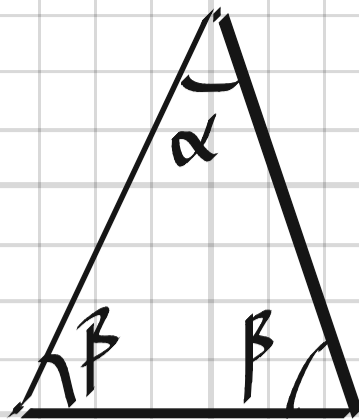


33 I en likbent triangel är en av vinklarna 15 grader större än en annan vinkel. Beräkna triangelns alla vinklar.



33,

$$i) \begin{cases} \alpha = \beta + 15^\circ \\ \alpha + 2\beta = 180^\circ \end{cases}$$

$$\beta + 15^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

$$3\beta = 165^\circ$$

$$\beta = 55^\circ, \alpha = 55^\circ + 15^\circ = 70^\circ$$

$$ii) \begin{cases} \beta = \alpha + 15^\circ \\ \alpha + 2\beta = 180^\circ \end{cases}$$

$$\alpha + 2(\alpha + 15^\circ) = 180^\circ$$

$$3\alpha = 150^\circ$$

$$\alpha = 50^\circ, \beta = 50^\circ + 15^\circ = 65^\circ$$

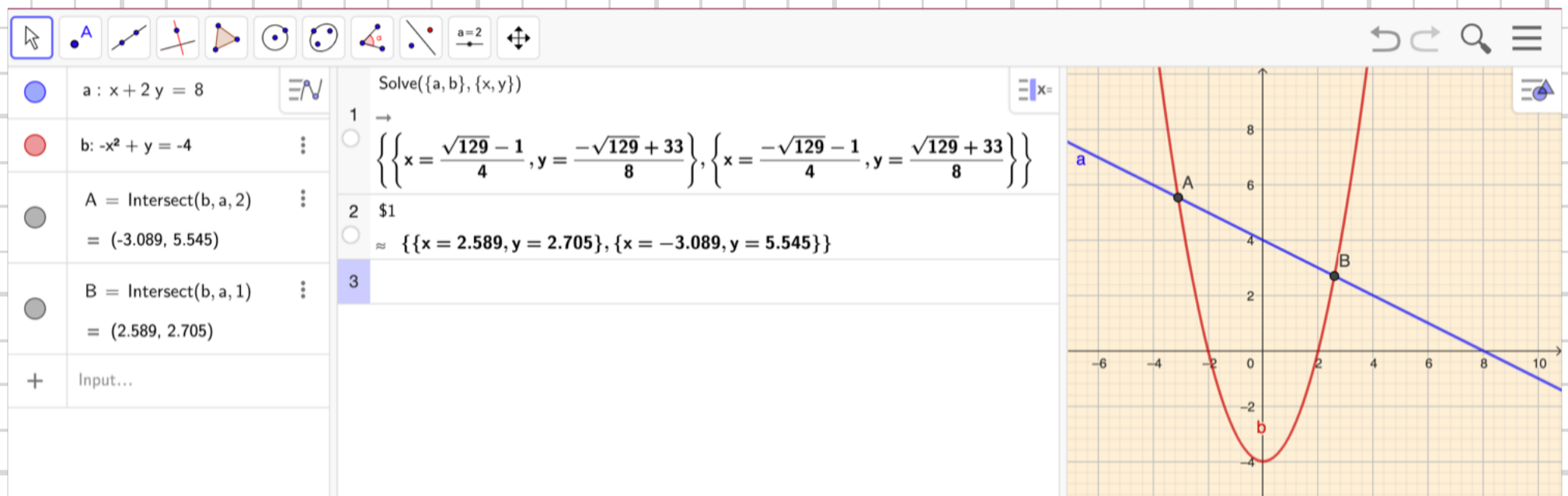
Vinklarna är antingen  $55^\circ, 55^\circ$  och  $70^\circ$   
eller  $50^\circ, 65^\circ$  och  $65^\circ$

34 Lös ekvationssystemet med grafitande hjälpmedel. Svara med två decimalers noggrannhet.

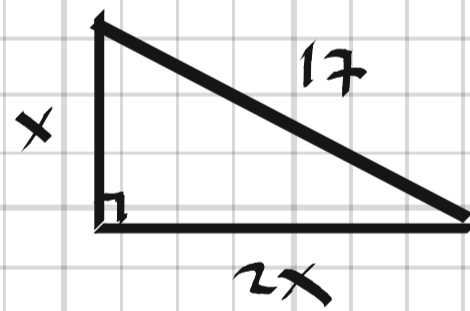
$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -x^2 + y = -4 \end{cases}$$

34. Geogebra ger:

$$\underline{(x_1, y_1) \approx (-3.1, 5.5), (x_2, y_2) \approx (2.6, 2.7)}$$



35 Hypotenusan i en rätvinklig triangel är 17 cm. Den ena kateten är dubbelt så lång som den andra. Bestäm kateternas längder.



35.  $x^2 + (2x)^2 = 17^2$

$$5x^2 = 289$$

$$x = \left(\pm\right) \sqrt{\frac{289}{5}} \approx 7.6 \text{ cm}$$

Kateternas längder är 7.6 och 15.2 cm

36 Under Europamästerskapen i fotboll gjorde en av backarna ett inkast. Bollen följde en bana som kan beskrivas med modellen

$$h(x) = -0,042x^2 + 0,58x + 2,2$$

där  $h(x)$  meter är bollens höjd över marken och  $x$  är avståndet i meter längs marken från den plats där inkastet gjordes.

a) Bestäm  $h(0)$  och tolka resultatet.

b) Bestäm längden på inkastet om vi antar att bollen landade på marken.

c) Bestäm bollens högsta höjd över marken.

36. a)  $h(0) = \underline{2,2 \text{ m}}$

Bollens höjd över marken vid kastets start.

b)  $h(x) = 0 \Rightarrow$

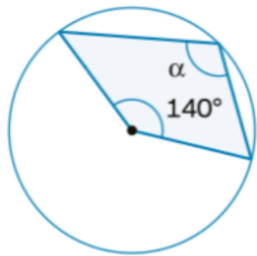
$$-0,042(x^2 - 13,81x - 52,38) = 0$$

$$x = 6,91 \pm \sqrt{47,68 + 52,38} \approx \underline{16,9 \text{ m}}$$

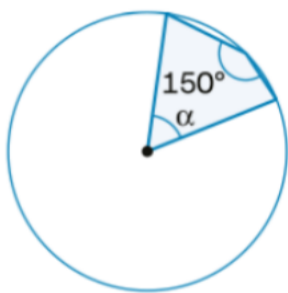
c)  $h_{\max} = h(6,91) = -0,042 \cdot 6,91^2 + 0,58 \cdot 6,91 + 2,2 = \underline{4,2 \text{ m}}$

37 Bestäm vinkeln  $\alpha$  i figuren.

a)



b)



37. a)  $\alpha = \frac{360^\circ - 140^\circ}{2} = \underline{110^\circ}$

b)  $\alpha = 360^\circ - 150^\circ \cdot 2 = \underline{60^\circ}$

38 Lös ekvationerna algebraiskt

a)  $2x^2 + 2x - 12 = 0$

b)  $x^2 - x - \frac{5}{16} = 0$

38. a)  $2(x^2 + x - 6) = 0$

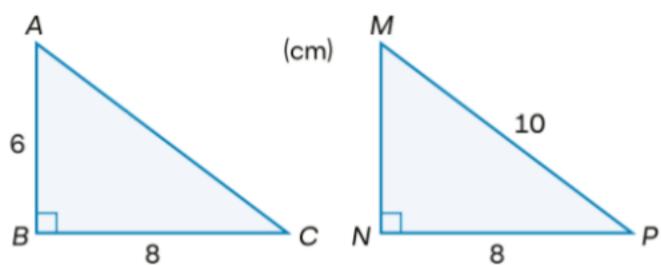
$$2(x-2)(x+3) = 0$$

$$\underline{x_1 = -3, x_2 = 2}$$

b)  $x = \frac{2}{4} \pm \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{5}{16}} = \frac{2 \pm 3}{4}$

$$\underline{x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{5}{4}}$$

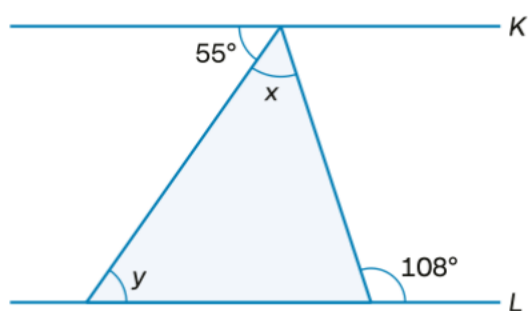
39 Är triangeln ABC kongruent med triangeln MNP? Motivera ditt svar.



39.  $|AC| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$

Alla sidor lika långa  $\Rightarrow$  Ja, de är kongruenta.

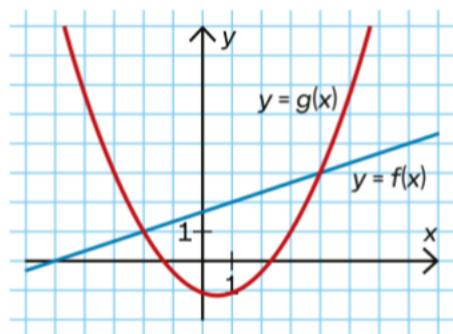
40 I figuren är linjerna  $K$  och  $L$  parallella. Bestäm vinklarna  $x$  och  $y$ .



40.  $y = \underline{55^\circ}$  (alternativinklar)

$x = 108^\circ - y = 108^\circ - 55^\circ = \underline{53^\circ}$  (yttrevinkelsatsen)

41 Koordinatsystemet visar graferna till en rät linje  $f$  och en andragradsfunktion  $g$ .



Besvara frågorna med hjälp av graferna.

a) För vilka värden på  $x$  gäller att  $g(x) < 3$ ?

b) För vilka värden på  $x$  gäller att  $f(x) - g(x) = 0$ ?

(Np Ma2c vt 2015)

41. a)  $\underline{-3 < x < 4}$

b)  $\underline{x = -2 \text{ och } x = 4}$

42 Fyll i lämpliga påståenden i stället för prickarna, så att symbolen mellan påståendena gäller.

- a) "... "  $\Rightarrow$  hon är född i augusti
- b) "... "  $\Rightarrow$  fyrhörningens motstående vinklar är lika stora
- c) "... "  $\Rightarrow x^2 = 7$

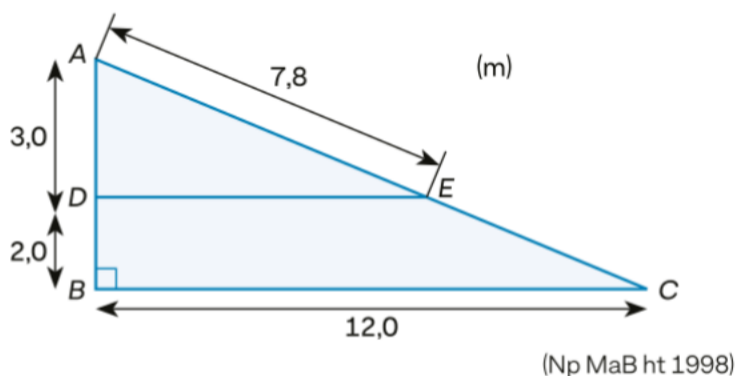
42. a) "Ida fyller år 5/8"

b) "Fyrhörningen är en romb"

c) " $x = \sqrt{7}$ "

43 I triangeln ABC nedan är sidan DE parallell med sidan BC.

Beräkna längden av sträckan EC på två olika sätt.



i) Transversalsatsen

ii) Topptriangelsatsen

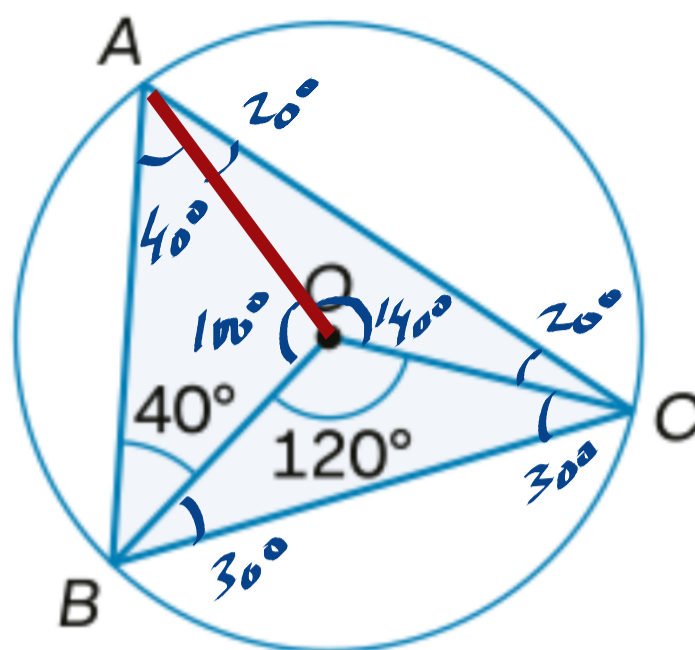
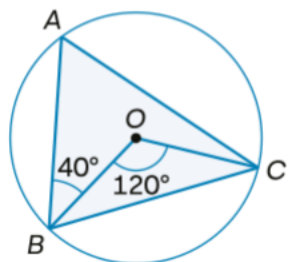
iii) Pythagoras sats

43. i)  $\frac{|EC|}{7.8} = \frac{2}{3} \Rightarrow |EC| = 7.8 \cdot \frac{2}{3} = \underline{5.2 \text{ m}}$

ii)  $\frac{|EC| + 7.8}{2 + 3} = \frac{7.8}{3} \Rightarrow |EC| = \frac{7.8 \cdot 5}{3} - 7.8 = \underline{5.2 \text{ m}}$

iii)  $(|EC| + 7.8)^2 = (3 + 2)^2 + 12^2 \Rightarrow |EC| = \sqrt{169} - 7.8 = \underline{5.2 \text{ m}}$

44 Punkterna A, B och C ligger på en cirkel där O är cirkelns medelpunkt. Bestäm vinklarna i triangeln ABC.



44,

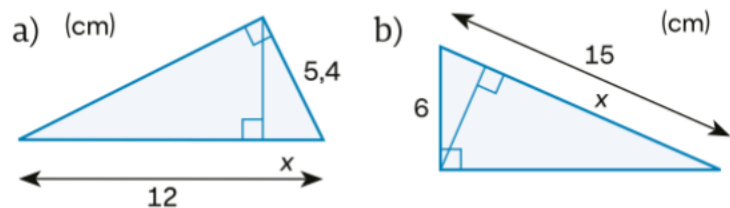
$\triangle ABO$ ,  $\triangle ACO$  och  $\triangle BCO$  är alla likbenta, vilket leder till en vinkelfördelning enligt figur ovan.

$\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle C = 50^\circ$

45 För en funktion g gäller att  $g(t) = b - t$ . För vilka värden på  $b$  gäller att  $g(2) = 9$ ?

45,  $b - 2 = 9 \Rightarrow \underline{b = 11}$

46 Hur långa är sträckorna som är markerade med  $x$ ?

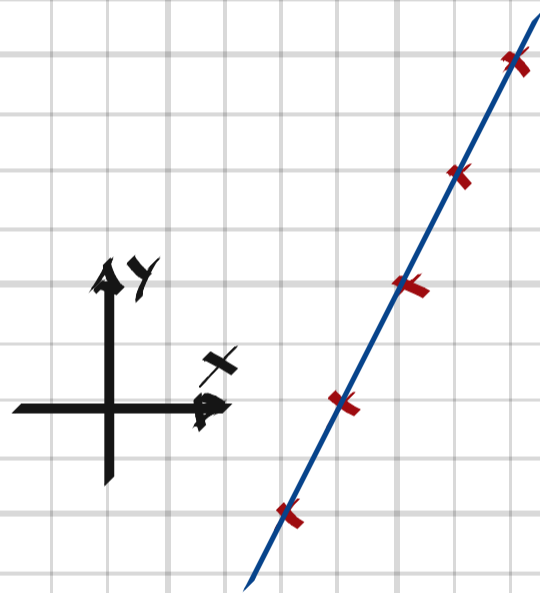


46. a) 
$$\frac{x}{5,4} = \frac{5,4}{12} \Rightarrow x = \frac{5,4^2}{12} \approx \underline{2,4 \text{ cm}}$$

b) 
$$\frac{15-x}{6} = \frac{6}{15} \Rightarrow x = 15 - \frac{6^2}{15} = \underline{12,6 \text{ cm}}$$

47 För en funktion  $f$  gäller för alla värden på  $x$  att  $f(x+1) = f(x) + 2$ . Beskriv hur grafen till funktionen  $f$  ser ut.

47. Grafen blir en rät linje  
med lutningen  $k=2$ .



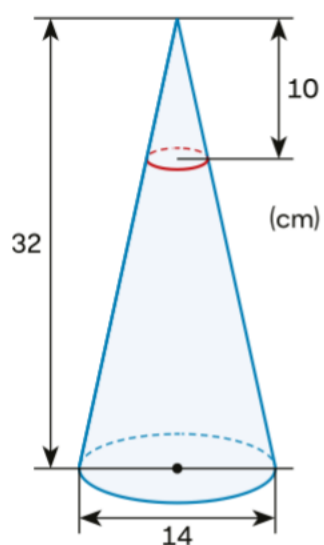
48 För vilket värde på konstanten  $a$  saknar ekvationssystemet lösning?

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + ay = 16 \end{cases}$$

48. 
$$\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{x}{2} + 2 \\ y = -\frac{2}{a}x + \frac{16}{a} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Samma } k: \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \\ \text{olika } m: \frac{16}{a} \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a=4}$$



49 Konens topp kapas med ett tvärsnitt parallellt med basytan enligt figuren. Beräkna tvärsnittets omkrets.



$$49. \quad \frac{r}{10} = \frac{7}{32} \Rightarrow r = \frac{35}{16} \text{ cm}$$

$$\text{Omkretsen} = 2\pi r = \frac{35\pi}{8} \approx \underline{14 \text{ cm}}$$

50 För vilka värden på konstanten  $a$  saknar andragradsekvationen  $x^2 + ax + 4 = 0$  lösningar?

$$50. \quad \text{Då diskriminanten } \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4 < 0 \Rightarrow$$

$$a^2 < 16 \Rightarrow$$

$$\underline{-4 < a < 4}$$

- 51** Antalet hörlurar som säljs beror på deras pris,  $p$  kr. Priset på hörlurarna kan beskrivas med  $p = 5\,000 - 10x$ , där  $x$  är antalet sålda hörlurar.
- Vilket pris ska hörlurarna ha för att intäkten ska bli maximal?
  - Hur stor blir den maximala intäkten?

51.

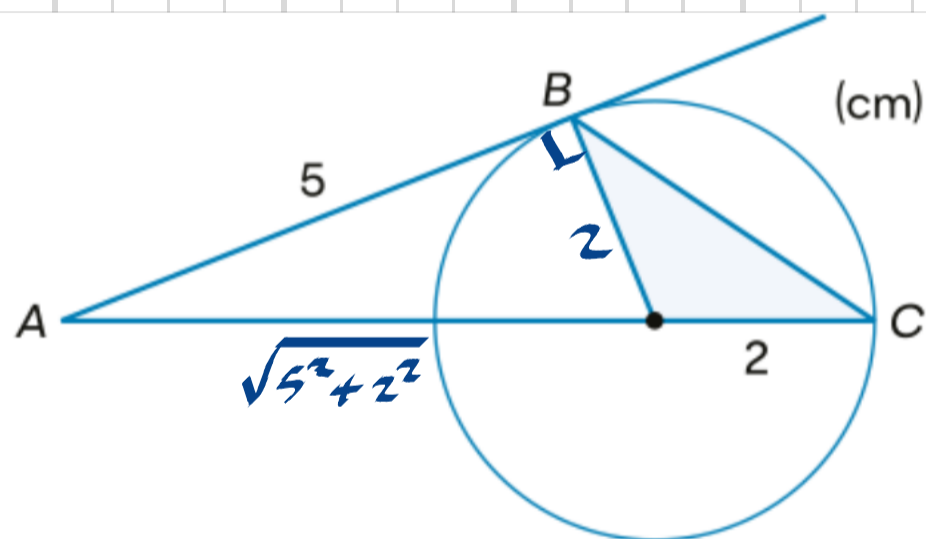
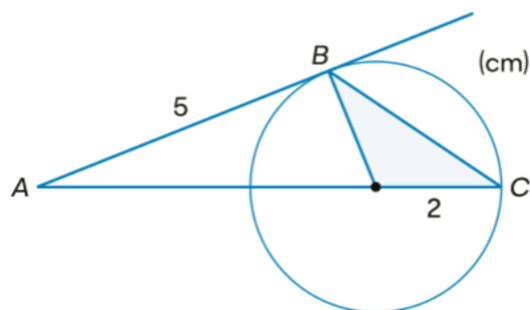
$$a) \quad I = p \cdot x = 5000x - 10x^2 = 10x(500 - x)$$

$$I_{\max} \text{ nås vid } x = \frac{500}{2} = 250 \text{ sålda luras} \Rightarrow$$

$$\text{Priset } p(250) = 5000 - 10 \cdot 250 = \underline{2500 \text{ kr}}$$

$$b) \quad I_{\max} = 250 \cdot 2500 = \underline{625\,000 \text{ kr}}$$

- 52** Sträckan  $AB$  är en del av en tangent till cirkeln. Bestäm längden av sträckan  $AC$  i figuren.



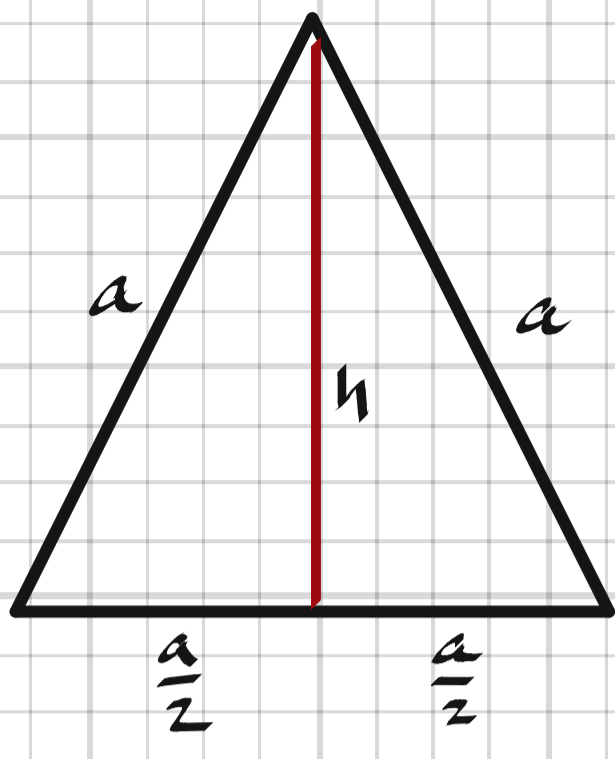
$$52. \quad |AC| = \sqrt{5^2 + 2^2} + 2 = \sqrt{29} + 2 \approx \underline{7,4 \text{ cm}}$$

53 Visa att i en liksidig triangel med sidan  $a$  gäller

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$53. \quad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$A = \frac{ha}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad \#$$



54 När sidan på en kub minskas med 1 cm, minskar volymen med  $91 \text{ cm}^3$ . Hur stor är volymen av den mindre kuben?

Alt:  $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  direkt enligt Pascals triangel

$$54. \quad (x-1)^3 = x^3 - 91$$

$$(x-1)(x-1)^2 = x^3 - 91$$

$$(x-1)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 91$$

$$x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 = x^3 - 91$$

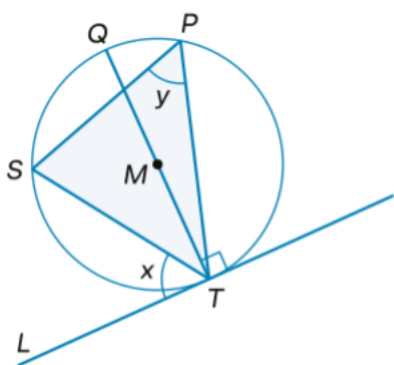
$$3x^2 - 3x - 90 = 0$$

$$3(x^2 - x - 30) = 0$$

$$x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 30} = 0,5 + 5,5 = 6,0$$

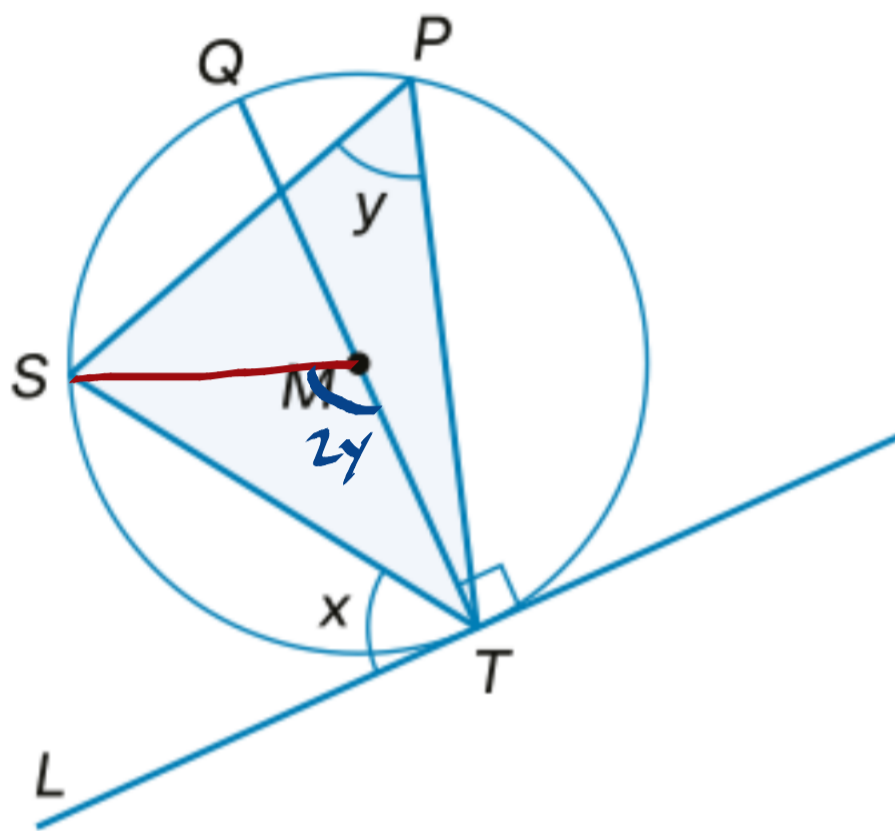
$$\text{Volymen } (x-1)^3 = 5^3 = \underline{125 \text{ cm}^3}$$

55 En linje  $L$  tangerar en cirkel i punkten  $T$ .  $M$  är cirkelns medelpunkt. Vinkeln mellan cirkelns diameter  $QT$  och linjen  $L$  är  $90^\circ$ . En triangel  $PST$  ligger i cirkeln med alla hörnen på cirkelns rand. Se figur.



- a) Hur stor är vinkeln  $y$  då vinkeln  $x$  är  $56^\circ$ ?  
Om punkterna  $P$  och  $S$  flyttas längs cirkelns rand kommer vinklarna  $x$  och  $y$  att variera. För vinkeln  $x$  gäller  $0^\circ < x < 90^\circ$ .
- b) Bestäm sambandet mellan vinklarna  $x$  och  $y$ .

(Np MaB vt 2011)



55. a)  $\triangle MST$  likbent med  $\angle SMT = 2y$

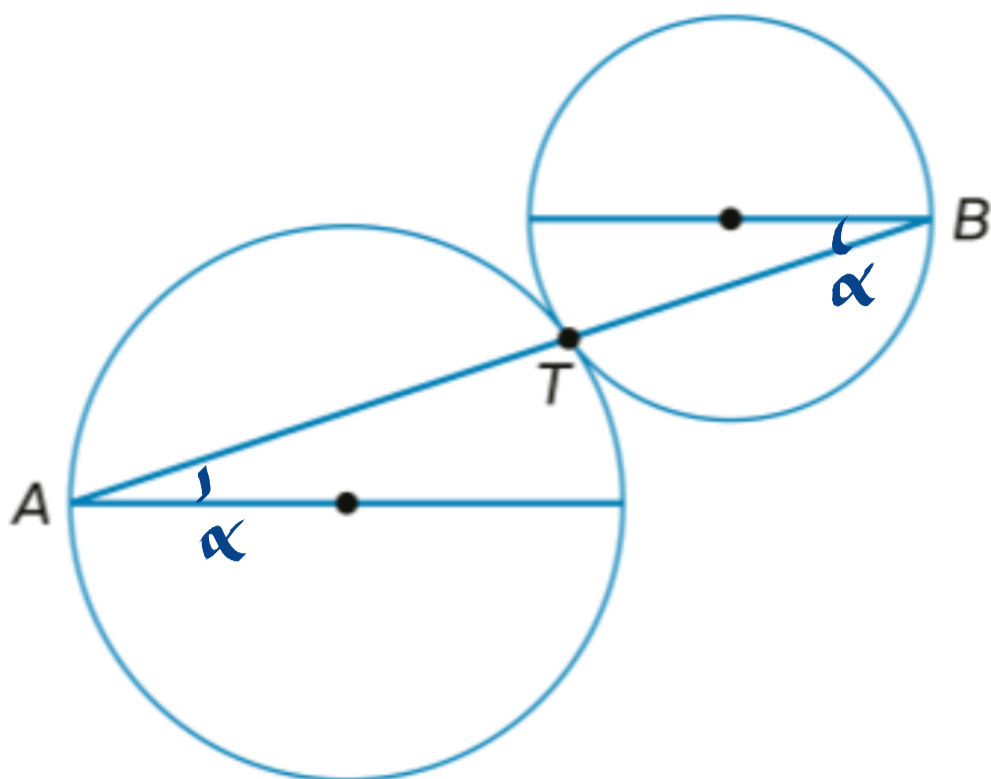
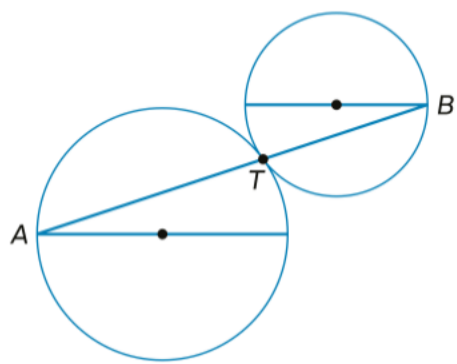
$$\angle MTS = 90^\circ - x \Rightarrow$$

$$2y + 2(90^\circ - x) = 180^\circ$$

$$y(x) = x = \underline{56^\circ}$$

b)  $y = x$  (se ovan)

56 Cirkelns diametrar är parallella. Visa att punkterna A, T och B ligger på en rät linje.



56.

Då de horisontella linjerna är parallella blir  $\angle B = \angle A$  (alternativvinklar).

Sträckorna AT och BT har således samma lutning och eftersom de bägge går genom punkten T måste A, T och B ligga på samma rätta linje. #

57 Klara cyklar 40 km på en viss tid, om hon håller en viss medelhastighet. Om medelhastigheten sjunker med 2 km/h, tar färden 15 minuter längre. Vilken fart håller Klara, när hon cyklar den snabbare varianten?

$$57. \quad \begin{cases} t_2 = t_1 + 0.25 \quad (\text{h}) \\ t_1 = \frac{40}{v_1} \\ t_2 = \frac{40}{v_1 - 2} \end{cases}$$

$$\frac{40}{v_1 - 2} = \frac{40}{v_1} + 0.25 \Rightarrow$$

$$40v_1 = 40(v_1 - 2) + 0.25v_1(v_1 - 2), \quad v_1 \neq 0, 2$$

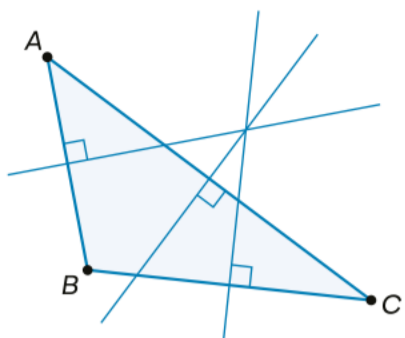
$$0.25v_1^2 - 0.5v_1 - 80 = 0$$

$$0.25(v_1^2 - 2v_1 - 320) = 0$$

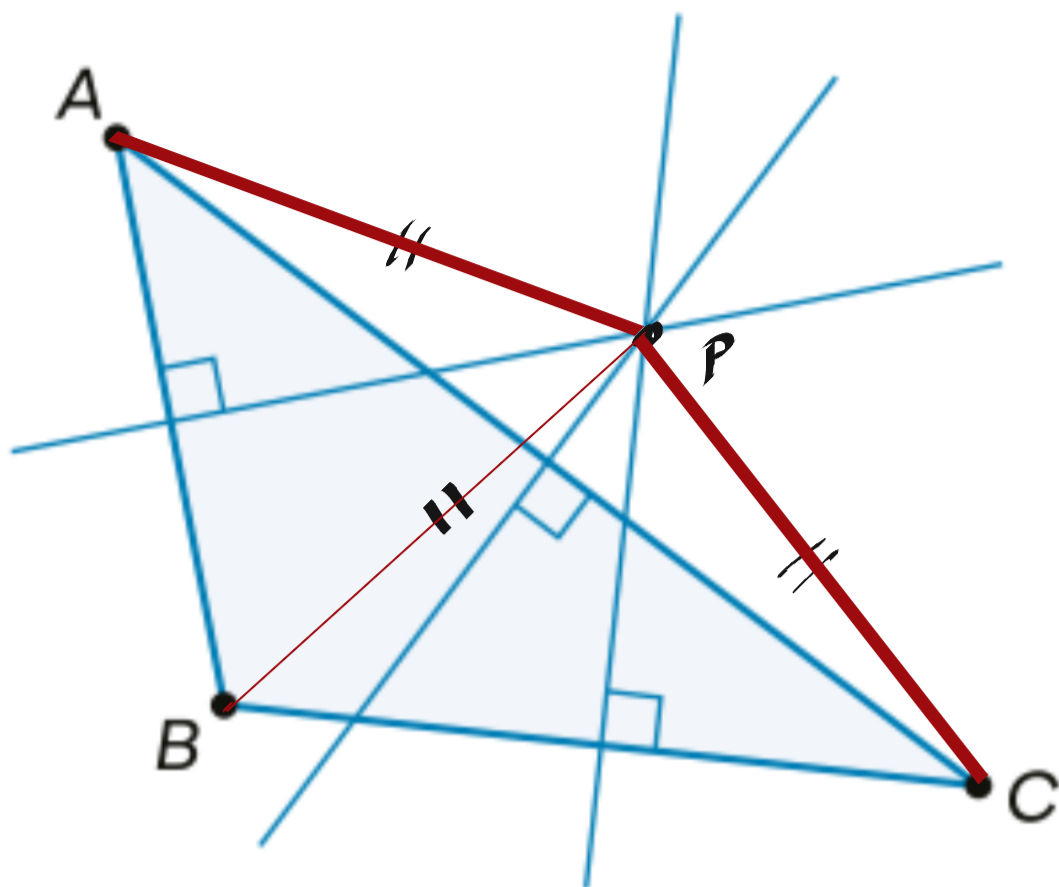
$$v_1 = 1 \pm \sqrt{1 + 320} \approx \underline{19 \text{ km/h}}$$

---

58 Visa att mittpunktsnormalerna i en triangel s  
varandra i en punkt.



En mittpunktsnorma  
en linje som är vinkel  
mot en sträcka och  
genom sträckans  
mittpunkt.



58.  $\triangle ABP$  och  $\triangle BCP$  likbenta  $\Rightarrow$

$|AP| = |BP| = |CP| \Rightarrow \triangle ACP$  också likbent

Normalen till AC delar  $\triangle ACP$  i två lika

delar och skär således även den punkten P.

#