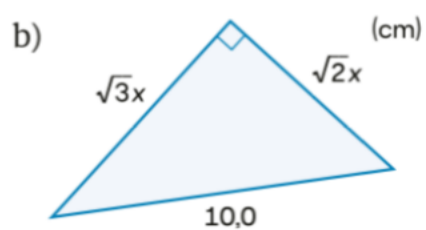
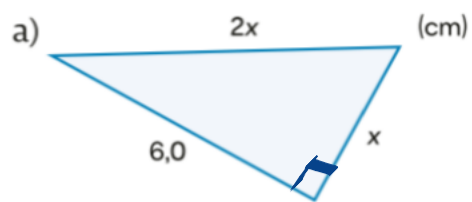


28 Bestäm längden av alla sidorna i trianglarna.



28. a)  $x^2 + 6^2 = (2x)^2$

$$3x^2 = 36$$

$$x = \pm \sqrt{12} \approx \underline{3.5 \text{ cm}}$$

$$2x = \underline{7.0 \text{ cm}}$$

b)  $(\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{2}x)^2 = 10^2$

$$3x^2 + 2x^2 = 100$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \pm \sqrt{20}$$

$$\sqrt{2}x = \sqrt{40} \approx \underline{6.3 \text{ cm}}$$

$$\sqrt{3}x = \sqrt{60} \approx \underline{7.7 \text{ cm}}$$

29 Folkmängden i Umeå har från den 31 december år 2015 till den 31 december år 2020 ökat med 7,8 %. Hur stor genomsnittlig procentuell ökning per år motsvarar det?

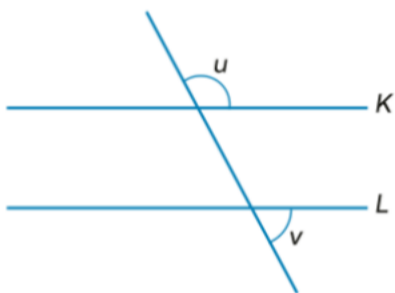
$$29. \quad (1+x)^5 = 1,078 \Rightarrow$$

$$x = 1,078^{1/5} - 1 \approx 0,015 = \underline{1,5\%}$$

30 För en andragradsfunktion gäller att funktionen har ett nollställe för  $x = -3$  och att den antar sitt minsta värde för  $x = 1$ . Ange funktionens andra nollställe.

$$30. \quad x_2 = 1 - (-3) + 1 = \underline{5}$$

31 I figuren är linjerna  $K$  och  $L$  parallella och vinkeln  $v = 72^\circ$ . Bestäm vinkeln  $u$  och motivera hur du kan veta hur stor vinkeln är.

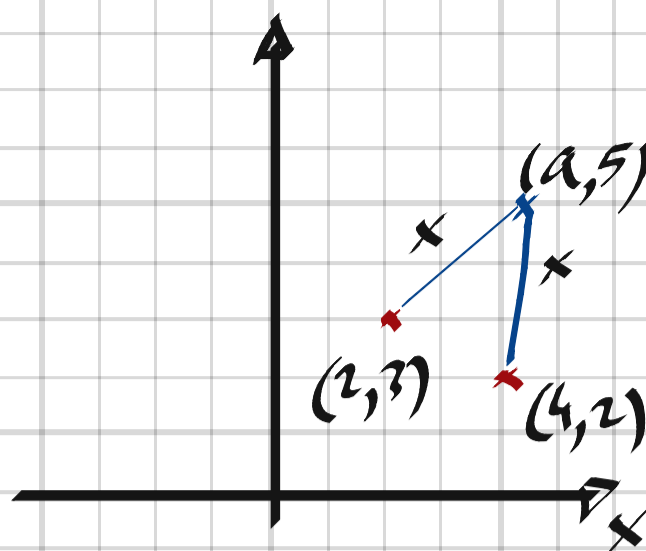


$$31. \quad u = 180^\circ - v = 180^\circ - 72^\circ = \underline{108^\circ}$$

$u$  är likabelägen med vinkeln  $180^\circ - v$

32 Punkten  $(a, 5)$  ligger lika långt från punkten  $(4, 2)$  som från  $(2, 3)$ . Bestäm talet  $a$ .

32.



$$(a-2)^2 + (5-3)^2 = (a-4)^2 + (5-2)^2$$

$$a^2 - 4a + 4 + 4 = a^2 - 8a + 16 + 9$$

$$4a = 17$$

$$a = \underline{\underline{\frac{17}{4}}}$$

33 Värdet av Pers pengar  $V$  kr växer på banken under  $t$  år enligt modellen  $V(t) = 2\,500 \cdot 10^{0,015t}$

a) Hur stor är räntesatsen?

b) Hur länge tar det innan värdet av Pers pengar har fördubblats?

33.

$$a) V(t) = 2500 \cdot (10^{0,015})^t = 2500 \cdot 1,035^t \Rightarrow$$

$$\text{Räntesatsen} = \underline{\underline{3,5\%}}$$

$$b) 1,035^t = 2$$

$$t = \frac{\lg 2}{\lg 1,035} \approx \underline{\underline{20 \text{ år}}}$$

34 Vi har funktionerna  $f(x) = x^2 - 4$  och  $g(x) = x - 2$ .

a) Bestäm  $g(3)$

b) Bestäm  $f(g(3))$

c) Bestäm  $f(g(x))$ .

$$34, \quad a) \quad g(3) = 3 - 2 = \underline{1}$$

$$b) \quad f(g(3)) = f(1) = 1^2 - 4 = \underline{-3}$$

$$c) \quad f(g(x)) = (x-2)^2 - 4 = \underline{x^2 - 4x}$$

35 En person tar 4,0 mg av ett läkemedel. Läkemedlet tas upp av kroppen och mängden minskar exponentiellt med tiden. Efter 12 timmar återstår halva mängden. Hur lång tid efter det att personen tagit läkemedlet återstår det 0,1 mg?

$$35, \quad (1-x)^{12} = 0,5$$

$$x = 1 - 0,5^{1/12} \approx 0,056 = 5,6\% \text{ minskning/år}$$

$$4 \cdot 0,944^t = 0,1$$

$$t = \frac{\lg \frac{0,1}{4}}{\lg 0,944} \approx \underline{64 \text{ h}}$$

**36** Lös ekvationerna

a)  $(x+7)(x-7) = 6x+34$

b)  $(x+5)^2 - 2(x+5) = 0$

36. a)  $x^2 - 49 = 6x + 34$

$$x^2 - 6x - 83 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9+83} = 3 \pm \sqrt{92} = \underline{3 \pm 2\sqrt{23}}$$

b)  $(x+5)(x+3) = 0$

$$\underline{x_1 = -5, x_2 = -3}$$

**37** Beräkna utan att använda digitalt hjälpmedel.

a)  $16^{\frac{3}{2}}$

b)  $27^{\frac{4}{3}}$

c)  $\lg \frac{1}{\sqrt{10}}$

d)  $\lg 400 - \lg 4$

37. a)  $16^{\frac{3}{2}} = (16^{\frac{1}{2}})^3 = 4^3 = \underline{64}$

b)  $27^{\frac{4}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^4 = 3^4 = \underline{81}$

c)  $\lg \frac{1}{\sqrt{10}} = \lg 10^{-\frac{1}{2}} = \underline{-\frac{1}{2}}$

d)  $\lg 400 - \lg 4 = \lg 4 + \lg 100 - \lg 4 = \underline{2}$

38 Undersök om det är möjligt att sätta ut implikationstecken eller ekvivalenstecken mellan följande utsagor.

a)  $x^2 = 9 \quad x = 3$

b) man är hungrig      man äter maten i skolans matsal

38.

a)  $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

b) man "är hungrig"  $\Leftarrow$  man "äter maten i skolans matsal"  
(man behöver ju dock inte tvunget vara hungrig för att äta)

39 Visa att om  $B = 2A$  så är  $\lg \frac{A}{B} = -\lg 2$ .

39.  $\lg \frac{A}{B} = \lg \frac{A}{2A} = \lg 2^{-1} = -\lg 2 = HL \quad \#$

40 Förenkla

a)  $(x + \sqrt{7})^2 - (x - \sqrt{7})^2$

b)  $\frac{b(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})}{x^2 - a}$

40. a)  $2\sqrt{7}x + 7 + 2\sqrt{7}x - 7 = \underline{4\sqrt{7}x}$

b)  $\frac{b(x^2 - a)}{x^2 - a} = \underline{b}$

41 År 1900 var koldioxidhalten i atmosfären 280 ppm. År 2000 hade koldioxidhalten stigit till 370 ppm.

- a) Anta att förändringen var exponentiell. Med hur många procent ökade koldioxidhalten per år i genomsnitt under perioden?
- b) Mellan 2010 och 2020 ökade koldioxidhalten med ca 6,5 %. Hur lång tid tar det med denna exponentiella ökningstakt för koldioxidhalten att öka med lika många procent som mellan 1900 och 2000?

41. a)  $f(x) = 280 \cdot a^x$

$$(100, 370) \Rightarrow 280 \cdot a^{100} = 370 \Rightarrow a = \left(\frac{370}{280}\right)^{1/100} \approx 1,00279$$

$\Rightarrow$  "ökningen var ca 0,28 % per år"

b)  $b^{10} = 1,065 \Rightarrow b = 1,065^{1/10} \approx 1,00632$

$$280 \cdot 1,00632^x = 370$$

$$x = \frac{\lg \frac{370}{280}}{\lg 1,00632} \approx \underline{44 \text{ år}}$$

---

42 Det största djur som någonsin funnits på jorden är blåvalen. Under de senaste hundra åren har antalet blåvalar minskat kraftigt på grund av jakt.

År 1900 fanns det ungefär 239 000 blåvalar i världshaven och hundra år senare var antalet ungefär 2 300. Anta att antalet blåvalar minskar exponentiellt med tiden.

Bestäm vilket år det för första gången kommer att vara färre än 200 blåvalar om minskningen fortsätter i samma takt.

(Np Ma2b vt 2015)

$$42. \quad f(t) = 239000 \cdot a^x$$

$$(100, 2300) \Rightarrow 239000 \cdot a^{100} = 2300 \Rightarrow$$

$$a = \left( \frac{2300}{239000} \right)^{1/100} \approx 0.9546$$

$$f(t) < 200 \Rightarrow 239000 \cdot 0.9546^x < 200$$

$$x > \frac{\lg \frac{200}{239000}}{\lg 0.9546} \approx 152.5$$

$$\text{År } 1900 + 153 = \underline{\underline{\text{År } 2053}}$$

---



43 Bestäm de värden på  $x$  där graferna till andragradsfunktionen  $f(x) = 3x^2 - 4x - 29$  och linjen  $g(x) = 2x + 16$  skär varandra.

(Np Ma2c vt 2013)

$$43. \quad 3x^2 - 4x - 29 = 2x + 16$$

$$3x^2 - 6x - 45 = 0$$

$$3(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$3(x - 5)(x + 3) = 0$$


$$\underline{x_1 = -3, x_2 = 5}$$

---

44 Är  $\log_8 9$  större eller mindre än 1? Motivera ditt svar.

$$44. \quad \log_8 8 = 1 \Rightarrow \log_8 9 > 1$$

---



**45** Varje plats på jorden kan positionsbestämmas med longitud och latitud. Med koordinaternas hjälp kan man därmed bestämma avståndet mellan två platser. I nord-sydlig riktning motsvarar en breddgrad alltid ca 11 mil. I öst-västlig riktning varierar det med latituden, men där London och Paris ligger motsvarar en längdgrad ca 7,1 mil. Bestäm avståndet mellan de två städerna.

**London**  
Lat: 51,51  
Long: -0,13

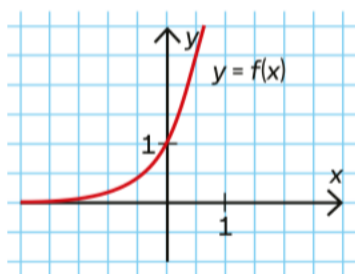
**Paris**  
Lat: 48,86  
Long: 2,35

$$45 \quad y = (51,51 - 48,86) \cdot 11 = 29,15 \text{ mil}$$

$$x = (2,35 - (-0,13)) \cdot 7,1 = 17,608 \text{ mil}$$

$$\text{Avståndet} = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \sqrt{29,15^2 + 17,608^2} \approx \underline{34 \text{ mil}}$$

**46** Bestäm funktionsuttrycket för exponentialfunktionen  $y = f(x)$  som är ritad i figuren.



$$46. \quad (0, 1) \Rightarrow f(x) = 1 \cdot a^x$$

$$(0,5, 2,5) \Rightarrow a^{0,5} = 2,5 \Rightarrow a = 2,5^2 = 6,25$$

$$\underline{f(x) = 6,25^x}$$

47 Lös ekvationssystemet algebraiskt. Svara exakt.

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 12 \\ 2 \lg x - \lg y = 6 \end{cases}$$

$$47. \quad \begin{cases} \lg x + \lg y = 12 \\ + \quad 2 \lg x - \lg y = 6 \end{cases}$$

$$3 \lg x = 18$$

$$\lg x = 6$$

$$x = 10^6$$

$$y = 10^{12 - \lg x} = 10^6$$

$$\underline{(x, y) = (10^6, 10^6)}$$

48 Antalet huggormar  $h$  på en skärgårdsö antas växa med antalet år  $x$  enligt sambandet  $h = 650 \cdot 1,03^x$ . Antalet sorkar  $s$  på samma ö antas i stället minska enligt  $s = 12\,000 \cdot 0,93^x$ . När kan man enligt sambanden förvänta sig att antalet huggormar och antalet sorkar är lika?

$$48. \quad 650 \cdot 1,03^x = 12\,000 \cdot 0,93^x$$

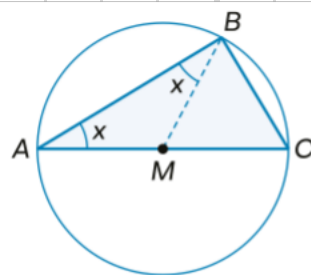
$$\left(\frac{1,03}{0,93}\right)^x = \frac{12\,000}{650}$$

$$x = \frac{\lg \frac{12\,000}{650}}{\lg \frac{1,03}{0,93}} \approx \underline{28,5 \text{ år}}$$

49 Thales från Miletos var en grekisk matematiker som levde för 2 600 år sedan. Han formulerade en sats med följande innebörd:

Varje triangel som är inskriven i en cirkel har en rät vinkel om en av triangelns sidor är diameter i cirkeln.

Triangeln  $ABC$  är inskriven i en cirkel på ett sådant sätt. Sidan  $AC$  är en diameter i cirkeln. Punkten  $M$  är mittpunkt på sträckan  $AC$ . I figuren är även sträckan  $BM$  inritad.

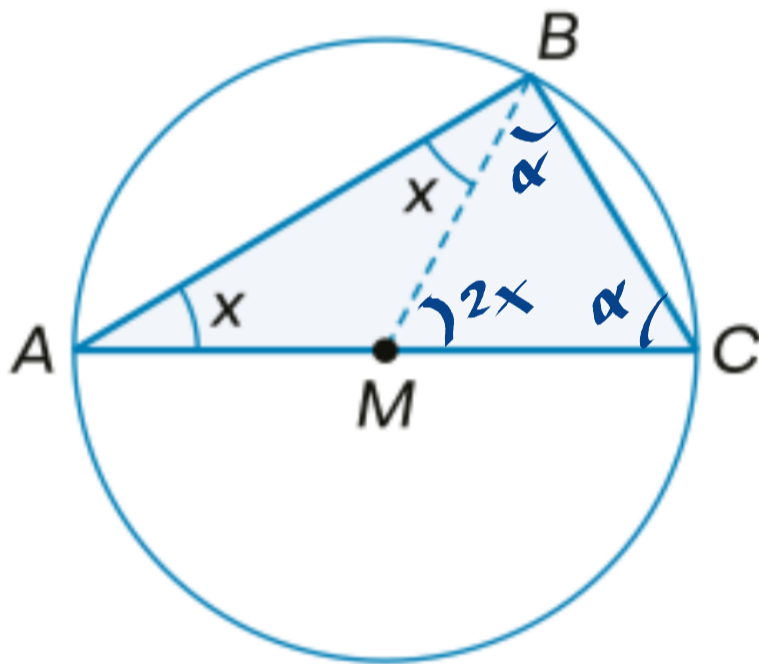


- Förklara varför de två vinklarna markerade med  $x$  är lika stora.
- Visa, utan att använda randvinkelsatsen, att Thales sats är korrekt.

(Np Ma2c vt 2012)

49. a)  $|AM|$  och  $|BM|$  är radie och  $\triangle ABM$  är därför likbent.

b)



$$\angle BMC = 2x \quad (\text{yttervinkelsatsen})$$

$$\triangle BCM : \alpha = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x \Rightarrow$$

$$\angle B = x + \alpha = x + 90^\circ - x = 90^\circ \quad \#$$

50 För vilka värden på det reella talet  $a$  har ekvationen  $x^2 + ax + a = 0$

- a) två reella rötter
- b) en reell dubbelrot
- c) ingen reell rot

50. a)  $(x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + a = 0$

$$\frac{a^2}{4} - a > 0 \Rightarrow a(\frac{a}{4} - 1) > 0 \Rightarrow \underline{a_1 > 4, a_2 \leq 0}$$

b)  $\frac{a^2}{4} - a = 0 \Rightarrow a(\frac{a}{4} - 1) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 4, a_2 = 0}$

c)  $\frac{a^2}{4} - a < 0 \Rightarrow a(\frac{a}{4} - 1) < 0 \Rightarrow \underline{0 < a < 4}$

51 Sveriges befolkning var 5,14 miljoner år 1900 och 8,86 miljoner år 2000. Hur många bodde i Sverige då Karl XII dog år 1718 om befolkningsökningen har varit exponentiell sedan dess?

51.  $f(x) = c \cdot a^x$ ,  $x=0$  motsvarar år 1718.

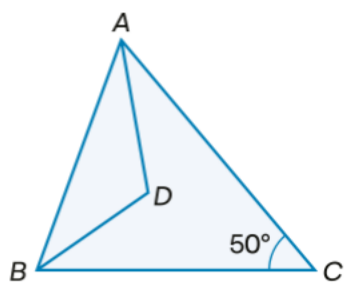
$(182, 5.14) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c \cdot a^{182} = 5.14 \end{array} \right\}$

$(282, 8.86) \Rightarrow \underline{\frac{\div}{\div} \left. \begin{array}{l} c \cdot a^{282} = 8.86 \end{array} \right\}}$

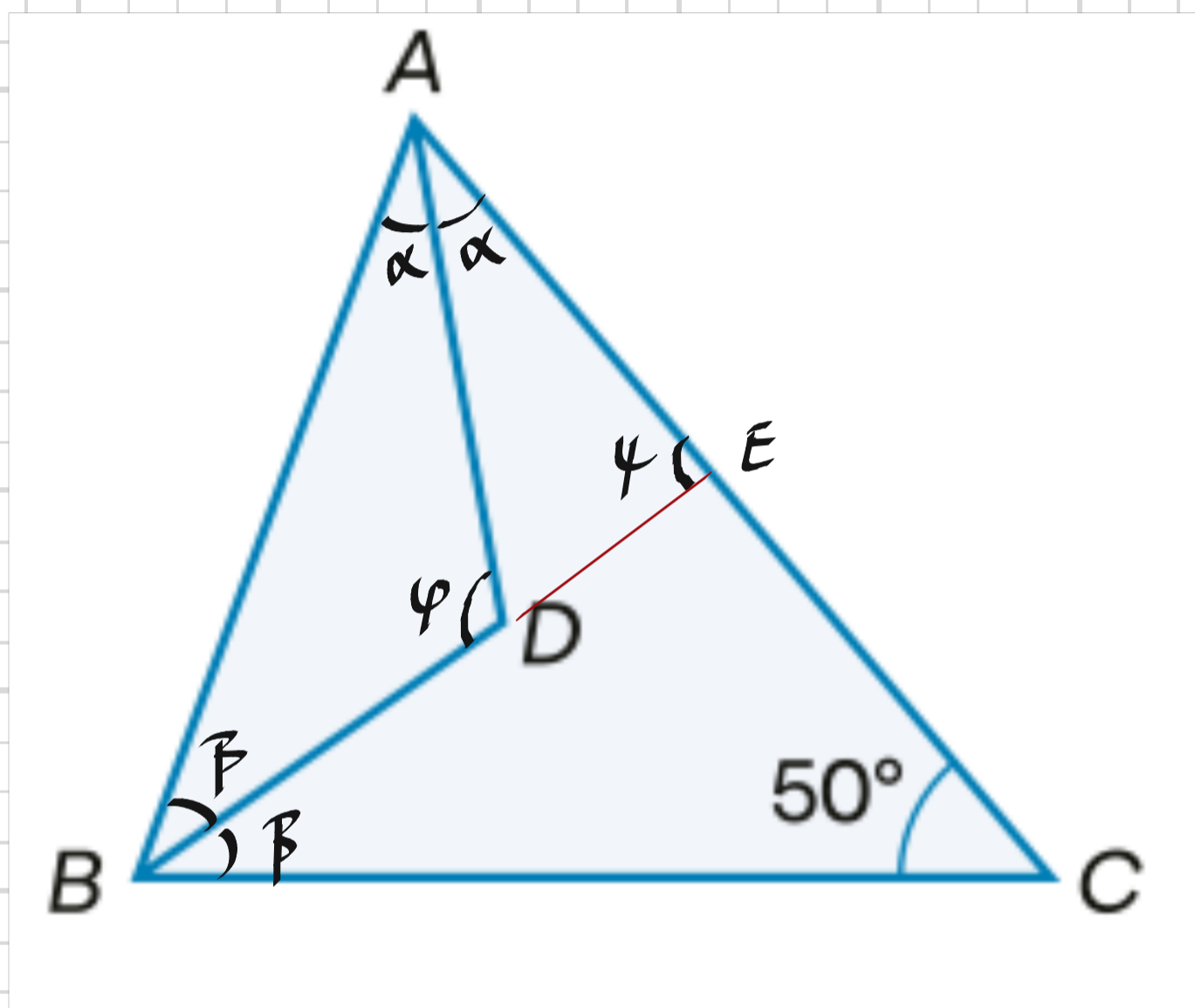
$$a^{100} = \frac{8.86}{5.14} \Rightarrow a = \left( \frac{8.86}{5.14} \right)^{1/100} \approx 1.0055$$

$$c = \frac{5.14}{1.0055^{182}} \approx \underline{1.9 \text{ miljoner}}$$

52 Sträckorna  $AD$  och  $BD$  är bisektriser i triangeln  $ABC$ . Bestäm vinkeln  $ADB$ .



52,



1)  $\psi = \beta + 50^\circ$  (yttre vinkelsatsen)

2)  $\psi = \alpha + \psi = \alpha + \beta + 50^\circ$  (yttre vinkelsatsen)

3)  $\alpha + \beta + \psi = 180^\circ$  (vinkelsumman)

1+2+3)  $\psi - 50^\circ = 180^\circ - \psi$

$$\angle ADB = \psi = \frac{180^\circ + 50^\circ}{2} = \underline{\underline{115^\circ}}$$

**53** Halten av kol-14 i en levande organism ligger på en stabil nivå. När organismen dör minskar halten exponentiellt med tiden. Halveringstiden för kol-14 är ca 5 730 år. Ett arkeologiskt fynd innehåller 15 % av den halt av kol-14 som levande organiskt material innehåller. Hur gammalt är fyndet?

53.  $f(x) = C \cdot a^x$

$$a^{5730} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0.99988$$

$$C \cdot a^x = C \cdot 0.15 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\lg 0.15}{\lg 0.99988} \approx \underline{16000 \text{ år}}$$

---