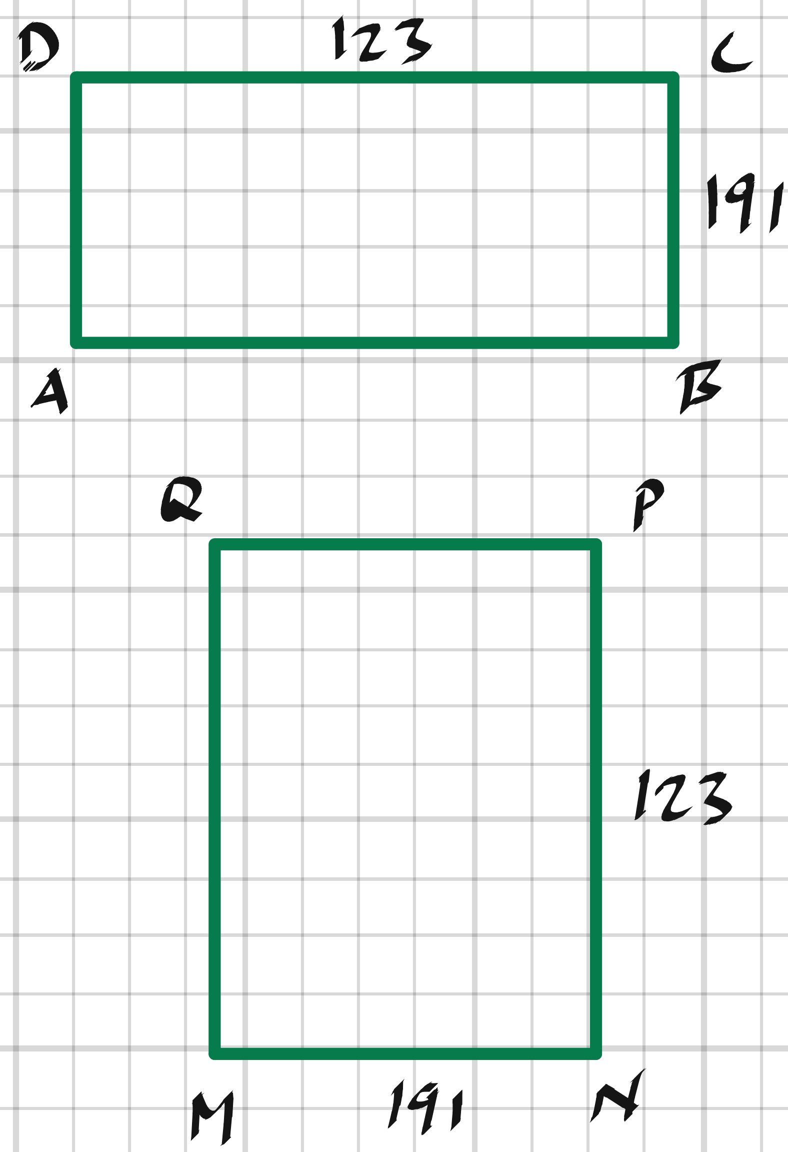
a) vinklar, sidor

b) två, mellanliggande

c) tre, alla

d) två, mellanliggande

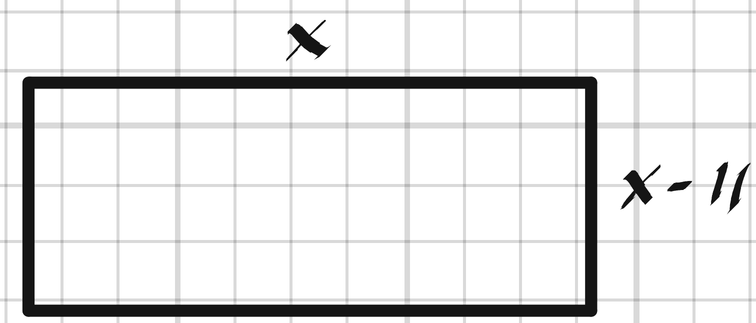
4249 I rektangeln *ABCD* är sidlängderna
$|AB| = |CD| = 123$ l.e. och $|BC| = |AD| = 191$ l.e.
Rektangeln *MNPQ* har sidlängderna
$|MN| = |PQ| = 191$ l.e. och
$|MQ| = |NP| = 123$ l.e.
Är de två rektanglarna kongruenta? Motivera ditt svar.



4249.

Ja, ty motstående sidor är lika och alla vinklar räta.

4250 Omkretsen av en svart rektangel är 58 cm och rektangelns ena sida är 11 cm kortare än den andra sidan. Hur stor är arean av en grön rektangel som är kongruent med den svarta rektangeln?



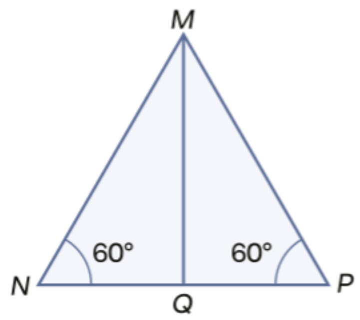
4250.

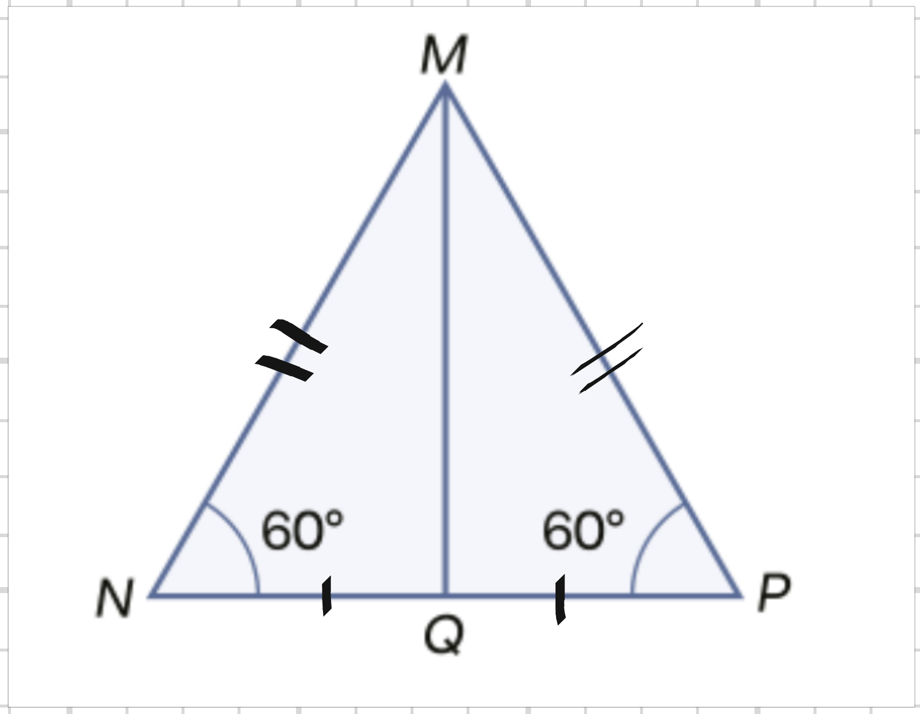
$$2x + 2(x-11) = 58$$
$$2x + 2x - 22 = 58$$
$$4x = 80$$
$$x = 20 \text{ cm}$$

$$A = x(x-11) = 20 \cdot 9 = 180 \text{ cm}^2$$

(Den gröna och den svarta är likadana)

4251 Sträckan MQ är höjd i triangeln MNP. Vilka trianglar i figuren är kongruenta? Motivera ditt svar.

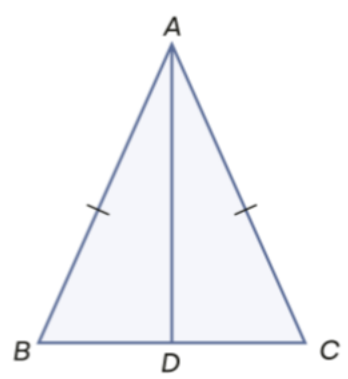


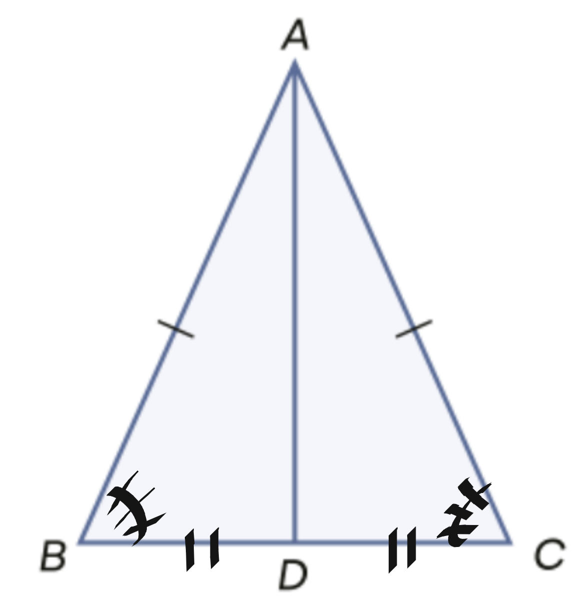


4251.

$\Delta MNQ \cong \Delta MPQ$, ty de har två sidor och mellanliggande vinkel lika.

4252 Sträckan AD är bisektris i den likbenta triangeln ABC. Visa att $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

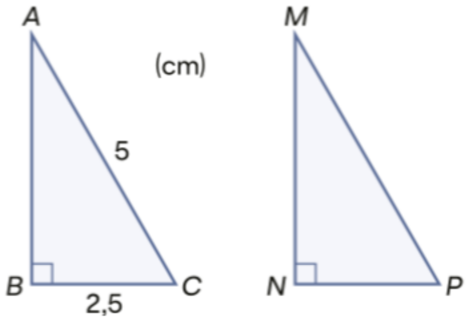




4252.

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$, ty de har två sidor och mellanliggande vinkel lika.

4253 Trianglarna i figuren är kongruenta. Bestäm vinklar och sidor i triangeln *MNP*.



4253. $|MN| = |AB| = \sqrt{5^2 - 2.5^2} \approx \underline{4{,}3 \text{ cm}}$

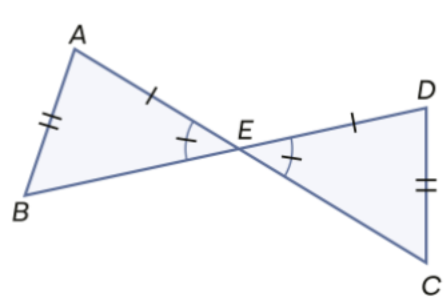
$|MP| = |AC| = \underline{5 \text{ cm}}$

$|NP| = |BC| = \underline{2{,}5 \text{ cm}}$

$\angle P = \angle C = \arccos\left(\frac{2{,}5}{5}\right) = \underline{60^\circ}$

$\angle M = \angle A = 90^\circ - 60^\circ = \underline{30^\circ}$

4254 Kan vi med den information som vi får i figuren dra slutsatsen att $|BE| = |EC|$? Motivera ditt svar.



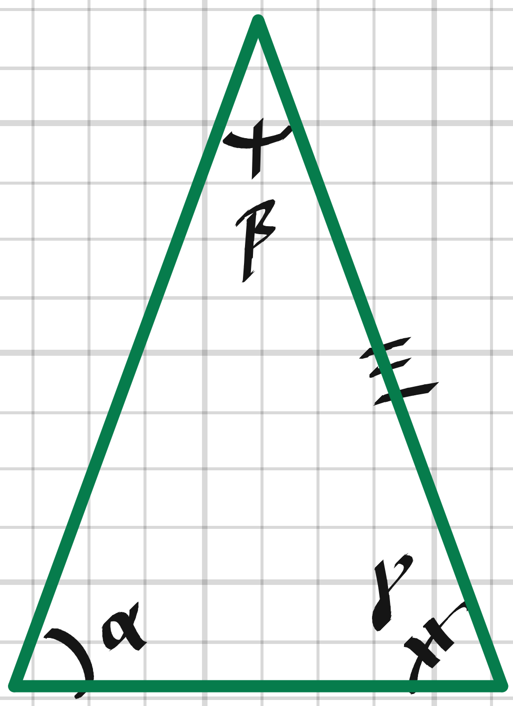
4254. Nej, två sidor och en vinkel är lika men vinkeln är inte mellanliggande.

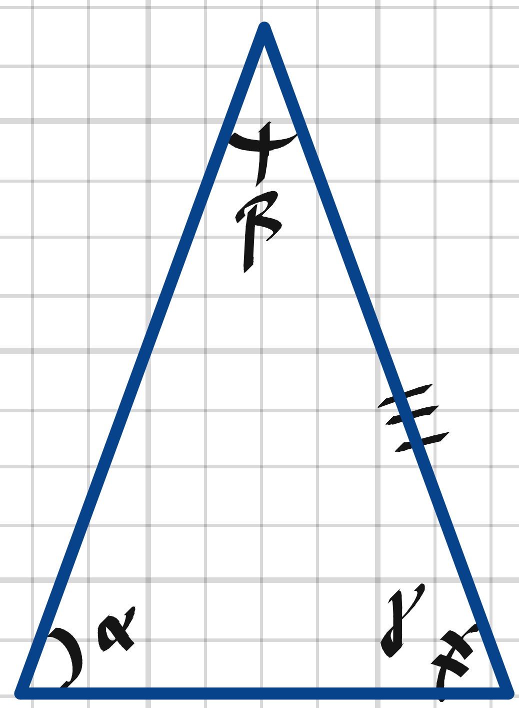
4255 Visa med hjälp av något av kongruensfallen att om två rätvinkliga trianglar överensstämmer i hypotenusa och en katet, så är de kongruenta.

4255. Alla sidor blir lika långa eftersom Pythagoras sats gäller.

4256 Använd det tredje kongruensfallet (VSV) för att bevisa omvändningen av basvinkelsatsen, dvs. att om två vinklar i en triangel är lika stora, så är triangeln likbent.

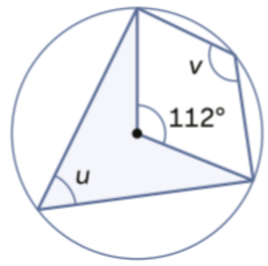
4256.





Om två vinklar ska vara lika så måste α antingen vara lika stor som β eller γ. Båda alternativen ger en likbent triangel.

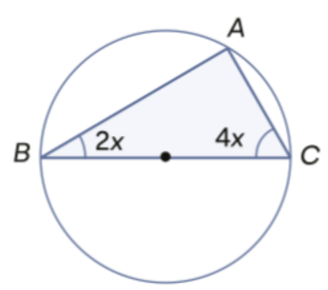
4310 Bestäm vinklarna *u* och *v*.



4310. $u = \frac{112^\circ}{2} = \underline{56^\circ}$

$v = 180^\circ - u = 180^\circ - 56^\circ = \underline{124^\circ}$

4311 Bestäm vinklarna i triangeln *ABC* som är inskriven i en cirkel. Sträckan *BC* är cirkelns diameter.

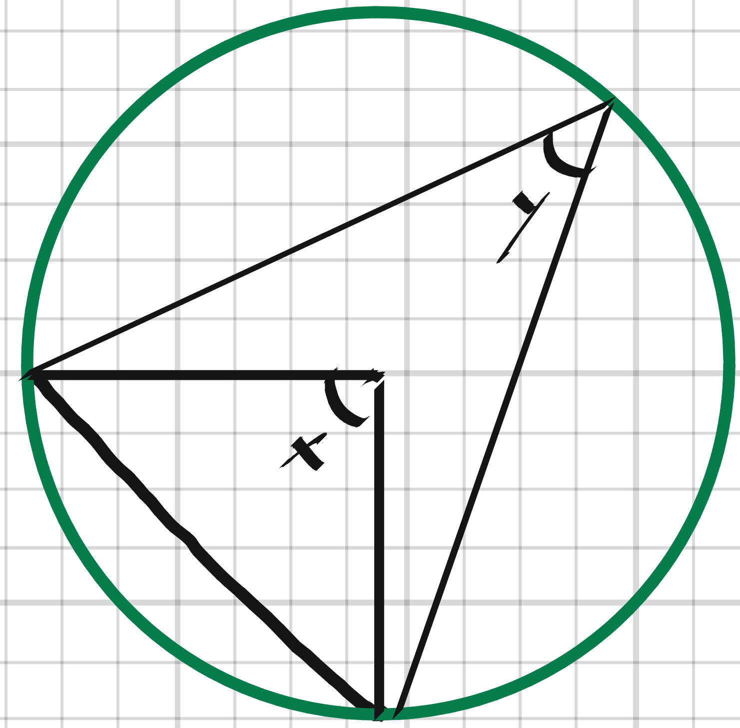


4311. $\angle A = 90^\circ \Rightarrow$

$2x + 4x = 90^\circ \Rightarrow x = 15^\circ \Rightarrow$

<u>Vinklarna är 30°, 60° och 90°</u>

4312 Summan av en randvinkel och en medelpunktsvinkel som hör till samma cirkelbåge är 240°. Bestäm vinklarnas storlek.



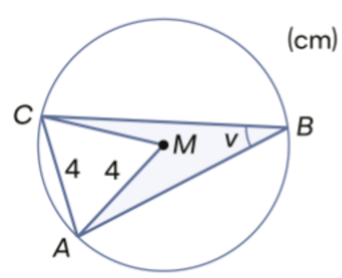
4312.

$$\begin{cases} x + y = 240^\circ \\ x = 2y \end{cases}$$

$$3y = 240^\circ$$

$$\underline{y = 80^\circ}, \quad \underline{x = 160^\circ}$$

4313 I figuren nedan är *M* cirkelns medelpunkt. Punkterna *A*, *B* och *C* ligger på cirkelns rand.



Bestäm vinkeln *v*.

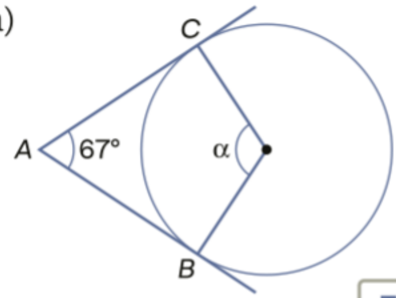
(Np Ma2c vt 2014)

4313. ΔACM liksidig $\Rightarrow \angle M = 60^\circ$

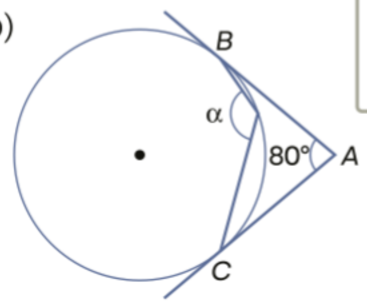
$$v = \frac{\angle M}{2} = \underline{30^\circ}$$

4314 I figurerna är sträckorna *AB* och *AC* delar av tangenter till cirkeln. Bestäm vinkeln α.

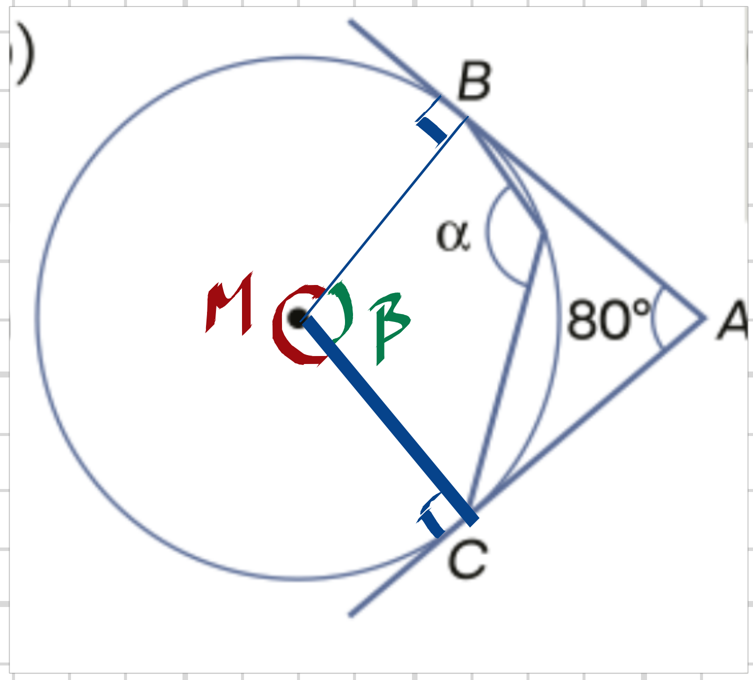
a)



b)



Tips! Att rita hjälplinjer kan vara en bra strategi, när man löser geometriska uppgifter.



4314.

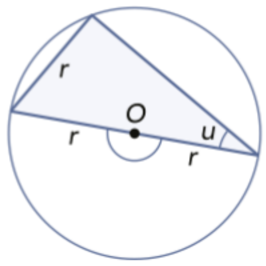
a) $\alpha = 180^\circ - 67^\circ = \underline{113^\circ}$

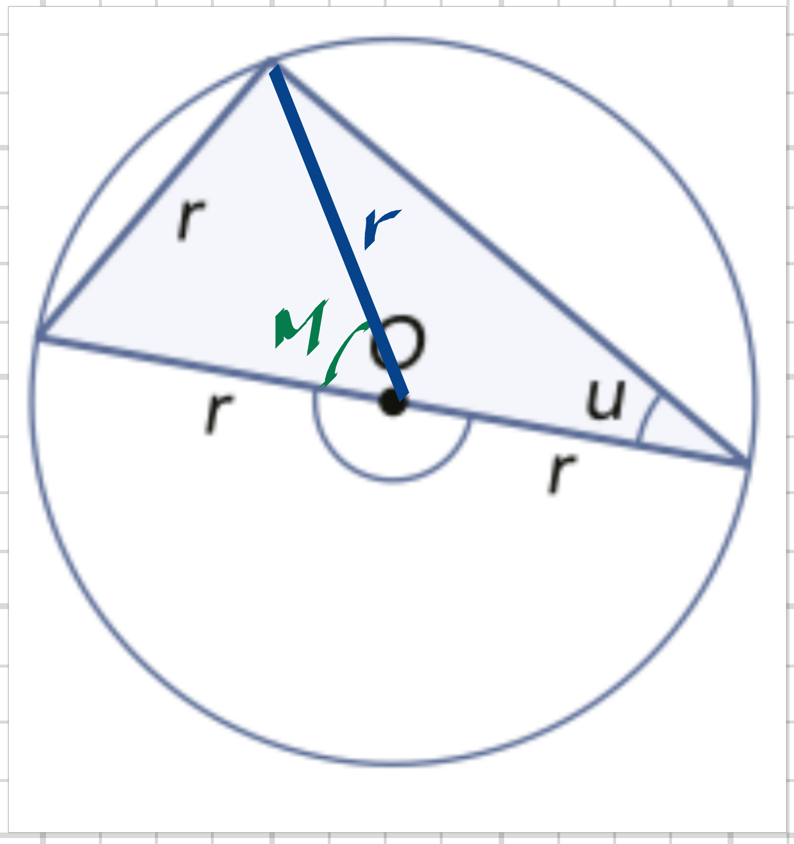
b) $\beta = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \Rightarrow$

$M = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$

$\alpha = \frac{M}{2} = \frac{260^\circ}{2} = \underline{130^\circ}$

4315 Radiens längd betecknas med r i figuren.
Bestäm vinkeln u.



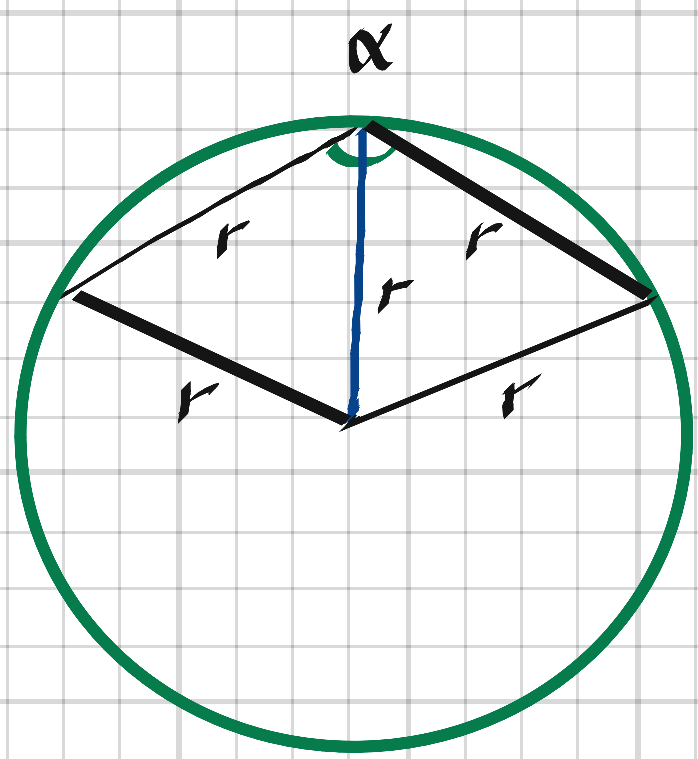


4315.

$M = 60^\circ$

$u = \frac{M}{2} = \frac{60^\circ}{2} = \underline{30^\circ}$

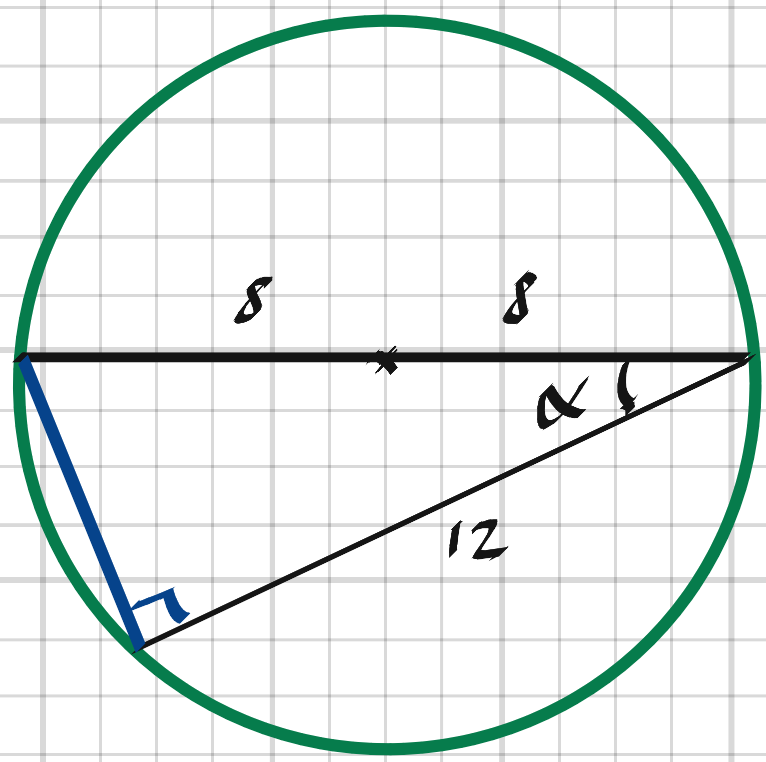
4316 Vinkelbenen till en randvinkel är lika långa som cirkelns radie. Bestäm vinkelns storlek.



4316.

$\alpha = 2 \cdot 60^\circ = \underline{120^\circ}$

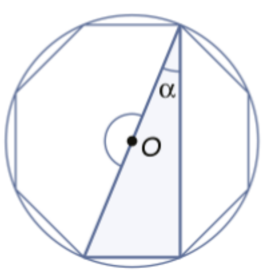
4317 Vinkelbenen till en randvinkel utgörs av en korda respektive cirkelns diameter. Bestäm vinkelns storlek om kordan är 12 cm och cirkelns radie är 8 cm.



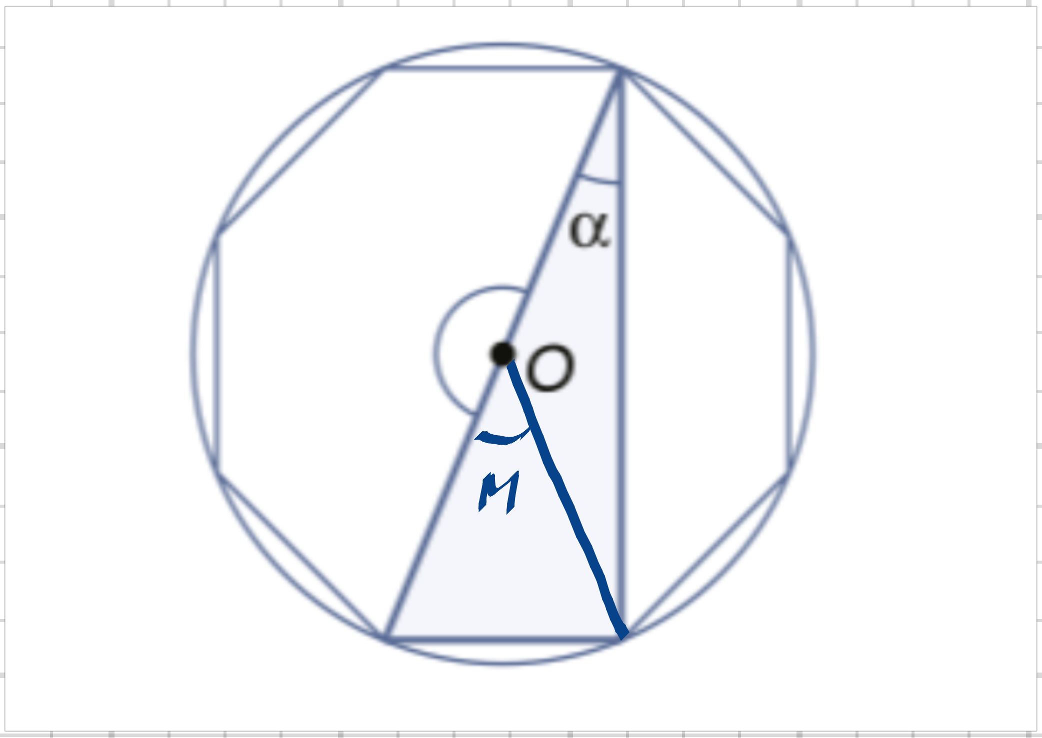
4317

$$\alpha = \arccos \frac{12}{16} \approx \underline{41{,}4^\circ}$$

4318 I figuren är en oktogon (regelbunden åttahörning) inskriven i en cirkel. Bestäm vinkeln α.



En inskriven månghörning har alla sina hörn på cirkelns rand.

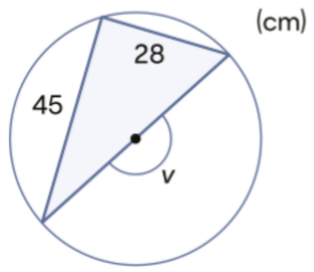


4318.

$$M = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\alpha = \frac{M}{2} = \underline{22{,}5^\circ}$$

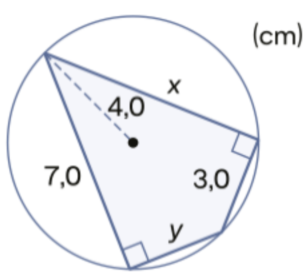
4319 En triangel är inskriven i en cirkel. Vinkeln v i figuren är rak. Bestäm cirkelns radie.

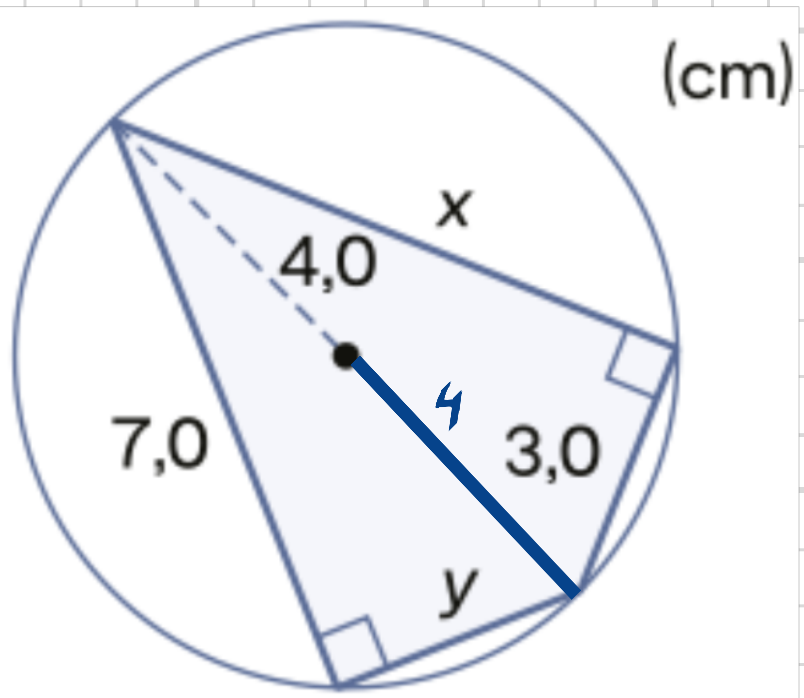


4319. $(2r)^2 = 28^2 + 45^2 \Rightarrow$

$$r = \sqrt{\frac{28^2+45^2}{4}} = \underline{26.5 \text{ cm}}$$

4320 Beräkna längden av sträckorna markerade med x och y.



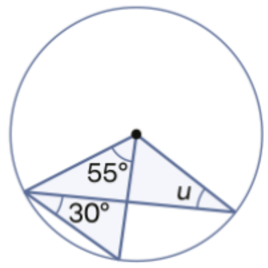


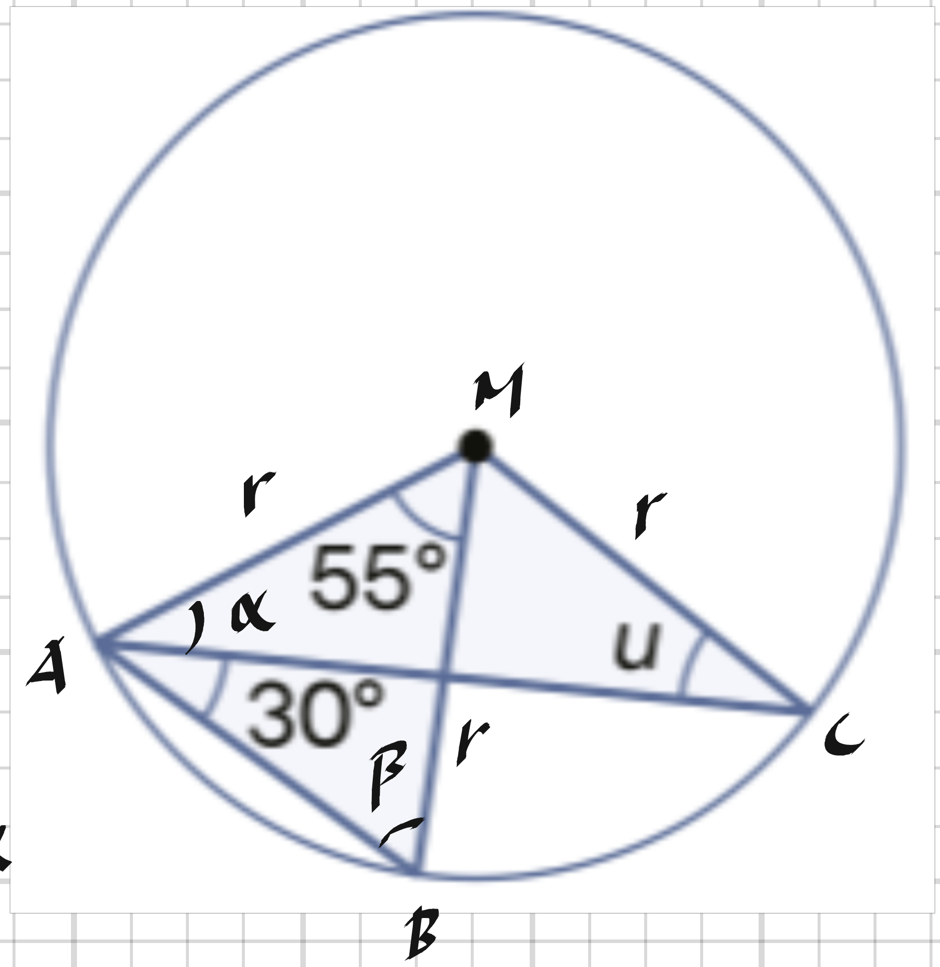
4320.

$$x = \sqrt{8^2-3^2} \approx \underline{7.4 \text{ cm}}$$

$$y = \sqrt{8^2-7^2} \approx \underline{3.9 \text{ cm}}$$

4321 Visa att vinkel u är 32,5°.





4321.

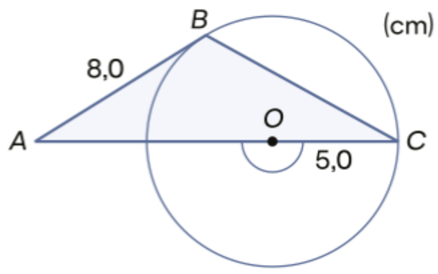
ΔACM likbent $\Rightarrow$ $u = \alpha$

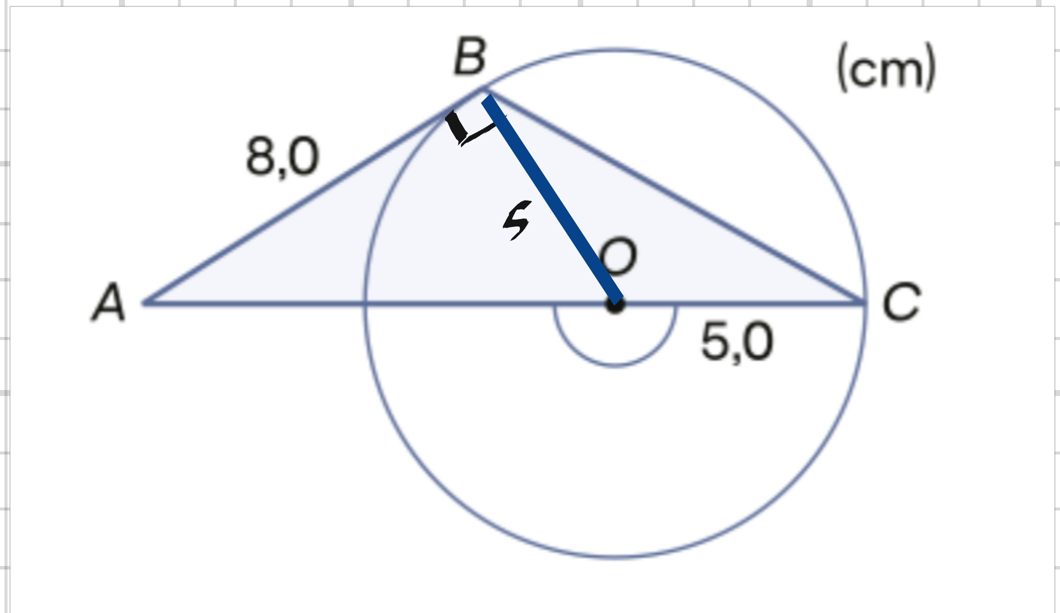
ΔABM likbent $\Rightarrow$ $\alpha + 30° = \beta$

$$2\beta + 55° = 180° \Rightarrow \beta = \frac{180° - 55°}{2} = 62{,}5° \Rightarrow$$

$$u = 62{,}5° - 30° = \underline{32{,}5°}$$

4322 Sträckan *AB* är en del av en tangent till cirkeln och *B* är tangeringspunkten. Cirkelns radie är 5,0 cm. Bestäm längden av sträckan *AC* i figuren.



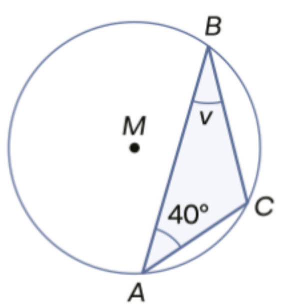


4322.

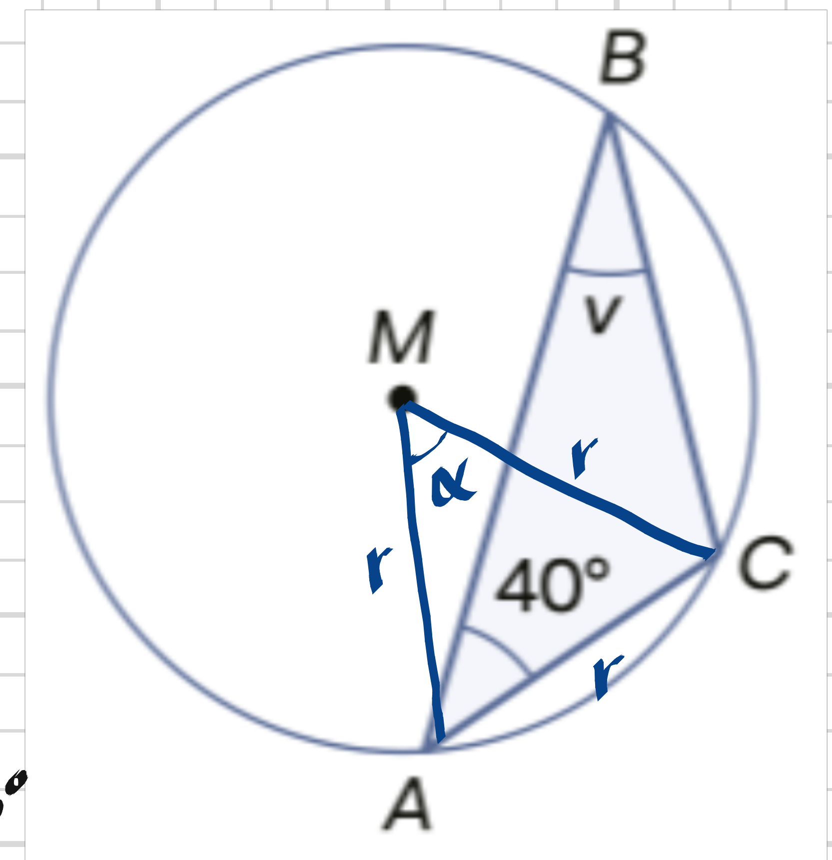
$$|AO| = \sqrt{8^2+5^2} \approx 9{,}4$$

$$|AC| = |AO| + |OC| = 9{,}4 + 5{,}0 = \underline{14{,}4 \text{ cm}}$$

4323 Triangeln *ABC* är inskriven i en cirkel med medelpunkten *M*. Sträckan *AC* är lika lång som cirkelns radie. Vinkeln *BAC* = 40°, se figur. Bestäm vinkeln *v*.



(Np Ma2c ht 2013)

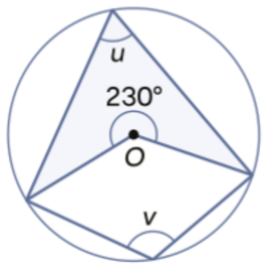


4323.

ΔACM liksidig $\Rightarrow \alpha = 60°$

$$v = \frac{\alpha}{2} = \underline{30°}$$

4329 Bestäm vinklarna u och v.

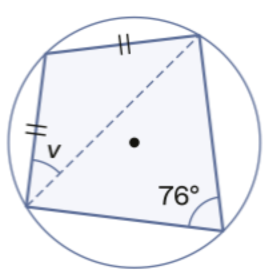


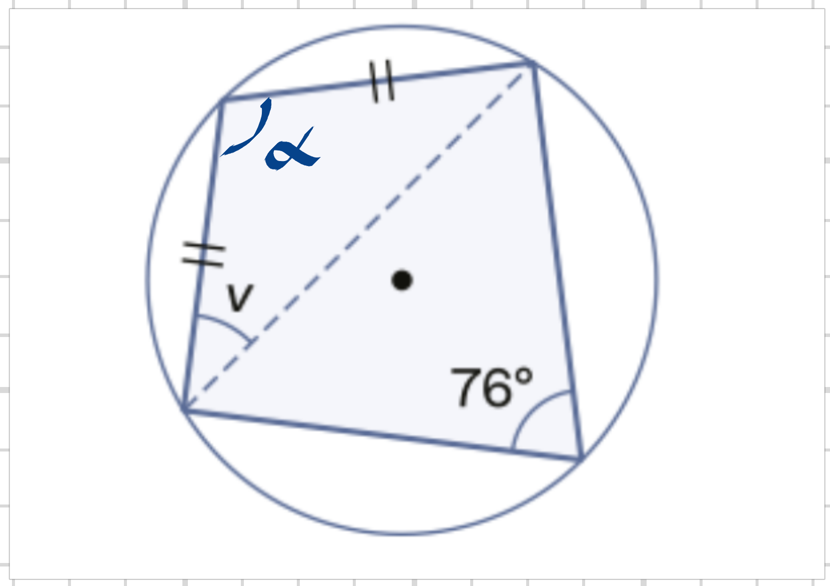
4329.

$$v = \frac{230^\circ}{2} = \underline{115^\circ}$$

$$u = 180^\circ - v = 180^\circ - 115^\circ = \underline{65^\circ}$$

4330 I figuren är lika långa sträckor markerade.
Bestäm vinkeln v.



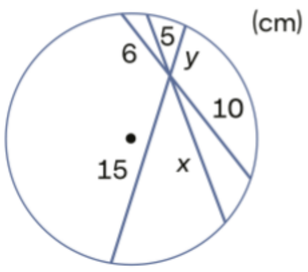


4330.

$$\alpha = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

$$v = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 104^\circ}{2} = \underline{38^\circ}$$

4331 Tre kordor skär varandra i en punkt. Beräkna längden av sträckorna x och y.

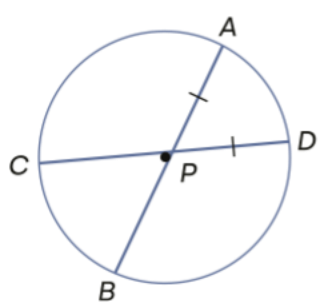


4331.

$x \cdot 5 = 6 \cdot 10 \Rightarrow \underline{x = 12 \text{ cm}}$

$y \cdot 15 = 6 \cdot 10 \Rightarrow \underline{y = 4 \text{ cm}}$

4332 I figuren är sträckorna AP och DP lika långa. Visa att $|PB| = |PC|$.



4332.

$|PB| \cdot \cancel{|PA|} = \cancel{|PD|} \cdot |PC|$

$|PB| = |PC|$ #

4333 I en fyrhörning inskriven i en cirkel är vinklarnas storlek u, $2u$, $3u$ och $4u$. Bestäm fyrhörningens alla vinklar.

4333.

$$u + 2u + 3u + 4u = 360^\circ$$

$u = \underline{36^\circ}$, $2u = \underline{72^\circ}$, $3u = \underline{108^\circ}$, $4u = \underline{144^\circ}$

4334 I ett specialfall kan kordasatsen skrivas som ekvationen $a^2 = b^2$.

a) Bestäm ekvationens lösning.

b) För vilka kordor gäller ekvationen? Motivera ditt svar.

4334.

a) $\underline{a = b, \quad a > 0, b > 0}$

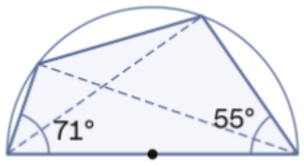
b) <u>Endast då $a = b$ = radien</u>

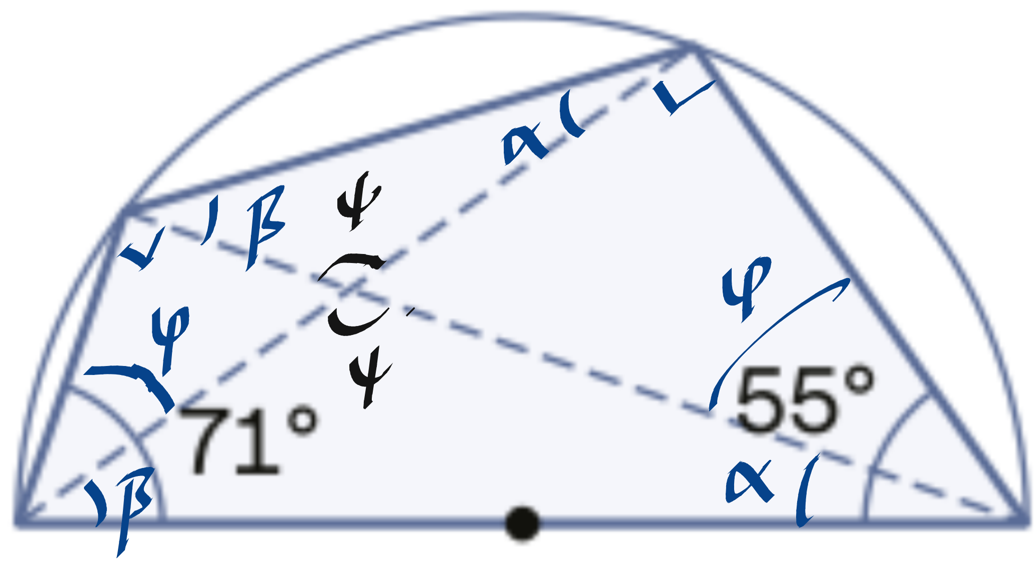
4335 Rand och Cordelia diskuterar figuren till höger. Rand säger att kordasatsen gäller även i detta fall. Cordelia undrar hur man ska tänka då, eftersom det bara finns en del av respektive korda. Hjälp Rand att förklara för Cordelia.

4335. Dum fråga!

<u>Kordasatsen är ej tillämpbar.</u>

4336 En fyrhörning är inskriven i en halvcirkel. Beräkna den större vinkeln mellan fyrhörningens diagonaler.





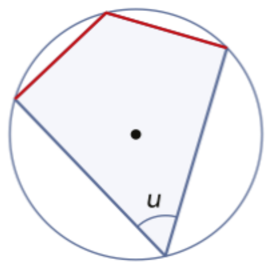
4336.

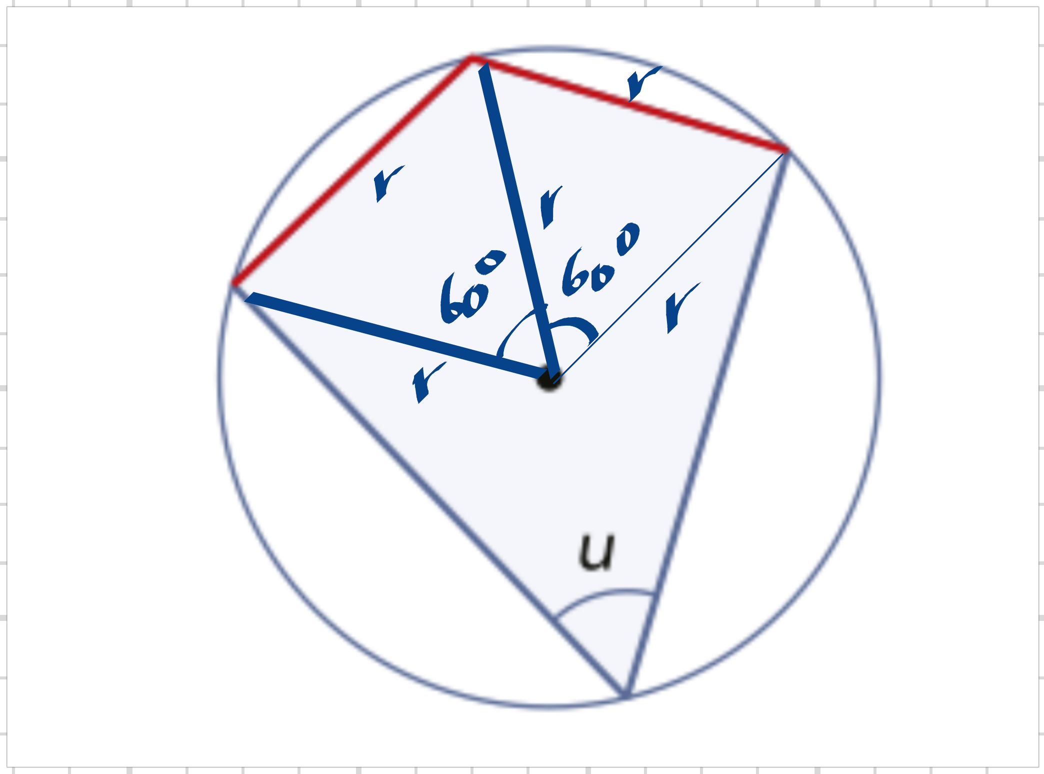
$\beta = 180° - 55° - 90° = 35°$

$\alpha = 180° - 71° - 90° = 19°$

$\psi = 180° - \alpha - \beta = 180° - 35° - 19° = \underline{126°}$

4337 De röda sidorna i fyrhörningen är lika långa som den omskrivna cirkelns radie. Visa att vinkeln u är 60°.

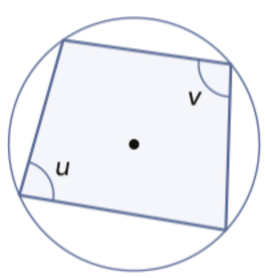


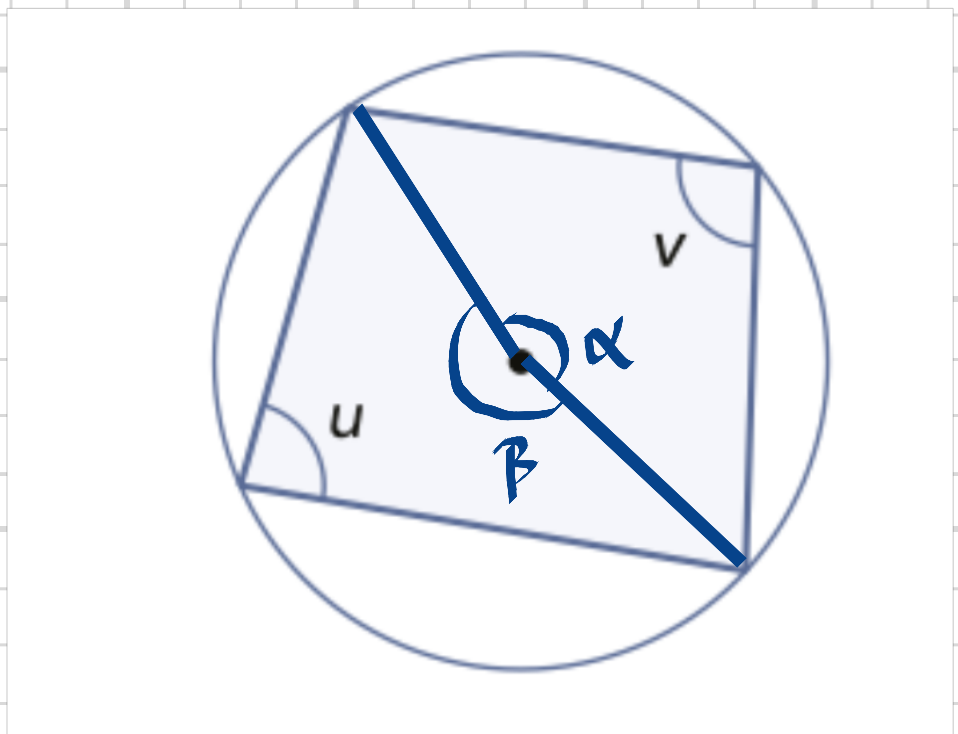


4337.

$$u = \frac{2 \cdot 60^\circ}{2} = \underline{60^\circ} \quad \#$$

4338 Visa att summan av motstående vinklar i en inskriven fyrhörning är 180°. Det vill säga att u och v i figuren tillsammans är 180°.





4338.

$\alpha = 2u \; , \quad \beta = 2v$

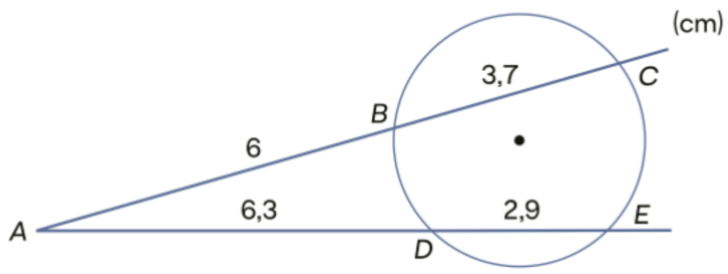
$\alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow$

$2u + 2v = 360^\circ \Rightarrow$

$u + v = 180^\circ \quad \#$

4339 En linje som skär cirkeln i två punkter kallas för *sekant*. Precis som vid kordasatsen kan man hitta ett samband mellan längden av sträckorna som sekanterna i figuren är uppdelade i.

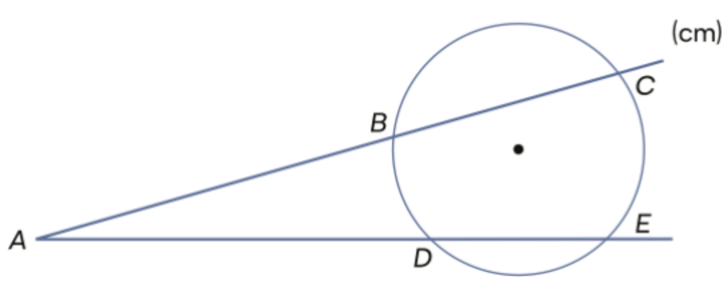
a) Visa med beräkningar att $|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|$.

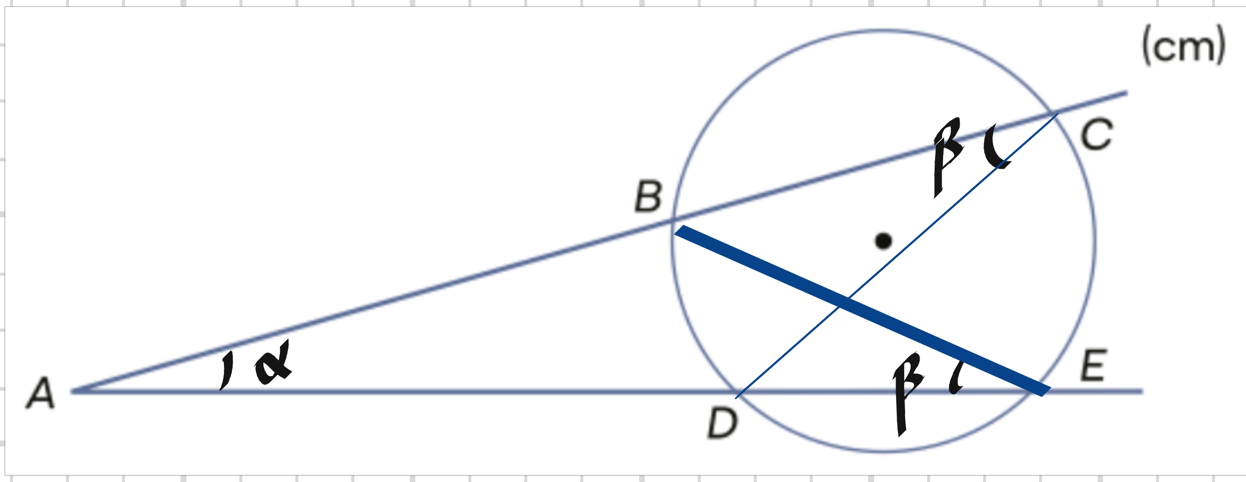


4239. a) $VL = |AB| \cdot |AC| = 6 \cdot 9{,}7 \approx 58$

$HL = |AD| \cdot |AE| = 6{,}3 \cdot 9{,}2 \approx 58 = VL$ #

b) Här nedanför ser du samma figur men utan sträckor angivna. Bevisa att sambandet $|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|$ gäller generellt.



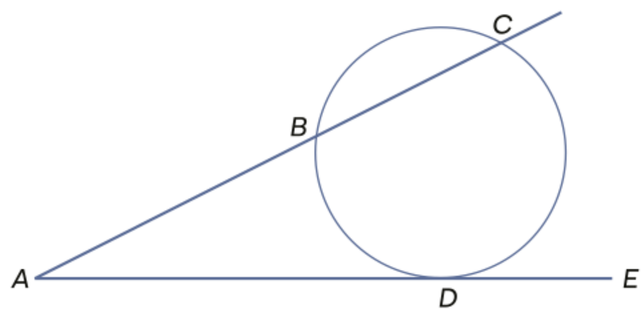


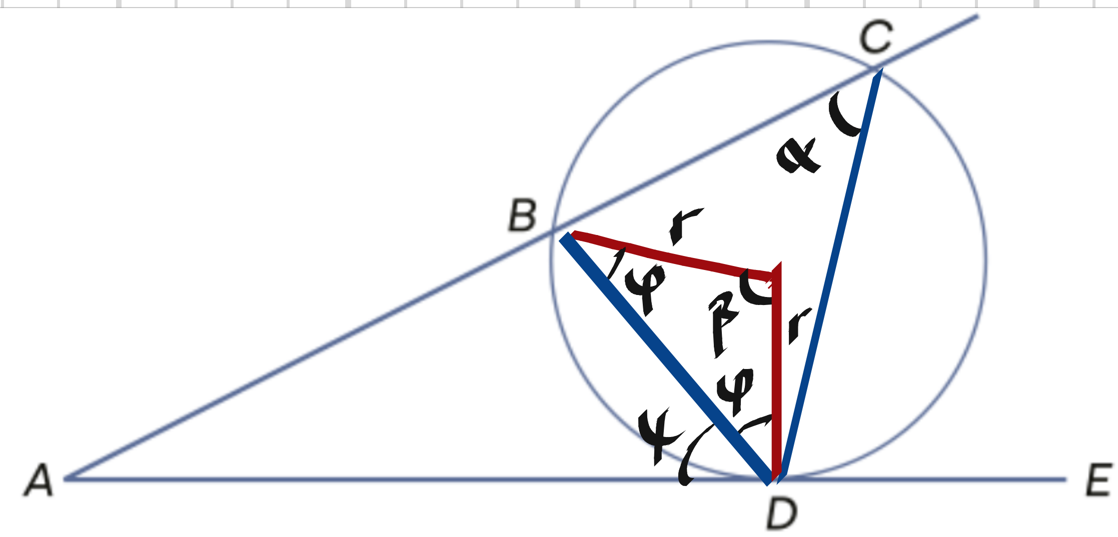
b) $\Delta ACD \sim \Delta ABE \Rightarrow$

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AE|} \Rightarrow$$

$|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|$ #

c) Om den ena sekanten ersätts av en tangent, ändras sambandet. I figuren här nedanför är linjen som går genom punkterna A och E tangent till cirkeln, med D som tangeringspunkt. Bevisa att $|AB| \cdot |AC| = |AD|^2$.





c) $\beta = 2\alpha$

$$\varphi = \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$$\psi = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha \Rightarrow$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABD \Rightarrow$$

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|} \Rightarrow |AB| \cdot |AC| = |AD|^2 \quad \#$$