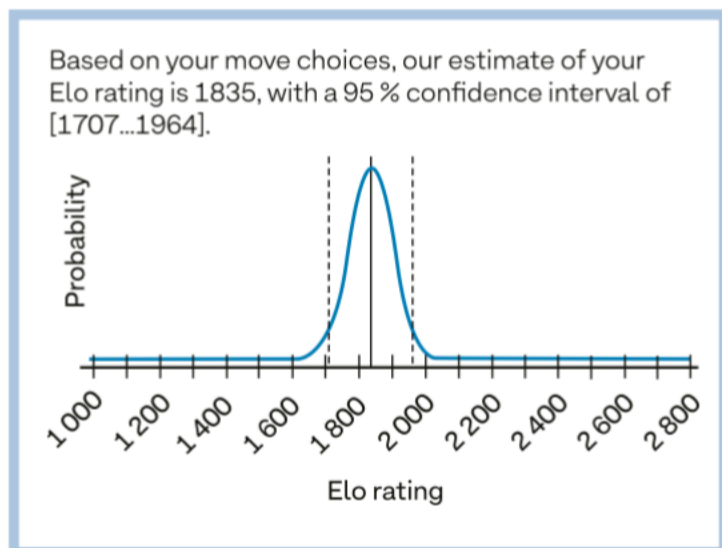


28 När eleverna frågade matematikläraren hur gammal han var svarade han: Vi är fem i familjen och medelåldern är 28 år. Om vi räknar bort mig är medelåldern 21 år. Hur gammal var läraren?

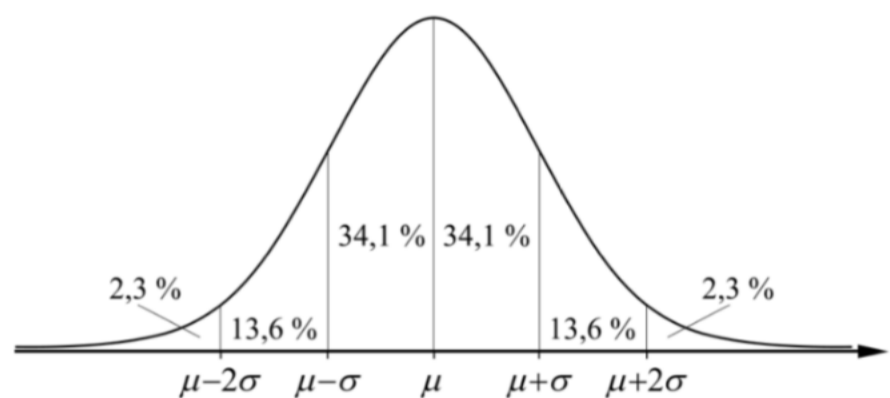
$$28. \quad \frac{28 \cdot 5 - x \cdot 1}{4} = 21$$

$$x = 28 \cdot 5 - 21 \cdot 4 = \underline{56 \text{ år}}$$

29 På webbplatsen Elometer kan man göra ett test för att uppskatta sin schackrating. Emma fick följande resultat



- Vad är "medelvärde" för Emmas schackrating.
- Bestäm "standardavvikelsen" för Emmas schackrating.
- Använd digitalt verktyg för att bestämma sannolikheten för att Emmas schackrating är högre än 2 000?



$$29. \quad a) \quad \underline{1835}$$

$$b) \quad 4\sigma = 1964 - 1707 \Rightarrow \sigma \approx \underline{64}$$

$$c) \quad \text{Geogebra ger } P(X \geq 2000) = \underline{0,5\%}$$

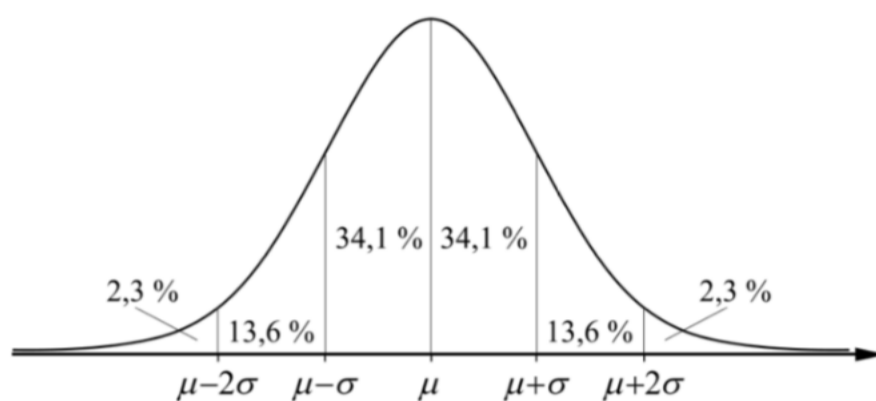
30 Lös ekvationen $\lg x^2 = 16$.

30, $x^2 = 10^{16} \Rightarrow x = \underline{\pm 10^8}$

31 Vid en stickprovskontroll av spik mätte man längden av 100 spikar. Medellängden var 75 mm och standardavvikelsen 1 mm. På paketet står

längd: 75 ± 2 mm

Hur många procent av de spikar som tillverkas håller inte måttet?



31, ca 5% ($2 \times 2,3\%$)

32 För vilket värde på konstanten b gäller att ekvationssystemet har oändligt antal lösningar?

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ bx + 4y = 8 \end{cases}$$

32,
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{b}{4}x + 2 \end{cases}$$

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{b = 2}$$

- 33** Konstruera en datamängd där medianen är 17 530 kr, kvartilavståndet 4 320 kr och variationsbredden 8 200 kr. Beräkna medelvärdet.

33.

13000 14000 15370 16000 17530 18000 19690 20000 21200

$$\bar{x} = 17199$$

- 34** Under en femårsperiod ökade medianlönen på ett företag från 31 700 kr till 35 300 kr.

- a) Hur stor genomsnittlig ökning i procent per år motsvarar det?
b) Hur många år ytterligare tar det innan medianlönen är över 40 000 kr om lönerna årligen fortsätter att öka med lika många procent även efter femårsperioden?

34. a) $31700 \cdot (1+x)^5 = 35300 \Rightarrow$

$$x = \left(\frac{35300}{31700} \right)^{1/5} - 1 \approx 0,022 = \underline{2,2\%}$$

b) $35300 \cdot 1,022^x > 40000$

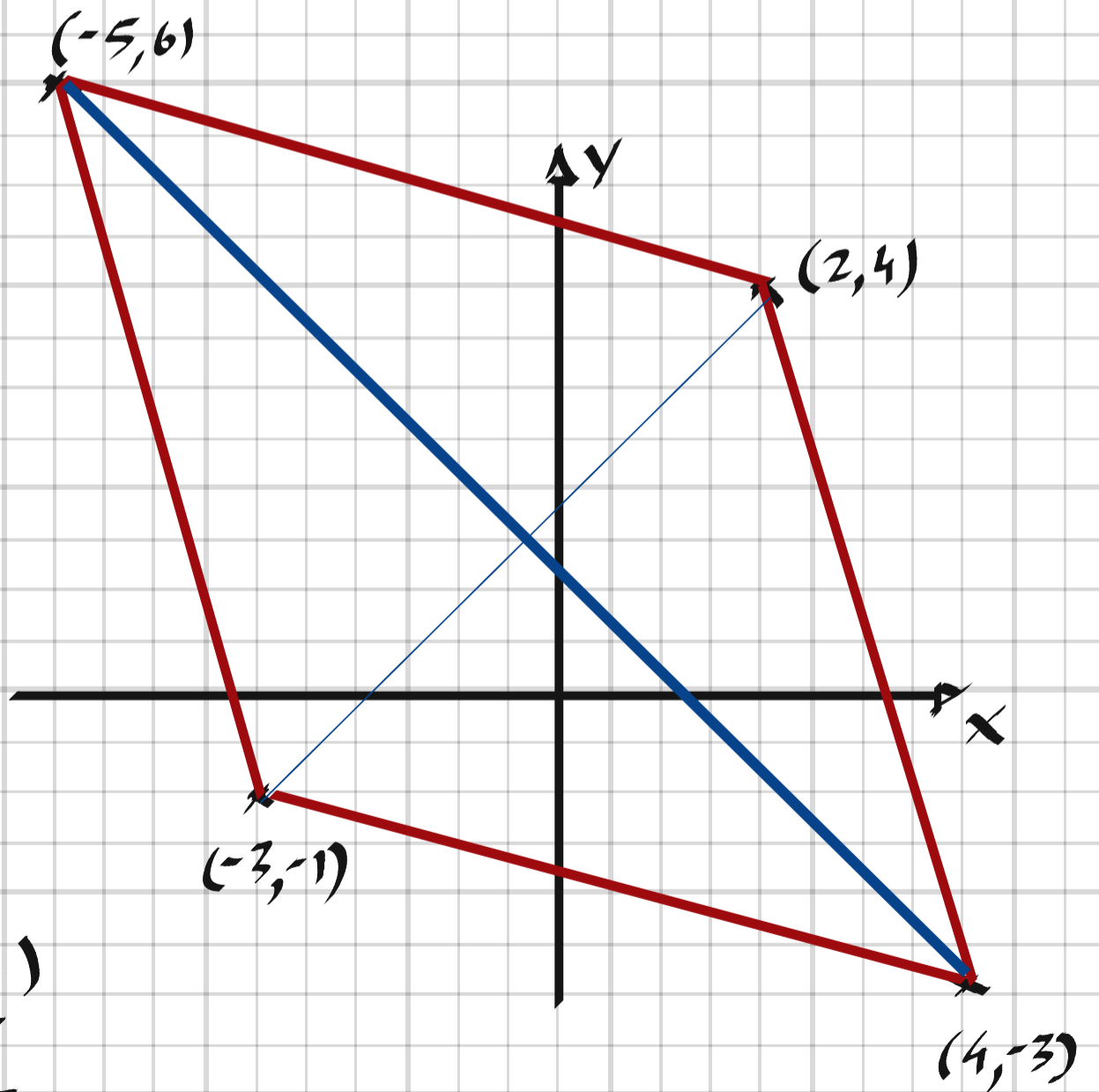
$$x > \frac{\lg \frac{40000}{35300}}{\lg 1,022} \approx 5,8 \text{ år} \Rightarrow \underline{\text{ca } 6 \text{ år}}$$

35 Vid ett företag får alla anställda en bonus på 2 000 kr. Hur förändras medelvärde, median, variationsbredd och kvartilavstånd på de anställdas inkomst?

35. Medelvärdet ökar med 2000 kr
Medianen ökar med 2000 kr
Variationsbredden påverkas ej
Kvartilavståndet påverkas ej

36 Visa att diagonalernas mittpunkter i fyrhörningen med hörnen i $(-5, 6)$, $(-3, -1)$, $(4, -3)$ $(2, 4)$ kommer att sammanfalla.

36.



$$M_1 = \left(\frac{-5+4}{2}, \frac{6-3}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

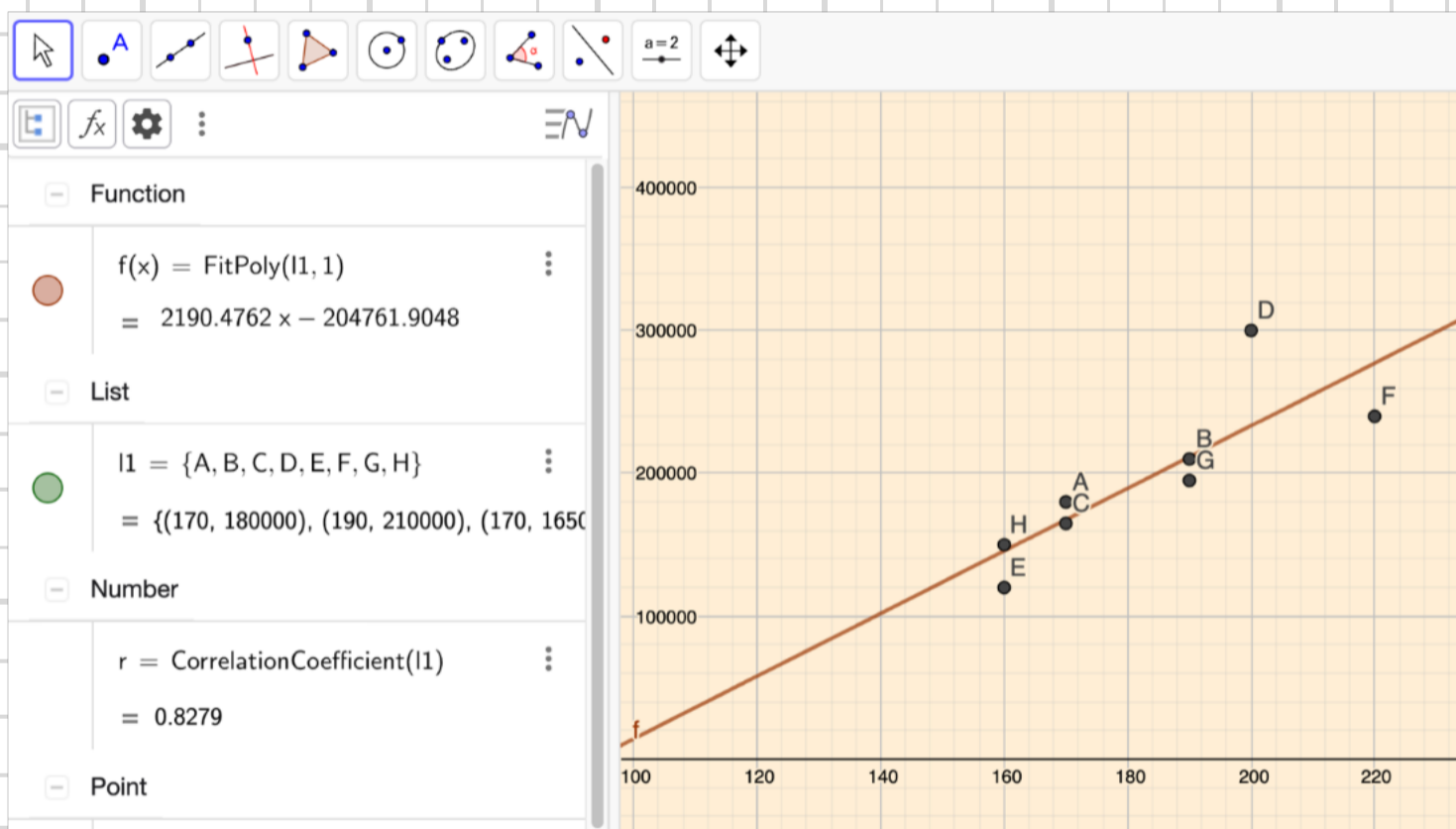
$$M_2 = \left(\frac{-3+2}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) = M_1 \quad \#$$

37 Ledningen för en varuhuskedja gjorde en undersökning av en viss avdelning på deras varuhus. De angav arbetstimmar och motsvarande försäljningssumma. Så här såg resultatet ut:

Arbetstimmar (h/vecka)	Försäljning (kr/vecka)
170	180 000
190	210 000
170	165 000
200	300 000
160	120 000
220	240 000
190	195 000
160	150 000

- Gör ett spridningsdiagram och avgör om det finns någon korrelation mellan försäljning och antalet arbetstimmar.
- Är det ett kausalt samband mellan försäljning och antal arbetstimmar? Motivera ditt svar.

37. a) Ja, det finns en relativt stark positiv korrelation,



b) Nja, man kan inte riktigt dra den slutsatsen
då det kan finnas andra variabler som
påverkar.

38 När Greg genomförde ett simhopp från tremeterssvikten kunde hoppets höjd beskrivas med funktionsuttrycket

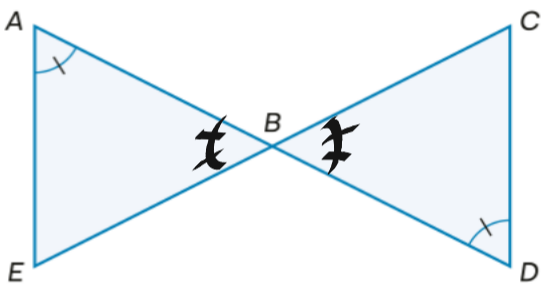
$$h(t) = 3 + 5t - 4,5t^2$$

där Greg var $h(t)$ meter över vattenytan efter t sekunder. Efter hur lång tid nådde Greg vattenytan?

$$38. \quad h(t) = 0 \Rightarrow -4,5\left(t^2 - \frac{5}{4,5}t - \frac{3}{4,5}\right) = 0$$

$$t = \frac{5}{9} \pm \sqrt{\frac{25}{81} + \frac{54}{81}} = \frac{5 \pm \sqrt{79}}{9} \approx \underline{1,5 \text{ s}}$$

39 Visa att trianglarna ABE och CBD är likformiga.



39, $\triangle CBD = \triangle ABE$ (vertikalvinklar) \Rightarrow

$\triangle ABE$ och $\triangle CBD$ har samma vinklar \Rightarrow

De är således likformiga.

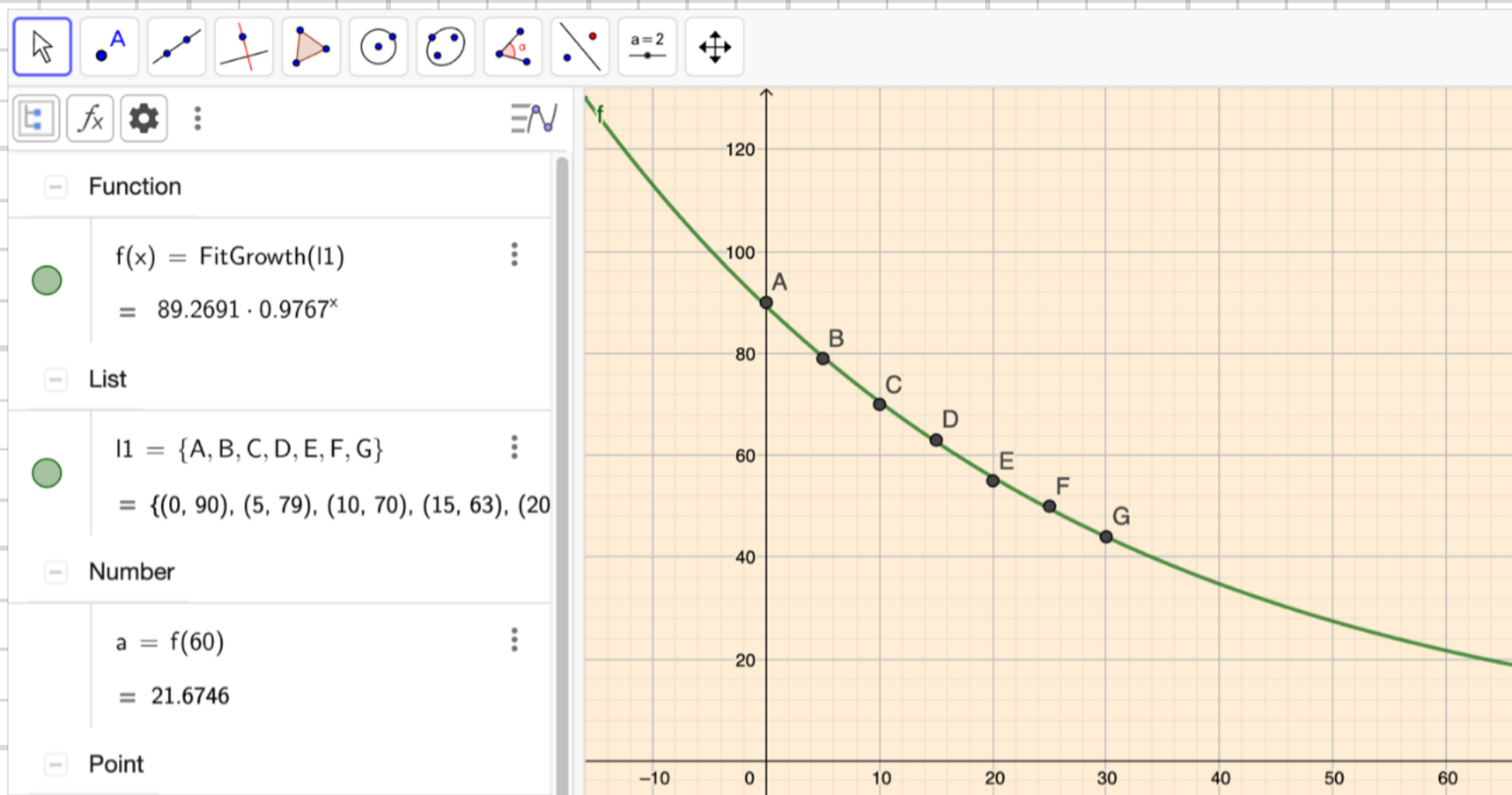
40 Martin skulle undersöka hur en kopp te avsvagnar. Han mätte temperaturen var femte minut och sammanställde sina mätdata i följande tabell

Tid (minuter)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatur (°C)	90	79	70	63	55	50	44

- För in mätpunkterna i ett diagram med temperatur i °C på y -axeln och tid i minuter på x -axeln.
- Anpassa en exponentialfunktion till mätpunkterna.
- Använd exponentialfunktionen som modell för temperaturen framåt i tiden. Vilken temperatur skulle teet ha efter en timme?

40, a+b) $T(t) = 89 \cdot 0.977^t \text{ } ^\circ\text{C}$

c) $T(60) = 89 \cdot 0.977^{60} \approx 22^\circ\text{C}$



41 Lös ekvationerna.

a) $x^3 + 24x^2 + 44x = 0$

b) $2x^3 + 6x^2 - 8x = 0$

41. a) $x(x^2 + 24x + 44) = 0$

$$x = -12 \pm \sqrt{12^2 - 44} = -12 \pm 10$$

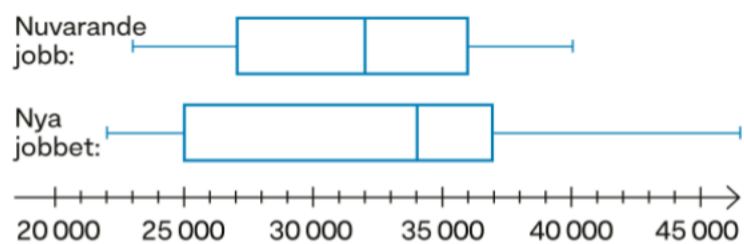
$x_1 = -22, x_2 = -2, x_3 = 0$

b) $2x(x^2 + 3x - 4) = 0$

$$2x(x-1)(x+4) = 0$$

$x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 1$

42 Fredrik ska byta jobb och är kallad till anställningsintervju. Han vill gärna ha högre lön och för att ta reda på hur mycket lön han bör begära så jämför han lönerna på den nya arbetsplatsen med hans nuvarande. Medelvärdet är detsamma och de båda arbetsplatserna har ungefär lika många anställda. Lönespridningen visas med hjälp av lådagrammen.



a) Jämför lönerna på de två arbetsplatserna.

b) Vad tycker du att han ska begära i lön om han tjänar 33 000 kr på sin nuvarande arbetsplats?

42. a) Lönespridningen är större och medianen högre på den nya arbetsplatsen.

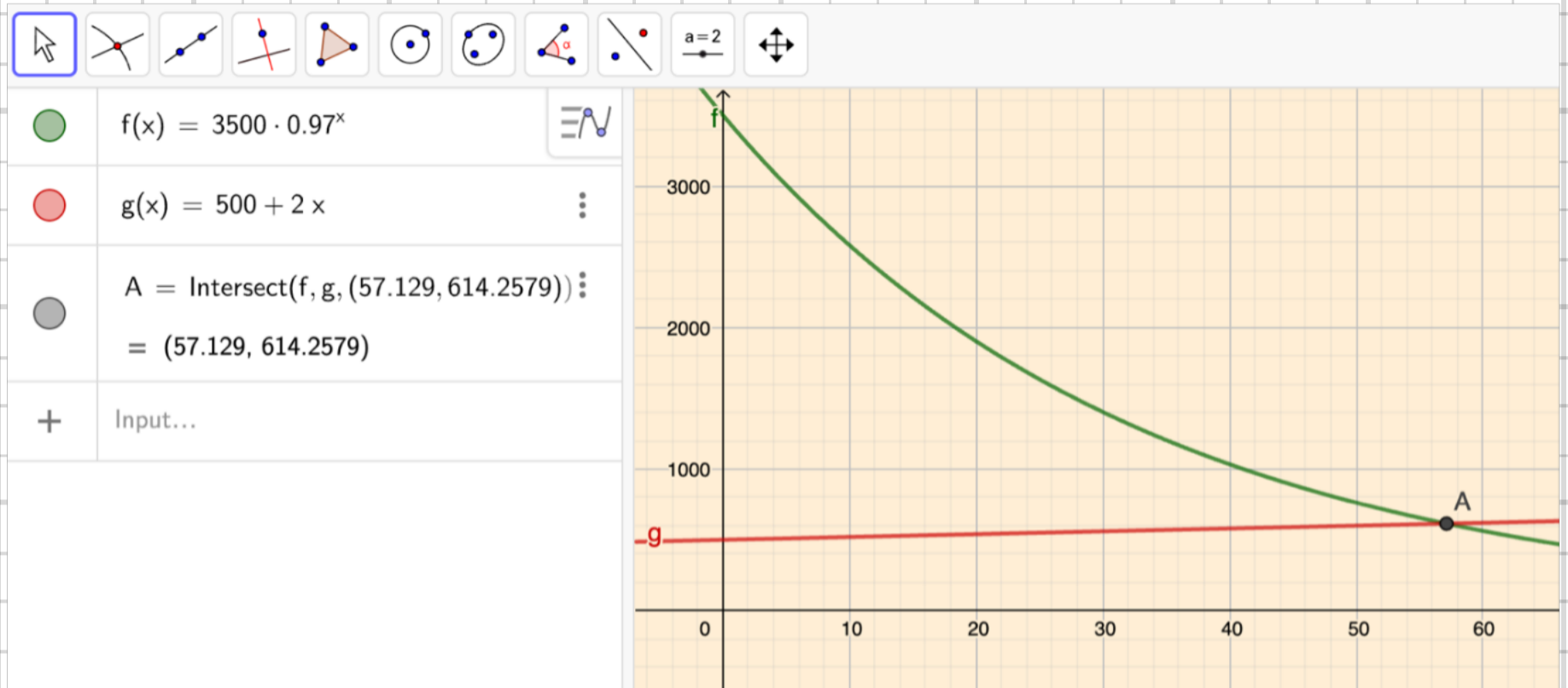
b) Minst 35 000 kr så att han fortfarande ligger en bit över medianen.

43 Lös ekvationerna med digitalt hjälpmedel.

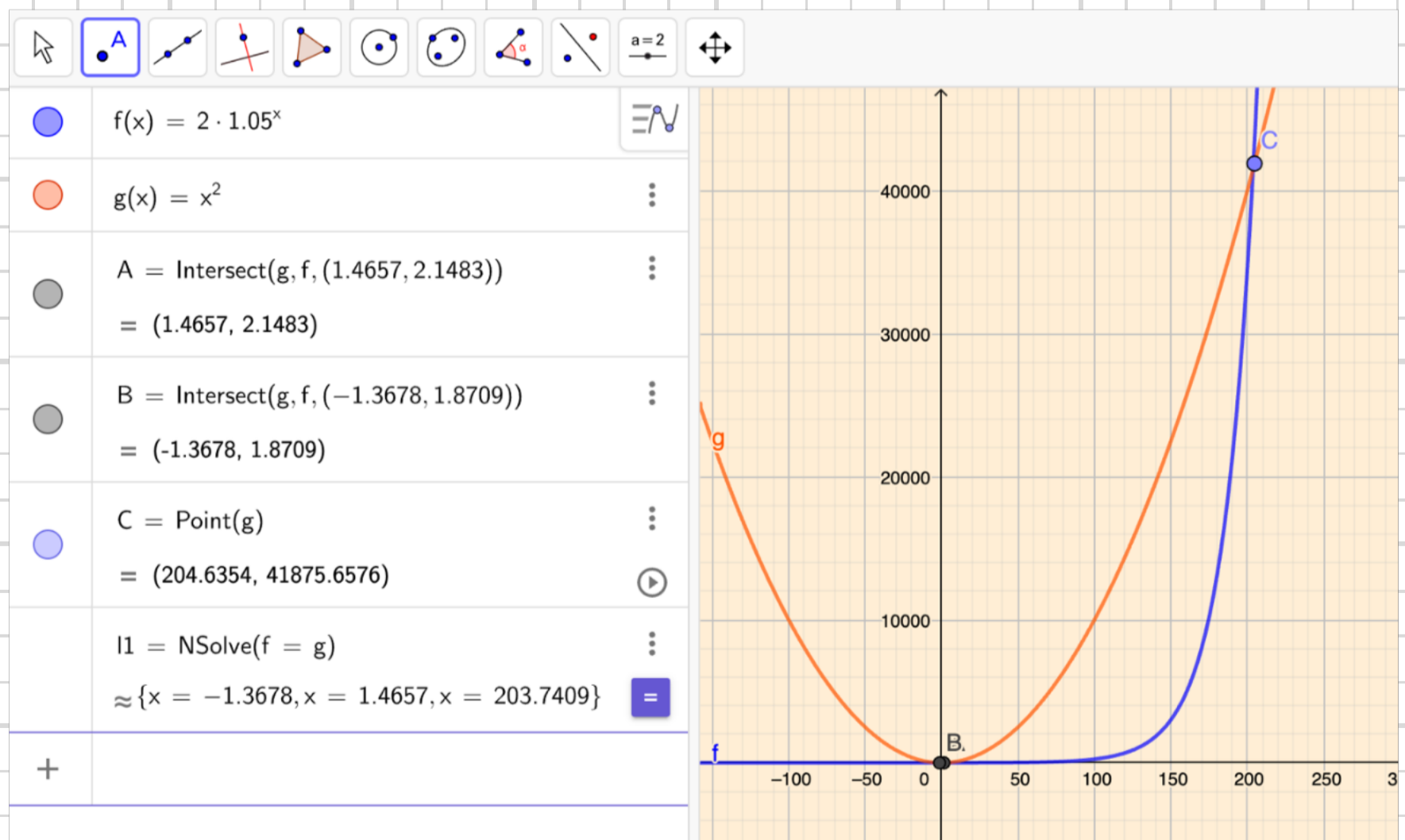
a) $3\,500 \cdot 0,97^x = 500 + 2x$

b) $2 \cdot 1,05^t = t^2$

43. a) Geogebra ger $x \approx 57.1$



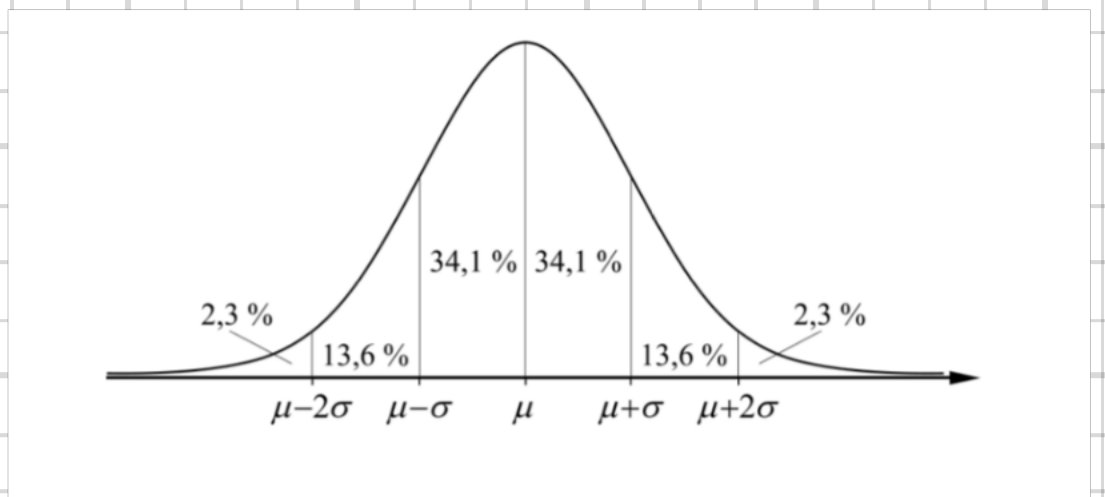
b) Geogebra ger $x_1 \approx -1.4, x_2 \approx 1.5, x_3 \approx 203.7$



44 Mario åker buss till skolan. Om bussresan tar längre tid än 35 minuter, kommer Mario för sent. En vecka mäter han den tid det tar för honom att åka till skolan.

Dag	Må	Ti	On	To	Fr
Restid (min)	25	20	24	33	27

Anta att restiden är oberoende av veckodag och att den är normalfördelad. Hur stor är risken att han kommer för sent?



$$44, \quad \bar{x} = \frac{25 + 20 + 24 + 33 + 27}{5} = 25,8$$

	$ x - \bar{x} $	$(x - \bar{x})^2$
m	0,8	0,64
t	5,8	33,64
o	1,8	3,24
t	7,2	51,84
f	1,2	1,44

$$\sum (x - \bar{x})^2 = 90,8$$

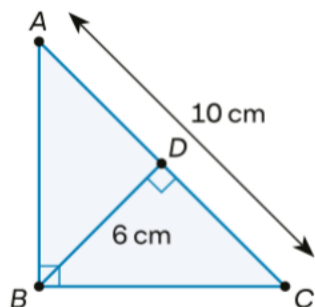
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{90,8}{4}} = 4,8$$

35 min motsvarar $\mu + 2\sigma$

$$\Rightarrow P(X > 35) \approx \underline{2,5\%}$$

45 Maria påstår att följande likbenta triangel omöjlig kan existera.

Har hon rätt? Motivera ditt svar.



Ja, ty $|BC| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$ om man betraktar $\triangle BCD$

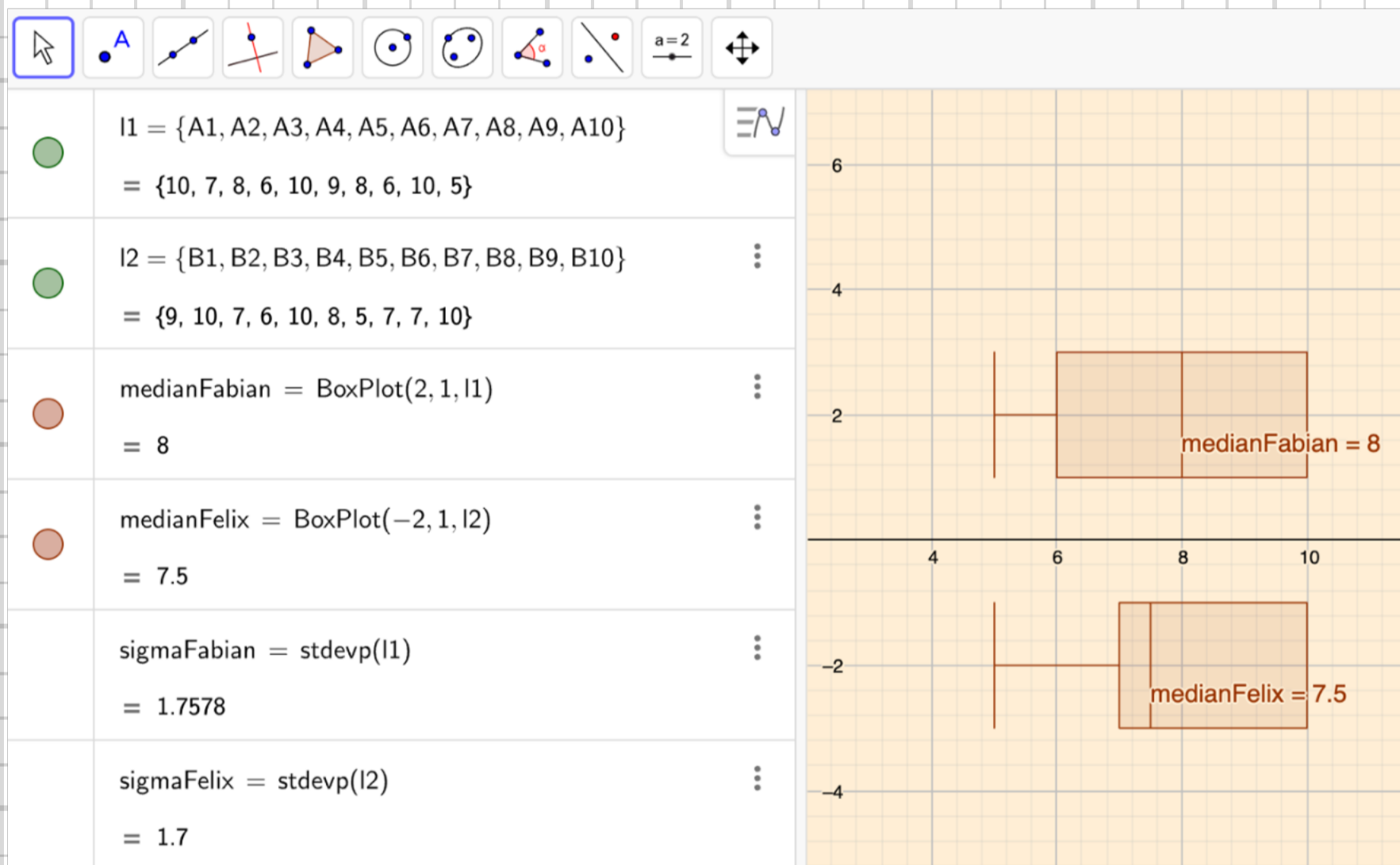
men $|BC| = \frac{10}{\sqrt{2}} = \sqrt{50}$ om man betraktar $\triangle ABC$

46 Fabian och Felix är klubbkompisar och tävlar mot varandra i bågskytte. Här följer en sammanställning av deras resultat

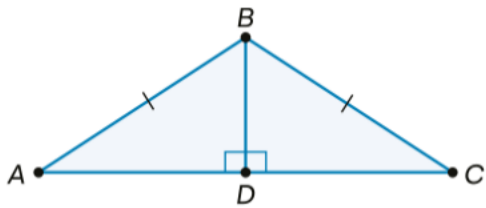
Fabian	10	7	8	6	10	9	8	6	10	5
Felix	9	10	7	6	10	8	5	7	7	10

Eftersom båda har samma totalpoäng, bestämmer de att den som har det jämnaste resultatet ska utnämnas till segrare. Vem vann?

46, Felix vann eftersom hans resultat hade både lägst kvartilavstånd och standardavv.



47 I figuren är en likbent triangel ritad. Visa att $|AD| = |DC|$.



47. $|AD| = |AB| \cdot \cos(\angle A)$, $|CD| = |BC| \cdot \cos(\angle C)$

Likbent $\Rightarrow |AB| = |BC|$, $\angle A = \angle C \Rightarrow |AD| = |DC|$ #

48 De åtta snabbaste löparna i Stockholm Marathon 2021 hade följande sluttider:

2:12:24 2:12:26 2:12:30 2:12:34
 2:13:38 2:13:53 2:13:55 2:14:32

- Bestäm kvartilavståndet.
- Bestäm standardavvikelsen.

48. Geogebra ger:

a) kvartilavståndet $\approx 86 \text{ s} = \underline{1 \text{ min } 26 \text{ s}}$

b) $\sigma \approx \underline{48 \text{ s}}$

	A	B	C	D	E
1	2	12	24	7944	
2	2	13	38	8018	
3	2	12	26	7946	
4	2	13	53	8033	
5	2	12	30	7950	
6	2	13	55	8035	
7	2	12	34	7954	
8	2	14	32	8072	
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					

$l1 = \{D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8\}$	$= \{7944, 8018, 7946, 8033, 7950, 8035, 7954, 8072\}$
$q1 = \text{Quartile1}(l1)$	$= 7948$
$q3 = \text{Quartile3}(l1)$	$= 8034$
kvartilavståndet $= q3 - q1$	$= 86$
$a = \text{stdevp}(l1)$	$= 47.6996$

49 Hugo och Inez ska köpa in en ny bil till sitt företag. De har var sin modell för hur de tror att bilens värde kommer att minska.

Hugo använder modellen

$V(t) = 800t^2 - 24\,000t + 180\,000$ där V är värdet i kr och t är tiden i år efter bilköpet.

a) Vad ska Hugo och Inez betala för bilen enligt Hugos modell?

b) Beräkna $V(15)$ och tolka resultatet.

Inez använder modellen

$W(t) = 180\,000 - 12\,000t$ där W är värdet i kr och t är tiden i år efter bilköpet.

c) Beskriv två likheter mellan de båda modellerna för hur bilens värde minskar.

d) Det finns orimligheter i Hugos och Inez modeller. Beskriv en orimlighet i vardera modell.

(Np Ma2c vt 2012)

49. a) $V(0) = \underline{180\,000 \text{ kr}}$

b) $V(15) = 800 \cdot 15^2 - 24\,000 \cdot 15 + 180\,000 = \underline{0 \text{ kr}}$,
Efter 15 år beräknas restvärdet vara 0 kr.

c) Vid 0 och 15 år ger de samma värde.

d) Hugos modell ger en värdeökning efter 15 år.
Inez modell ger ett negativt värde efter 15 år.

50 I sången *The Twelve Days of Christmas* ges ett antal presenter 12 dagar i följd:

a) Skriv av följande tabell i GeoGebra och fyll i de antal presenter som saknas.

Present	Nr	Antal
Partridge	1	12
Doves	2	22
Hens	3	
Birds	4	
Rings	5	
Geese	6	
Swans	7	
Maids	8	
Ladies	9	
Lords	10	
Pipers	11	
Drummers	12	

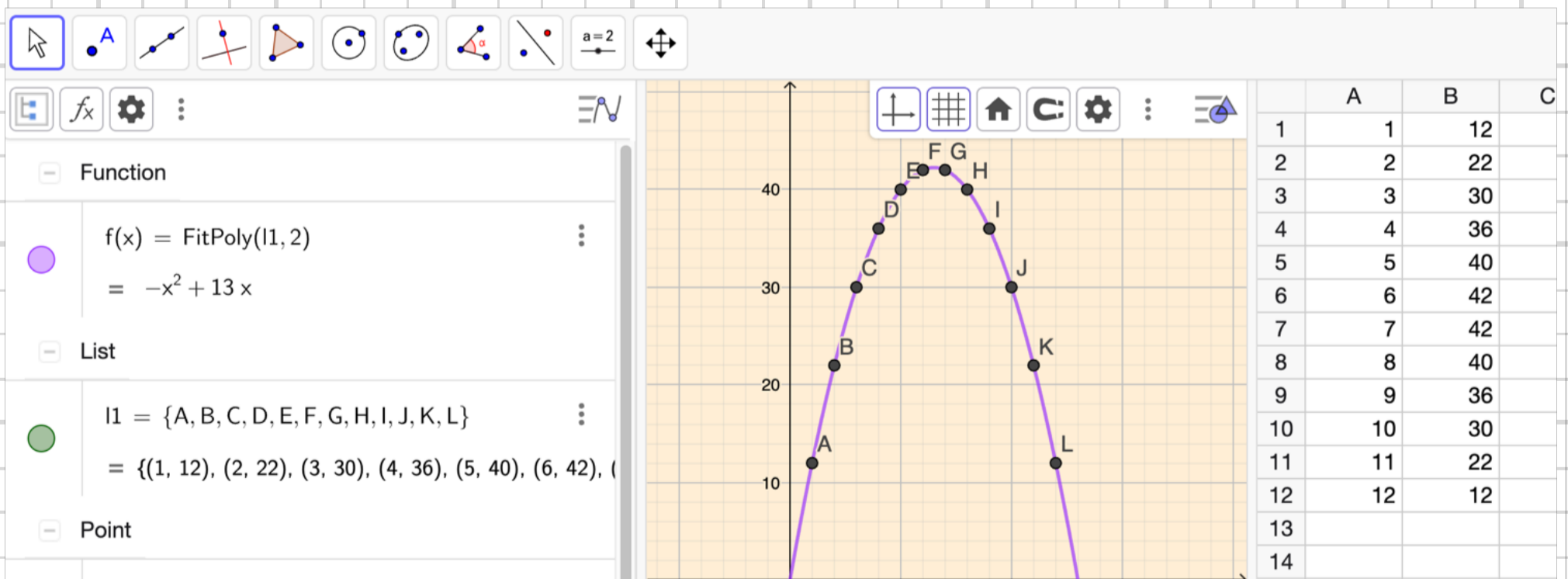
Present nr 1 "Partridge" gavs vid 12 tillfällen, dvs $1 \cdot 12 = 12$

Present nr 2 "Doves" gavs vid 11 tillfällen, dvs $2 \cdot 11 = 22$

b) För in mätpunkterna i ett diagram med antalet presenter på y -axeln och presentnummer på x -axeln.

c) Bestäm ett uttryck där antalet presenter, N , beror av presentnumret, n .

50. a-c) Geogebra ger $N(n) = 13n - n^2$

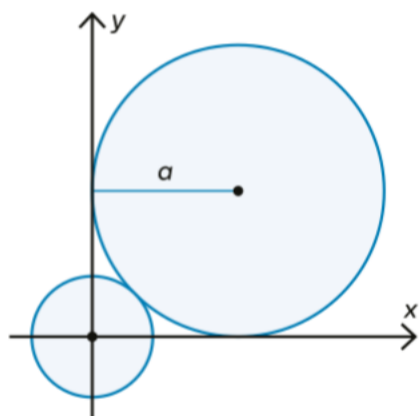


51 Sara kör 12,5 mil för att hälsa på en kompis. Under de första 9 milen är hennes medelhastighet 93 km/h. Sedan minskar medelhastigheten till 68 km/h. Beräkna medelhastigheten på hela sträckan.

$$51. \quad t_1 = \frac{90}{93} \text{ h}, \quad t_2 = \frac{125-90}{68} \text{ h}$$

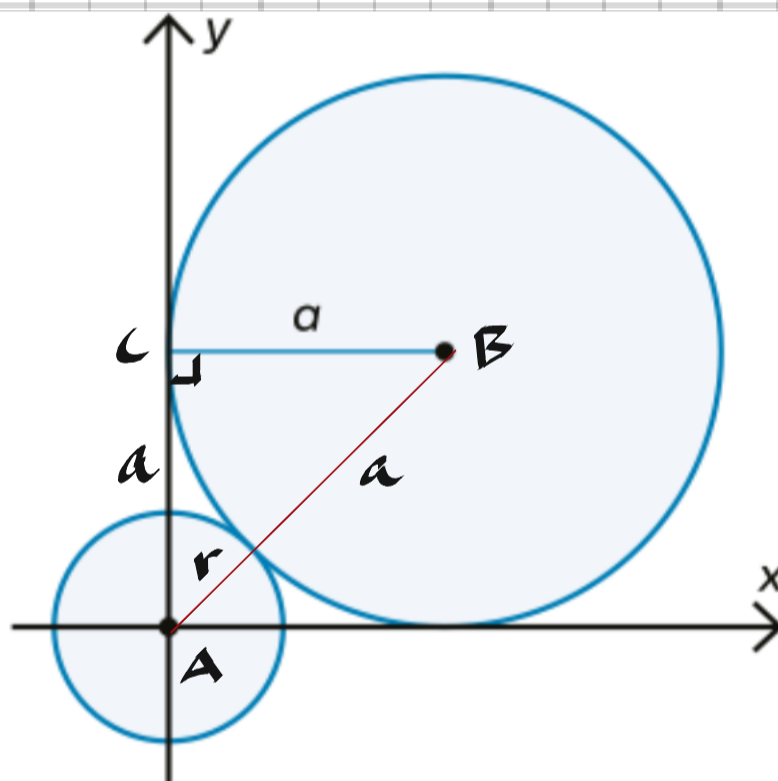
$$\bar{v} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{125}{\frac{90}{93} + \frac{35}{68}} \approx \underline{84 \text{ km/h}}$$

52 En cirkel med radien a tangerar de positiva koordinataxlarna. Den tangerar även en mindre cirkel som har mittpunkten i origo. Se figur.



Visa att den mindre cirkelns radie är $a(\sqrt{2} - 1)$ längdenheter.

(Np Ma2c vt 2015)



52, $\triangle ABC$ "är en halv kvadrat \Rightarrow

$$r + a = a\sqrt{2} \Rightarrow r = a(\sqrt{2} - 1) \quad \#$$

53 De fem talen 5, 2, x , 7 och 6 är heltal.

- a) Vilka värden får medianen för olika värden på x ? Motivera ditt svar.
b) För vilka värden på x får de fem talen samma värde på median och medelvärde?

53. a) $x \leq 5 \Rightarrow \text{medianen} = 5$

$x \geq 6 \Rightarrow \text{medianen} = 6$

b) ① $5 + 2 + x + 7 + 6 = 5,5 \Rightarrow$ $x = 5$

② $5 + 2 + x + 7 + 6 = 5,6 \Rightarrow$ $x = 10$

54 Till skridskoturen har Martina med sig varmt kaffe i en termos. Enligt en enkel modell gäller att temperaturen på kaffet avtar exponentiellt med tiden. Efter 4 timmar är temperaturen 76°C och efter ytterligare 2 timmar är temperaturen 69°C .

- Vilken var temperaturen på kaffet när det hällades i termosen?
- Teckna ett uttryck för hur kaffets temperatur beror på tiden.
- Efter hur lång tid har kaffets temperatur sjunkit till 60°C ?



54, $T(t) = c \cdot a^t$

$$\begin{aligned} \text{a) } (4, 76) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c \cdot a^4 = 76 \\ (6, 69) \Rightarrow \underline{\underline{c \cdot a^6 = 69}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$a^2 = \frac{69}{76} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{69}{76}} \approx 0.953$$

$$(4, 76) \Rightarrow c = \frac{76}{0.953^4} \approx \underline{\underline{92^\circ\text{C}}}$$

$$\text{b) } \underline{\underline{T(t) = 92 \cdot 0.953^t}}$$

$$\text{c) } T(t) = 60^\circ\text{C} \Rightarrow 92 \cdot 0.953^t = 60$$

$$t = \frac{\lg \frac{60}{92}}{\lg 0.953} \approx \underline{\underline{8.9 \text{ h}}}$$