14 Vinsten $V(x)$ kr för ett företag när de säljer x st glassar kan bestämmas med modellen $V(x) = -0{,}64x^2 + 32x - 289$. Hur många glassar ska de sälja för att maximera vinsten?

14. $V(x) = -0{,}64x^2 + 32x - 289 =$

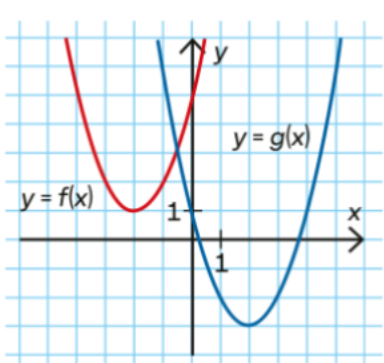
$= -0{,}64\left(x^2 - 50x + \frac{289}{0{,}64}\right) \Rightarrow$

Symmetrilinjen: $x = 25$

De ska sälja 25 st glassar

---

15 Funktionerna f och g är båda av formen $y = x^2 + px + q$. Avgör med hjälp av graferna till funktionerna om diskriminanten till ekvationerna $f(x) = 0$ och $g(x) = 0$ är positiv eller negativ.

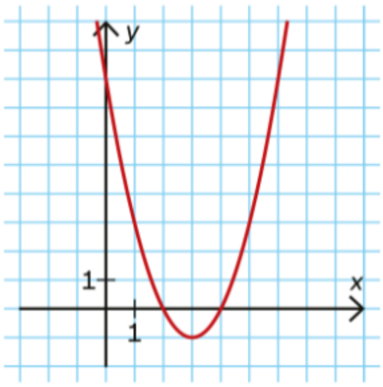


15. För $f(x)$ är diskriminanten negativ, då den saknar nollställen.

För $g(x)$ är diskriminanten positiv.

---

16 Figuren nedan visar grafen till funktionen f där $f(x) = ax^2 + bx + c$, och där a, b och c är konstanter.



a) Bestäm konstanten c med hjälp av figuren. Motivera.

b) Vilket av funktionsvärdena $f(-5)$ eller $f(10)$ är minst? Motivera.

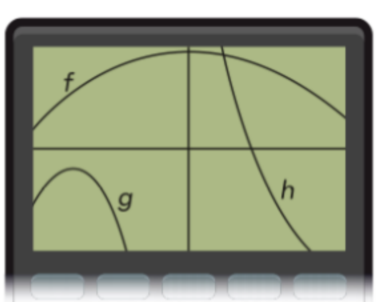
(Np Ma2c vt 2014)

16. a) $c = 8$ (Skärningen med y-axeln)

b) $f(10)$ är minst (eftersom x-värdet 10 ligger närmare symmetrilinjen $x = 3$ än vad -5 gör)

---

17 Petter ska bestämma antalet nollställen till tre andragradsfunktioner, f, g och h. Han har ritat funktionerna med hjälp av en grafräknare. Bilden visar fönstret på grafräknaren.



Petter säger: "Jag måste ändra inställningen på axlarna, så jag kan se mer av graferna."

Petters lärare John säger: "Det behöver du inte, du kan redan nu se hur många nollställen var och en av andragradsfunktionerna har."

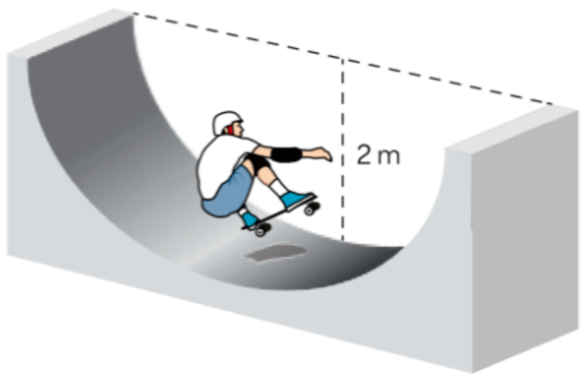
Ange antalet nollställen till var och en av funktionerna f, g och h samt förklara hur du kan bestämma detta med hjälp av den givna bilden.

(Np Ma2c vt 2013)

17. Eftersom vi vet att en andragradsfunktion alltid har formen av en parabel, kan vi se att
f och h har två nollställen medan g saknar detsamma.

---

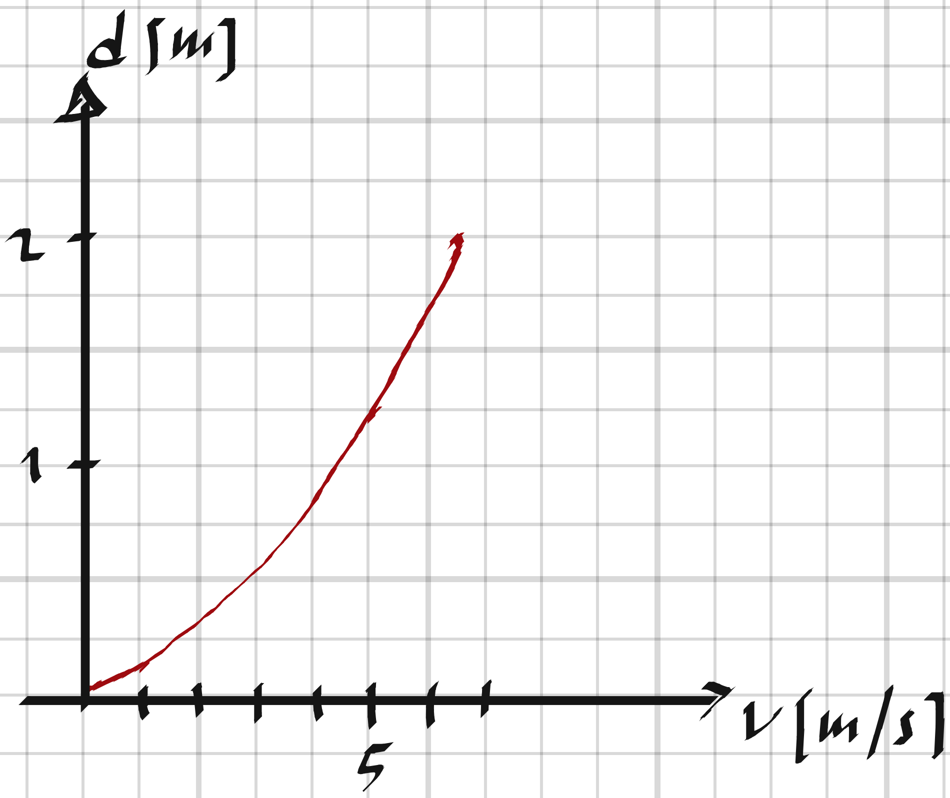
18 Hanna åker skateboard i en halfpipe. Hon startar från stillastående uppe på ena kanten och rullar ner. Hennes lodräta avstånd, d meter från kanten är en funktion av hastigheten v m/s enligt $d = 0{,}05v^2$.



a) Rita grafen till funktionen.

b) Vilken är Hannas högsta hastighet?

a)



18.

b) $v = \sqrt{20d}$

$v_{max} = v(2) = \sqrt{20 \cdot 2} \approx \underline{6{,}3 \text{ m/s}}$

---

19 Kenneth påstår att alla ekvationssystem har minst en lösning. Har han rätt? Motivera ditt svar.

19. Nej, reella lösningar kan saknas.
Exempelvis parallella linjer.

---

20 Ralf påstår att ekvationerna $y - x^2 = 0$ och $x^2 - y = 0$ beskriver samma kurva. Har han rätt eller fel? Motivera ditt svar.

20. Ja, bägge beskriver kurvan $y = x^2$

---

21 Bryt ut $x + 2$ ur uttrycket $x + 2 - 4x(x + 2)$.

21. $(x+2)(1-4x)$

---

22 En kula skjuts rakt uppåt. Kulans höjd över marken kan beskrivas med funktionen h som ges av $h(t) = 50t - 5t^2$, där t är tiden i sekunder efter uppskjutningen och höjden $h(t)$ anges i meter.

a) Hur högt är kulan efter 1,5 sekunder?

b) Hur högt når kulan som högst?

c) Hur länge är kulan i luften?

d) När är kulan 80 meter över marken?

22. a) $h(1{,}5) = 50 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot 1{,}5^2 \approx 64 \text{ m}$

b) $h(t) = 5t(10-t)$

Symmetrilinjen: $t = 5 \text{ s} \Rightarrow$

$h_{max} = h(5) = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 125 \text{ m}$

c) $t_1 = 0, \ t_2 = 10 \Rightarrow 10 \text{ s}$

d) $50t - 5t^2 = 80$

$5(t^2 - 10t + 16) = 0$

$t = 5 \pm \sqrt{25-16} = 5 \pm 3$

Vid tiderna $t_1 = 2$ och $t_2 = 8 \text{ s}$

---

23 Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln $y = 2x^2 + 10x - 2$ och den räta linjen $y = 4x + 6$.

23. $4x + 6 = 2x^2 + 10x - 2$

$2(x^2 + 3x - 4) = 0$

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{-3 \pm 5}{2}$

$x_1 = -4$, $y_1 = 4 \cdot (-4) + 6 = -10$

$x_2 = 1$, $y_2 = 4 \cdot 1 + 6 = 10$

Skärningspunkterna $(-4, -10)$ och $(1, 10)$

---

24 Maria och Jörgen har fått i uppgift att bestämma det minsta värdet till en andragradsfunktion.

– Då behöver vi hitta den lodräta linjen som kurvan är symmetrisk kring, säger Jörgen.

– Det gör vi genom att först bestämma funktionens nollställen, inflikar Maria.

a) Ge en förklaring till varför Jörgen tycker att man behöver finna den linjen.

b) Varför säger Maria att man först måste bestämma funktionens nollställen?

c) I vilka fall fungerar inte Marias metod?

24. a) Extremvärdet (min eller max) ligger alltid på parabelns symmetrilinje.

b) För att symmetrilinjen ligger mitt emellan nollställena.

c) Då ekvationen saknar nollställen.

25 Ange extrempunktens läge och karaktär för grafen till funktionen.

a) $y = 5 - 3x^2$

b) $y = -x^2 + 4x + 4$

c) $y = x^2 + 12x + 30$

25. a) Maxpunkt i $(0,5)$

b) $-(x^2-4x-4) = -(x-2)^2+8$

Maxpunkt i $(2,8)$

c) $(x+6)^2-6$

Minpunkt i $(-6,-6)$

---

26 Förenkla uttrycken så lång som möjligt.

a) $2{,}5(4x - 2) - 0{,}5(6x - 10)$

b) $\frac{3}{4}(4a - 12b + 4) - \frac{2}{3}(12 - 9a + 3b)$

26. a) $10x-5-3x+5 = 7x$

b) $3a-9b+3-8+6a-2b = 9a-11b-5$

---

27 Mauri kastar i väg en gummiboll, så att bollens bana beskrivs av $h(x) = -0{,}020x^2 + 0{,}55x + 1{,}65$ där $h(x)$ m är bollens höjd över marken då den rört sig x m horisontellt.

a) På vilken höjd befinner sig bollen i kastögonblicket?

b) Vilken höjd har bollen då den har rört sig 5,0 m i horisontellt?

c) Vilken är bollens högsta höjd och efter hur lång sträcka når den sin högsta höjd?

d) Hur långt bort landar bollen?

27.

a) $h(0) = \underline{1{,}65\ \text{m}}$

b) $h(5) = -0{,}020 \cdot 5^2 + 0{,}55 \cdot 5 + 1{,}65 = \underline{3{,}9\ \text{m}}$

c) $h(x) = -0{,}020(x^2 - 27{,}5x - 82{,}5) =$

$= -0{,}020(x - 13{,}75)^2 + 0{,}02 \cdot 13{,}75^2 + 0{,}02 \cdot 82{,}5 \approx$

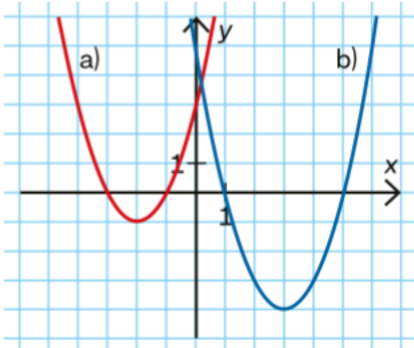
$\approx -0{,}02(x - 13{,}75)^2 + 5{,}43$

$\underline{h_{max} = h(13{,}75) = 5{,}43\ \text{m}}$

d) $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 27{,}5x - 82{,}5 = 0$

$x = 13{,}75 \pm \sqrt{13{,}75^2 + 82{,}5} \approx \underline{30{,}2\ \text{m}}$

28 Figuren visar graferna till två andragradsfunktioner av formen $f(x) = x^2 + px + q$. Bestäm funktionsuttrycken.



28. a) $f(x) = (x+2)^2 - 1 = \underline{x^2 + 4x + 3}$

b) $f(x) = (x-3)^2 - 4 = \underline{x^2 - 6x + 5}$

Alt. metod:

a) $f(x) = a(x+3)(x+1)$

$f(-2) = -1 \Rightarrow a(-2+3)(-2+1) = -1 \Rightarrow a = \dfrac{-1}{1(-1)} = 1$

$\Rightarrow f(x) = 1\cdot(x+3)(x+1) = \underline{x^2 + 4x + 3}$

b) $f(x) = a(x-1)(x-5)$

$f(3) = -4 \Rightarrow a\cdot(3-1)(3-5) = -4 \Rightarrow a = \dfrac{-4}{2\cdot(-2)} = 1$

$f(x) = 1\cdot(x-1)(x-5) = \underline{x^2 - 6x + 5}$

29 En portal har en form som beskrivs av

$h(x) = -0{,}59x^2 + 3{,}1$

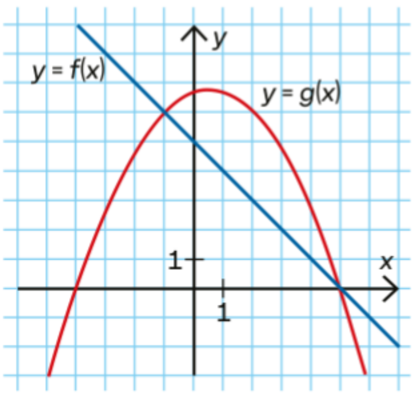
där $h(x)$ är portalens höjd i meter x meter längs underlaget, mätt från mitten av portalen. Hur bred är portalen längs underlaget?

29. $h(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3{,}1}{0{,}59}} \approx \pm 2{,}29$

Portalens bredd $= 2|x| \approx \underline{4{,}6 \text{ m}}$

---

30 I koordinatsystemet visas graferna till den linjära funktionen $y = f(x)$ och andragradsfunktionen $y = g(x)$



Avläs i figuren och besvara frågorna.

a) Bestäm $f(2)$.

b) För vilka värden på x gäller att $f(x) < g(x)$?

c) Ange ekvationen för en rät linje som inte skär någon av graferna till funktionerna.

(Np Ma2c vt 2012)

30. a) $\underline{f(2) = 3}$

b) $\underline{-1 < x < 5}$

c) exempelvis $\underline{h(x) = 8 - x}$

---

31 Förkorta uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{9 - x^2}$ b) $\dfrac{y^2 - 49}{y^2 - 14y + 49}$

31. a) $\dfrac{(x+3)^2}{(3+x)(3-x)} = \underline{\dfrac{3+x}{3-x}}$

b) $\dfrac{(y+7)(y-7)}{(y-7)^2} = \underline{\dfrac{y+7}{y-7}}$

---

32 Två räta linjer bestäms av ekvationerna $4x + 2y = 12$ och $-4x + y = 14$. Båda ekvationerna har oändligt antal lösningar. Bestäm den gemensamma lösningen till ekvationerna.

32. $$+\begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ -4x + y = 14 \end{cases}$$

$$3y = 26$$

$$y = \frac{26}{3}, \quad x = \frac{6-y}{2} = \frac{\frac{18-26}{3}}{2} = -\frac{4}{3}$$

$$\underline{(x,y) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{26}{3}\right)}$$

33 Ge förslag på hur man kan gå till väga för att skapa ett ekvationssystem där lösningen är given.

33. Ex. given lösning (3,2)

$y_1 = \frac{2}{3}x$

$y_2 = -\frac{3}{2}x + m \Rightarrow y_2 - 2 = -\frac{3}{2}(x-3) \Rightarrow y_2 = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$$

---

34 Pelle står på en klippa invid en sjö och kastar en sten ut över sjön. Efter *t* sekunder är stenens höjd över vattenytan $h(t)$ meter där $h(t) = 8{,}5 + 9{,}8t - 4{,}9t^2$.

a) När befinner sig stenen på höjden 10 m ovanför vattenytan?

b) Bestäm stenens högsta höjd över vattenytan.

(Np MaB vt 2002)

34. a) $8.5 + 9.8t - 4.9t^2 = 10 \Rightarrow$

$4.9\left(t^2 - 2t + \frac{1.5}{4.9}\right) = 0$

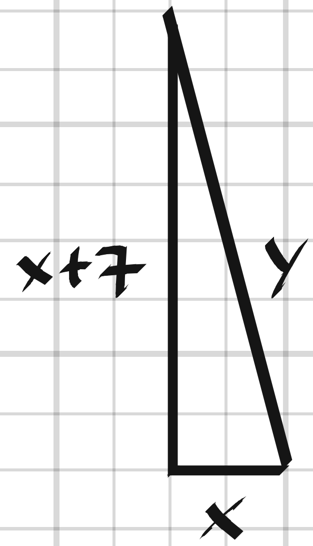
$t = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1.5}{4.9}} \approx 1 \pm 0.833$ $\quad \underline{t_1 = 0.17 \text{ och } t_2 = 1.83 \text{ s}}$

b) $h_{max} = h(1) = 8.5 + 9.8 \cdot 1 - 4.9 \cdot 1^2 = \underline{13.4 \text{ m}}$

35 I en rätvinklig triangel är den ena kateten 7 cm längre än den andra. Teckna ett förenklat uttryck för

a) triangelns area

b) hypotenusans längd



35. a) $A = \frac{x(x+7)}{2}$

b) $y = \sqrt{x^2+(x+7)^2} = \sqrt{2x^2+14x+49}$

---

36 Världsrekordet i kulstötning för damer kan beskrivas med den matematiska modellen

$h(x) = -0{,}0219x^2 + 0{,}4121x + 1{,}89$

där x är kulans läge i sidled i meter och $h(x)$ är kulans höjd i meter. Hur långt är världsrekordet i kulstötning?

36. $h(x) = 0 \Rightarrow$

$-0{,}0219(x^2 - 18{,}817x - 86{,}301) = 0$

$x \approx 9.41 \pm \sqrt{88{,}52 + 86{,}30} \approx 9.41 + 13{,}22 \approx 22{,}6$ m

---

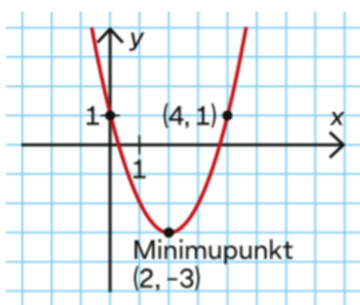
37 En andragradskurva har symmetrilinjen $x = 3$. Punkterna $(0, 7)$ och $(5, 2)$ ligger på kurvan. Ange koordinaterna för ytterligare två punkter på kurvan.

37. $(6, 7)$ och $(1, 2)$

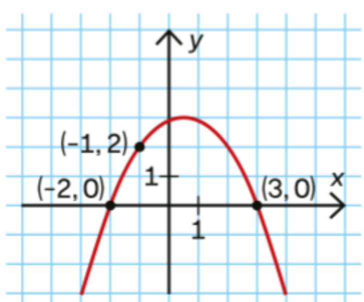
---

38 I figuren är grafen till en andragradsfunktion $y = f(x)$ ritad. Bestäm funktionsuttrycket $f(x)$.

a)



b)



38. a) $f(x) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = a(x+2)(x-3)$

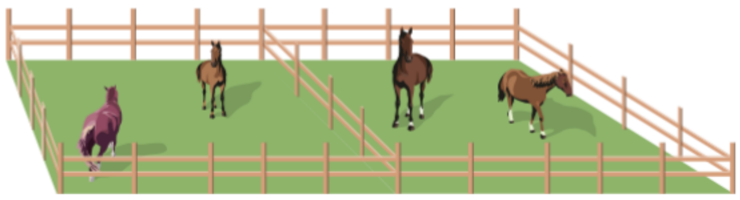
$(-1, 2) \Rightarrow a \cdot (-1+2)(-1-3) = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2}{1 \cdot (-4)} = -\dfrac{1}{2}$

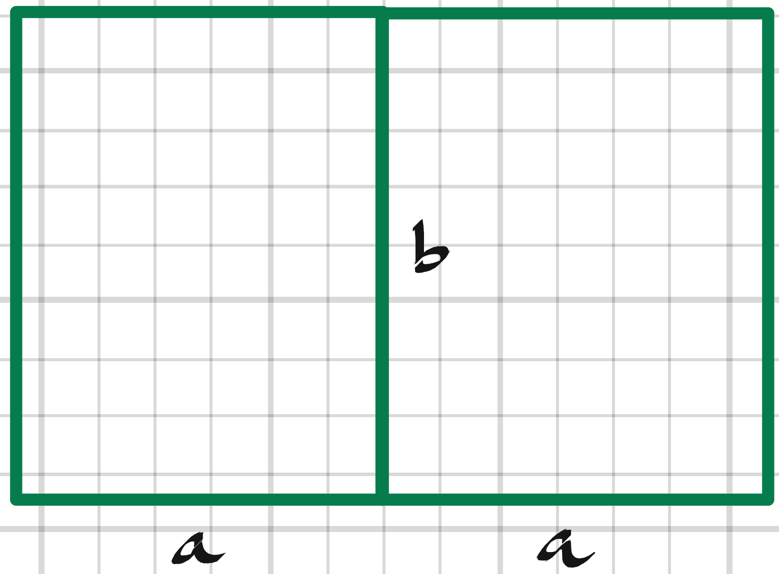
$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 6) =$

$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

---

39 Två likadana rektangulära hästhagar ska inhägnas med totalt 100 m stängsel enligt figuren här nedanför. Vilka mått ska hagarna ha för att arean ska vara så stor som möjligt?





39.

$A = 2ab$

$4a + 3b = 100 \Rightarrow b = \dfrac{100 - 4a}{3}$

$A = \dfrac{2a(100-4a)}{3} = \dfrac{200a - 8a^2}{3} = \dfrac{8}{3}a(25-a)$

$A_{max} = A\left(\dfrac{25}{2}\right) = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{25}{2}\left(25 - \dfrac{25}{2}\right) = \dfrac{8 \cdot 25^2}{3 \cdot 2 \cdot 2} \approx 417 \text{ m}^2$

$a = 12{,}5 \text{ m}$, $b = \dfrac{100 - 4 \cdot 12{,}5}{3} \approx 16{,}7 \text{ m}$

Hagarna ska tillsammans ha måtten 25 × 16.7 m

40 Lös ekvationerna

a) $2x(3x - 4) = 6(x^2 - 4x - 3)$

b) $(3a^2 + 6)(3a^2 - 6) = 3(3a^4 - 4a^2 - 2)$

c) $(2x + 6)^2 - 5(x + 3)(x - 3) = 36 - (x - 5)^2$

40.

a) $6x^2 - 8x = 6x^2 - 24x - 18$

$$16x = -18$$

$$\underline{x = -\frac{9}{8}}$$

b) $9a^4 - 36 = 9a^4 - 12a^2 - 6$

$$12a^2 = 30$$

$$\underline{a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

c) $\cancel{4x^2} + 24x + \cancel{36} - \cancel{5x^2} + 45 = \cancel{36} - \cancel{x^2} + 10x - 25$

$$14x = -70$$

$$\underline{x = -5}$$

41 Beräkna genom att använda konjugat- och kvadreringsreglerna.

a) 21 · 19

b) 22^2

c) 89,9 $89{,}9^2$

41.

a) $(20+1)(20-1) = 400-1 = \underline{399}$

b) $(20+2)^2 = 400+80+4 = \underline{484}$

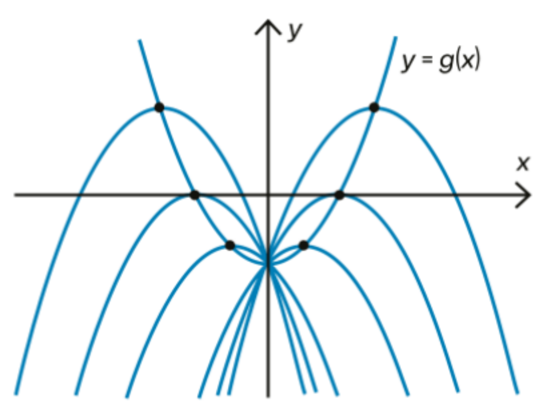
c) $(90-0{,}1)^2 = 8100-18+0{,}01 = \underline{8082{,}01}$

---

42 För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = -0{,}5x^2 + bx - 2$.

a) Bestäm för vilka värden på b som f endast har ett nollställe.

I figuren nedan ser du graferna till funktionen f för några olika värden på b. Grafernas maximipunkter är markerade. Då b varierar följer maximipunkterna grafen till en ny andragradsfunktion g, se figur.



b) Bestäm andragradsfunktionen g.

(Np Ma2c vt 2015)

42.

a) $f(x) = -0{,}5(x-b)^2 + 0{,}5b^2 - 2$

$\Rightarrow 0{,}5b^2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{b = \pm 2}$

b) Nollställen: $b_1 = -2,\ b_2 = 2 \Rightarrow g(x) = a(x+2)(x-2)$

$g(0) = f(0) = -2 \Rightarrow a(0+2)(0-2) = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-2) = \underline{\frac{1}{2}x^2 - 2}$
