5117 Beskriver $f(x) = 50 \cdot 12^x - 3$ en exponentialfunktion? Motivera ditt svar.

5117. Nej, pga att den har konstanttermen -3.

5118 Invånarantalet i en stad ökar exponentiellt. År 2000 fanns det 122 000 invånare och år 2020 fanns det 199 911 invånare i staden.

a) Teckna ett funktionsuttryck som beskriver befolkningstillväxten från år 2000.

b) Hur många invånare finns det i staden år 2030 om invånarantalet fortsätter att växa på samma sätt?

5118. a) $f(x) = 122000 \cdot a^x$

$(20, 199911) \Rightarrow 122000 \cdot a^{20} = 199911$

$a = \left(\frac{199911}{122000}\right)^{1/20} = 1{,}025$

$f(x) = 122\,000 \cdot 1{,}025^x$, x = antal år efter 2000

b) $f(30) = 122000 \cdot 1{,}025^{30} \approx 256\,000$ invånare

---

5119 Du sätter in dina besparingar på ett bankkonto.

a) Hur lång tid tar det för beloppet att fördubblas om årsräntan är 3 %?

b) Beror svaret i a)-uppgiften på hur stort belopp du satte in från början? Motivera ditt svar.

5119. a) $1{,}03^x = 2$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}03} \approx \underline{23 \text{ år}}$$

b) Nej, en fördubbling ger en faktor 2 oavsett.

5120 För en exponentialfunktion f gäller att $f(1) = 4$ och $f(5) = \frac{81}{4}$. Bestäm funktionsuttrycket $f(x)$ utan att använda digitalt hjälpmedel.

5120. $f(x) = c \cdot a^x$

$(1, 4) \Rightarrow \quad c \cdot a = 4$

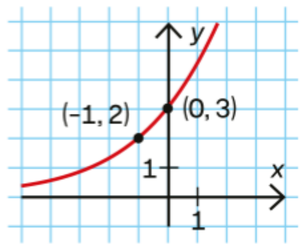
$(5, \frac{81}{4}) \Rightarrow \quad c \cdot a^5 = \frac{81}{4}$

$$a^4 = \frac{\frac{81}{4}}{4} = \frac{81}{16} \Rightarrow a = \left(\frac{81}{16}\right)^{1/4} = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{4}{a} = \frac{8}{3}$$

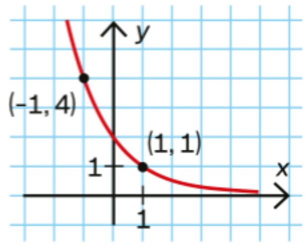
$$\underline{f(x) = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}$$

5121 Ange funktionsuttrycket till den exponentialfunktion vars graf är ritad i figuren.

a)



b)



5121. a) $f(x) = 3 \cdot a^x$

$(-1, 2) \Rightarrow 3 \cdot a^{-1} = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

b) $f(x) = c \cdot a^x$

$(1, 1) \Rightarrow c \cdot a = 1$

$(-1, 4) \Rightarrow c \cdot a^{-1} = 4$

$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = (\pm) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad c = 2$

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

5122 Tabellen visar temperaturen hos en varm dryck vid olika tidpunkter.

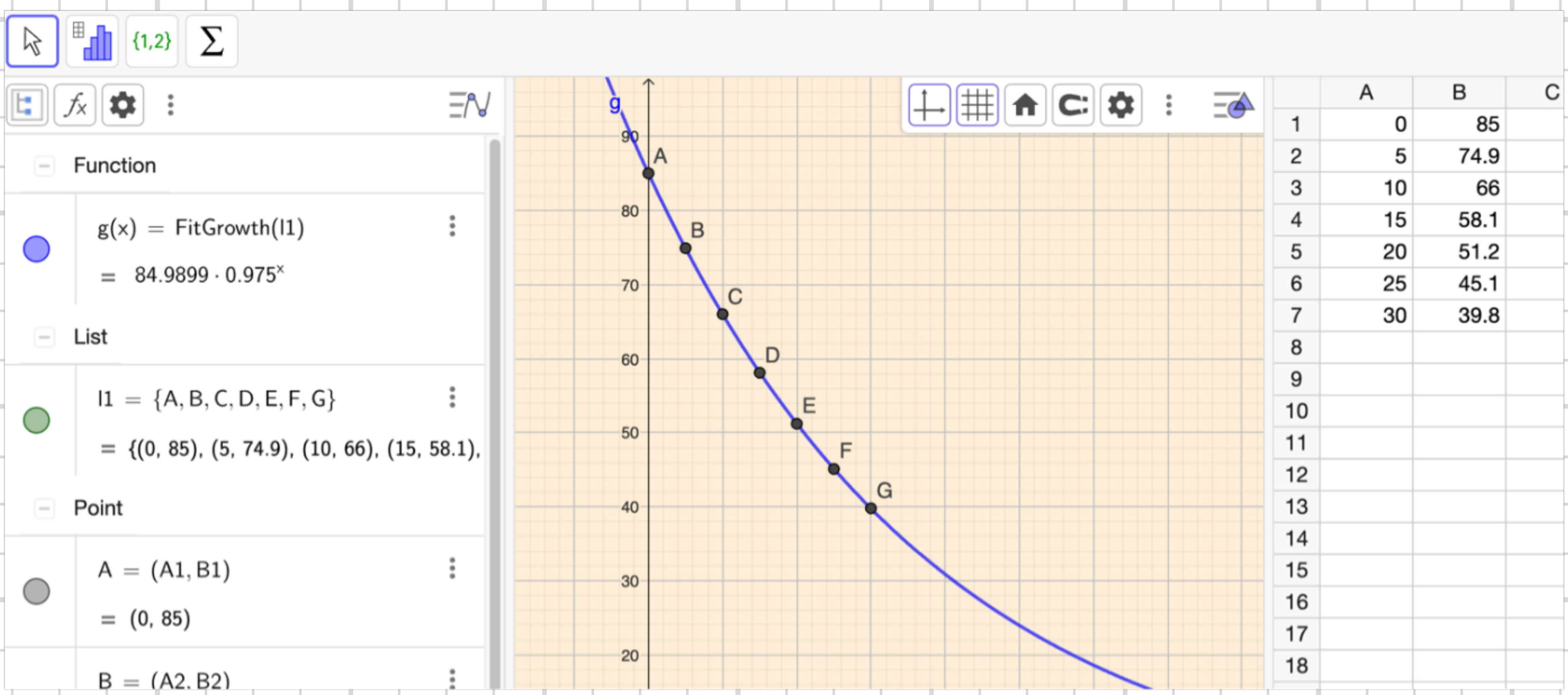
Tid (min)	Temperatur (°C)
0	85,0
5	74,9
10	66,0
15	58,1
20	51,2
25	45,1
30	39,8

a) Pricka in värdena i ett koordinatsystem och rita en graf över avsvalningen.

b) Beskriv avsvalningen med en exponentialfunktion.

5122. Löst i Geogebra med funktionen FitGrowth( )

a)



b) $T(t) = 85 \cdot 0{,}975^t$

5123 Antalet bakterier i en bakteriekultur växer exponentiellt. Efter en timme finns det 2 000 bakterier i bakteriekulturen och efter ytterligare 5 timmar har antalet bakterier vuxit till 7 000.

a) Bestäm ett funktionsuttryck $N(t)$ som beskriver antalet bakterier t timmar efter försökets början.

b) Hur länge dröjer det tills det finns dubbelt så många bakterier som det fanns efter 7 timmar?

5123.

a) $N(t) = C \cdot a^t$

$(1, 2000) \Rightarrow C \cdot a = 2000$

$(6, 7000) \Rightarrow C \cdot a^6 = 7000$

$a^5 = \frac{7000}{2000} \Rightarrow a = \left(\frac{7}{2}\right)^{1/5} \approx 1{,}285$

$C = \frac{2000}{a} \approx \frac{2000}{1{,}285} \approx 1557$

$\underline{N(t) = 1560 \cdot 1{,}285^t}$

b) $1560 \cdot 1{,}285^t = 2 \cdot 1560 \cdot 1{,}285^7$

$t = \frac{\lg(2 \cdot 1{,}285^7)}{\lg 1{,}285} \approx \underline{9{,}8\text{ h}}$

5139 Ordna talen i storleksordning med det minsta först.

lg 98	$10^{\lg 2{,}1}$	2	lg 982	2,2

5139. $\lg 98 < 2$, $10^{\lg 2{,}1} = 2{,}1$, $\lg 982 \approx 3$ $\Rightarrow$

$\lg 98,\ 2,\ 10^{\lg 2{,}1},\ 2{,}2,\ \lg 982$

5140 Mellan vilka två på varandra följande heltal ligger lg 33 000?

5140. $\lg 10000 < \lg 33000 < \lg 100000$

$4 < \lg 33000 < 5$

5141 Förklara varför lg (−5) inte är definierat.

5141. lg y är det x-värde som motsvarar y-värdet då $y = 10^x$.

Eftersom $y = 10^x > 0$ kan alltså inte y-värdet vara negativt.

5142 Lös ekvationen $\lg 10^{x-2} = 5$.

5142. $x - 2 = 5 \Rightarrow$

$\underline{x = 7}$

5143 Bestäm värdet av

a) $\lg 10^{\frac{1}{3}}$

b) $\lg \sqrt{10}$

c) $\lg \dfrac{10}{\sqrt{10}}$

d) $\lg (10 \cdot \sqrt{10})$

5143. a) $\lg 10^{1/3} = \underline{\frac{1}{3}}$

b) $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{1/2} = \underline{\frac{1}{2}}$

c) $\lg \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \lg \sqrt{10} = \underline{\frac{1}{2}}$

d) $\lg(10 \cdot \sqrt{10}) = \lg 10^{3/2} = \underline{\frac{3}{2}}$

5144 Beräkna 10^{-x} om $\lg x = 0$.

(Np Ma2c vt 2015)

5144. $\lg x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$

$10^{-x} = 10^{-1} = \underline{0.1}$

5145 a) Ge exempel på ett tal som har en positiv tiologaritm.

b) Ge exempel på ett tal som har en negativ tiologaritm.

c) Förklara när tiologaritmen för ett tal är positiv och när den är negativ.

5145 a) $10 \quad (\lg 10 = 1)$

b) $0.1 \quad (\lg 0.1 = \lg 10^{-1} = -1)$

c) $x > 1 \Rightarrow \lg x$ positiv

$x < 1 \Rightarrow \lg x$ negativ

5146 För vilka värden på x är följande uttryck definierade?

a) $\lg x$ b) $\lg (x+3)$ c) $\lg (x+3)^2$

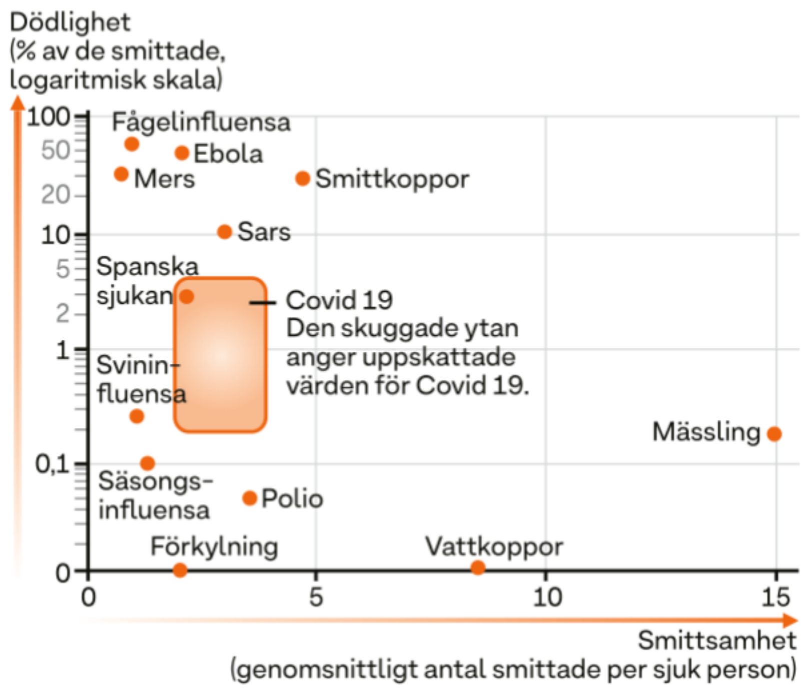
5146.

a) För alla $x > 0$

b) För alla $x > -3$

c) För alla $x \neq -3$

5147 Diagrammet visar smittsamheten och dödligheten hos några virussjukdomar. Dödligheten på y-axeln anges i logaritmisk skala.



a) Bestäm dödligheten hos säsongsinfluensa.

b) Hur många gånger dödligare är ebola jämfört med säsongsinfluensa?

c) Boysan och Anneli studerar diagrammet.

– Mässling verkar vara en riktigt farlig sjukdom, säger Boysan.

– Jag tycker att fågelinfluensa verkar vara mycket farligare, säger Anneli.

Hur kan de ha tänkt? Vem av dem har rätt?

5147.

a) 0,1%

b) $\frac{50}{0,1} = 500$ gånger

c) Boysan har tänkt att smittsamheten är värst,
Anneli – " – dödligheten – " –

Båda har rätt på sitt sätt att se det.

Betydligt lägre risk att få fågelinfluensan men har man väl fått den är det desto högre risk för dödlighet.

5148 Bestäm värdet av

a) $\lg(100 \cdot \sqrt{10})$

b) $\lg(1\,000 \cdot \sqrt[3]{10})$

c) $\lg \dfrac{10^{\frac{1}{4}}}{100}$

5148.

a) $\lg(100 \cdot \sqrt{10}) = \lg(10^2 \cdot 10^{1/2}) = \lg 10^{5/2} = \underline{\dfrac{5}{2}}$

b) $\lg(1000 \cdot \sqrt[3]{10}) = \lg(10^3 \cdot 10^{1/3}) = \lg 10^{10/3} = \underline{\dfrac{10}{3}}$

c) $\lg\left(\dfrac{10^{1/4}}{100}\right) = \lg\left(\dfrac{10^{1/4}}{10^2}\right) = \lg 10^{-7/4} = \underline{-\dfrac{7}{4}}$

5149 Beräkna $\lg ab$ utan digitalt verktyg om

$a = 10^{\frac{5}{2}}$ och $b = 10^{\frac{2}{3}}$

5149.

$\lg(ab) = \lg(10^{\frac{5}{2}} \cdot 10^{\frac{2}{3}}) = \lg 10^{\frac{15+4}{6}} = \underline{\dfrac{19}{6}}$

5150 Lös ekvationen $\lg(x-1) = -1$.

5150.

$$\lg(x-1) = -1$$

$$10^{\lg(x-1)} = 10^{-1}$$

$$x-1 = 0{,}1$$

$$x = 1+0{,}1 = \underline{1{,}1}$$

5151 Bestäm värdet av

a) $10^{\lg 5 + \lg 9}$

b) $10^{\lg 30 - \lg 3}$

c) $10^{3 \cdot \lg 2}$

5151.

a) $10^{\lg 5 + \lg 9} = 10^{\lg 5} \cdot 10^{\lg 9} = 5 \cdot 9 = \underline{45}$

b) $10^{\lg 30 - \lg 3} = \dfrac{10^{\lg 30}}{10^{\lg 3}} = \dfrac{30}{3} = \underline{10}$

c) $10^{3 \cdot \lg 2} = (10^{\lg 2})^3 = 2^3 = \underline{8}$

5152 Bestäm värdet av

a) $10^{\frac{\lg 9}{2}}$

b) $10^{\frac{\lg 125}{3}}$

c) $10^{\lg 1 + 3\lg 4 - \lg 2}$

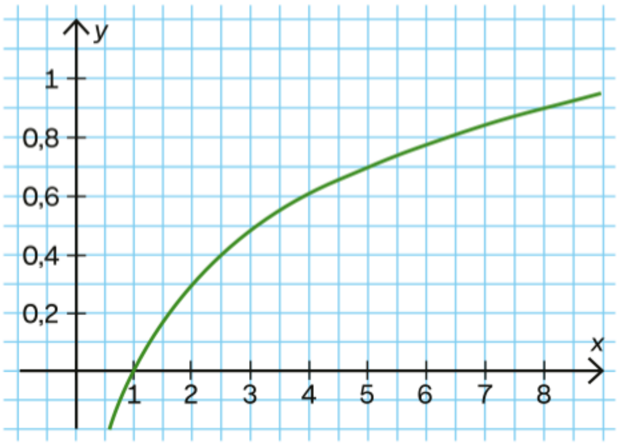
5152.

a) $10^{\frac{\lg 9}{2}} = (10^{\lg 9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \underline{3}$

b) $10^{\frac{\lg 125}{3}} = (10^{\lg 125})^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = \underline{5}$

c) $10^{\lg 1 + 3\lg 4 - \lg 2} = \dfrac{10^{\lg 1} \cdot (10^{\lg 4})^3}{10^{\lg 2}} = \dfrac{1 \cdot 4^3}{2} = \underline{32}$

5153 Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = \lg x$.



Använd grafen för att bestämma ett närmevärde till

a) lg 2

b) det tal man ska upphöja 10 till för att få 4

c) $10^{0,7}$

d) $10^{1,4}$

5153.

a) $\underline{y = 0,3}$

b) $10^x = 4 \Rightarrow x = \lg 4 \Rightarrow \underline{y = 0,6}$

c) $\underline{5}$

d) $10^{1,4} = 10^{0,7} \cdot 10^{0,7} = 5 \cdot 5 = \underline{25}$

5167 Virkesmängden i familjen Anderssons skog ökar exponentiellt. På 25 år har virkesmängden fördubblats.

a) Hur stor är den årliga procentuella ökningen?

b) Skriv ett funktionsuttryck som beskriver virkesmängden, $V(t)$ m^3, som funktion av antalet år t om virkesmängden från början var V_0.

c) År 2020 var virkesmängden i familjen Anderssons skog $2{,}4 \cdot 10^6$ m^3. När virkesmängden uppgår till $4 \cdot 10^6$ m^3, så tänker de avverka skogen. Vilket år kommer familjen att avverka sin skog?

5167. a) $(1+x)^{25} = 2 \Rightarrow$

$$x = 2^{1/25} - 1 \approx 0{,}028 = 2{,}8\,\%$$

b) $V(t) = V_0 \cdot 1{,}028^t$

c) $2{,}4 \cdot 10^6 \cdot 1{,}028^t = 4 \cdot 10^6$

$$t = \frac{\lg \frac{4}{2{,}4}}{\lg 1{,}028} \approx 18{,}5$$

$2020 + 18 = 2038$

Någon gång under 2038.

5168 Förklara varför ekvationen $2^x = -5$ saknar lösning.

5168. Funktionen $a^x > 0$ för alla x

5169 Antalet bakterier i en bakterieodling fördubblas varje timme. Hur lång tid tar det för odlingen att växa till 1 000 gånger sitt ursprungliga antal?

5169.

$$f(t) = C \cdot 2^t$$

$$2^t = 1000$$

$$t = \frac{\lg 1000}{\lg 2} \approx 10 \text{ h}$$

5170 Lös ekvationerna. Svara med tre decimalers noggrannhet.

a) $2^{x+3} = 11$

b) $3 \cdot 4^{2x-3} = 15$

c) $5 - 3 \cdot 2^{3x-1} = -16$

5170. a) $\lg 2^{x+3} = \lg 11 \Rightarrow$

$$x = \frac{\lg 11}{\lg 2} - 3 \approx \underline{0{,}459}$$

b) $\lg 4^{2x-3} = \lg \frac{15}{3} \Rightarrow$

$$2x - 3 = \frac{\lg 5}{\lg 4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\frac{\lg 5}{\lg 4} + 3}{2} \approx \underline{2{,}080}$$

c) $3 \cdot 2^{3x-1} = 5 + 16 \Rightarrow$

$\lg 2^{3x-1} = \lg \frac{21}{3} \Rightarrow$

$$x = \frac{\frac{\lg 7}{\lg 2} + 1}{3} \approx \underline{1{,}269}$$

5171 Visa att ekvationen $a^x = b$, där a och b är positiva tal, har lösningen $x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$

5171.

$$a^x = b$$

$$a = 10^{\lg a}, \quad b = 10^{\lg b} \Rightarrow$$

$$(10^{\lg a})^x = 10^{\lg b}$$

$$10^{x \cdot \lg a} = 10^{\lg b}$$

$$x \cdot \lg a = \lg b$$

$$x = \frac{\lg b}{\lg a} \quad \#$$

5172 Lös ekvationen

$4 + 5 \cdot 7^x = 16 + 2 \cdot 7^x$

5172.

$$3 \cdot 7^x = 12$$

$$x = \frac{\lg \frac{12}{3}}{\lg 7} = \frac{\lg 4}{\lg 7} \approx 0.712$$

5173 Värdet av tiologaritmerna

lg 7 lg 70 lg 700 lg 7 000 lg 70 000

följer ett visst mönster.

a) Beräkna tiologaritmerna och beskriv mönstret.

b) Förklara varför mönstret ser ut just på detta sätt.

5173.

a) Argumentet ökar med en faktor 10.

b) $\lg 70 = \lg(7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 = \lg 7 + 1$

$\lg 700 = \lg(7 \cdot 100) = \lg 7 + \lg 100 = \lg 7 + 2$ o.s.v

Talen ökar med 1

5174 Lös ekvationerna utan digitalt verktyg.

a) $\lg x^2 = \lg 49$

b) $4 + \lg 9 = \lg x^2$

5174

a) $x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$

b) $10^{4+\lg 9} = 10^{\lg x^2} \Rightarrow$

$10^4 \cdot 9 = x^2$

$x = \pm\sqrt{90000} = \pm 300$

5209 Förenkla så långt som möjligt

a) $\lg a^3 - \lg a$

b) $\dfrac{\lg xy - \lg x}{\lg xy}$

c) $\dfrac{(8 \lg x)(\lg x + \lg y)}{\lg xy}$

5209.

a) $\lg \frac{a^3}{a} = \lg a^2 = \underline{2 \cdot \lg a}$

b) $\dfrac{\lg \frac{xy}{x}}{\lg xy} = \underline{\dfrac{\lg y}{\lg xy}}$

c) $\dfrac{8 \cdot \lg x \cdot \lg xy}{\lg xy} = \underline{8 \cdot \lg x}$

5210 Lös ekvationerna med hjälp av logaritmlagarna och svara exakt.

a) $\lg x = \lg 3 + \lg 4$

b) $3 \lg x = \lg 24 - \lg 3$

c) $\lg 5 = \lg 10 - \lg 2x$

5210. a) $\lg x = \lg(3 \cdot 4) \Rightarrow \underline{x = 12}$

b) $3 \lg x = \lg \frac{24}{3}$

$\lg x^3 = \lg 8$

$x^3 = 8$

$\underline{x = 2}$

c) $\lg 2x = \lg 10 - \lg 5$

$\lg 2x = \lg \frac{10}{5}$

$2x = 2$

$\underline{x = 1}$

5211 Lös ekvationerna och svara exakt.

a) $\lg x = \lg 2 + 2\lg 6$

b) $\lg x = 2\lg 4 - 3\lg 2$

5211. a) $\lg x = \lg 2 + \lg 6^2$

$\lg x = \lg(2 \cdot 6^2)$

$\lg x = \lg 72$

$\underline{x = 72}$

b) $\lg x = \lg 4^2 - \lg 2^3$

$\lg x = \lg \frac{16}{8}$

$\underline{x = 2}$

5212 Lise och Erik löser ekvationen $3 \cdot 5^x = 12$ korrekt, men på två olika sätt.

Lise: $x = \frac{\lg 4}{\lg 5}$

Erik: $x = \frac{\lg 12 - \lg 3}{\lg 5}$

Ge förslag på hur Lise och Erik kan ha kommit fram till sina lösningar.

5212. Lise: $5^x = \frac{12}{3}$

$x \cdot \lg 5 = \lg 4$

$x = \frac{\lg 4}{\lg 5}$

Erik: $\lg 3 + \lg 5^x = \lg 12$

$x \cdot \lg 5 = \lg 12 - \lg 3$

$x = \frac{\lg 12 - \lg 3}{\lg 5}$

5213 Visa att $2(\lg 20 - \lg 5) = \lg 2 + \lg 8$

5213.

$$VL = 2(\lg 20 - \lg 5) = 2 \cdot \lg \frac{20}{5} = \lg 4^2 = \lg 16 =$$

$$= \lg(2 \cdot 8) = \lg 2 + \lg 8 = HL \quad \#$$

5214 Lös ekvationerna

a) $3 \cdot 5^x = 4 \cdot 3^x$

b) $2 \cdot 1{,}025^x = 3 \cdot 1{,}015^x$

5214. a) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{4}{3}$

$$x \cdot \lg \frac{5}{3} = \lg \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{\lg \frac{4}{3}}{\lg \frac{5}{3}} \approx \underline{0{,}56}$$

b) $\left(\frac{1{,}025}{1{,}015}\right)^x = \frac{3}{2}$

$$x \cdot \lg\left(\frac{1{,}025}{1{,}015}\right) = \lg \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{\lg \frac{3}{2}}{\lg\left(\frac{1{,}025}{1{,}015}\right)} \approx \underline{41{,}4}$$

5215 Förenkla så långt som möjligt

a) $2 \lg b - 0{,}5 \lg b^2$

b) $\dfrac{\lg \frac{a}{2} \cdot \lg \sqrt{a}}{\lg \frac{a}{2}}$

5215.

a) $2 \lg b - \lg b = \underline{\lg b}$

b) $\lg \sqrt{a} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \lg a}$

5216 Lös ekvationerna exakt.

a) $\lg 4 + 2 \lg x = \lg 90$

b) $\lg 2 + \lg (x - 8) = \lg 18 - \lg x$

5216. a)

$\lg 4x^2 = \lg 90$

$4x^2 = 90$

$x = (\pm)\sqrt{\frac{45}{2}} = \underline{\sqrt{\frac{45}{2}}}$

b)

$\lg 2(x-8) = \lg \frac{18}{x}$

$2x(x-8) = 18$

$2x^2 - 16x - 18 = 0$

$x = 4 (\pm) \sqrt{16+9} = 4 (\pm) 5 = \underline{9}$

5217 Värdet av lg 4 är ungefär 0,602. Bestäm utan att använda digitialt hjälpmedel ett närmevärde till lg 64.

5217. $\lg 64 = \lg 4^3 = 3 \cdot \lg 4 \approx 3 \cdot 0{,}602 = \underline{1{,}806}$

5218 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lg x^3 - \lg y^{-2} = 13 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases}$$

(Np Ma2c vt 2013)

5218.

$$\begin{cases} \lg x^3 y^2 = 13 \\ \lg xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 y^2 = 10^{13} \\ xy = 10^5 \end{cases}$$

$$y = \frac{10^5}{x}$$

$$x^3 \cdot \frac{10^{10}}{x^2} = 10^{13}$$

$$x = 10^3 = 1000$$

$$y = \frac{10^5}{10^3} = 100$$

$$\underline{(x, y) = (1000, 100)}$$

5219 Lös ekvationerna och svara exakt.

a) $2 \lg (1 + x) = \lg 4$

b) $\lg (2 + x) + \lg (2 - x) = \lg 3$

c) $2 \lg x = \lg 3x$

5219.

a) $\lg(1+x) = \frac{1}{2}\lg 4$

$1+x = 4^{1/2}$

$\underline{x = 1}$

b) $\lg (2+x)(2-x) = \lg 3$

$4-x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$\underline{x = \pm 1}$

c) $\lg x^2 = \lg 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$\underline{x = 3}$ (lg ej definierad för $x=0$)

5220 Lös ut x ur ekvationerna

a) $a + \lg x = b$

b) $c - b = \dfrac{\lg \frac{x}{a}}{d}$

c) $3^x - a = 6(3^x - b)$

5220. a)

$$\lg x = b - a$$

$$x = 10^{b-a}$$

b)

$$\lg \frac{x}{a} = d(c-b)$$

$$x = a \cdot 10^{d(c-b)}$$

c)

$$3^x - a = 6 \cdot 3^x - 6b$$

$$5 \cdot 3^x = 6b - a$$

$$3^x = \frac{6b-a}{5}$$

$$\lg 3^x = \lg \frac{6b-a}{5}$$

$$x \cdot \lg 3^x = \lg \frac{6b-a}{5}$$

$$x = \frac{\lg \frac{6b-a}{5}}{\lg 3}$$

5221 Bestäm ett exakt värde för x^3 om $\lg x^{\frac{3}{5}} = 2$.

(Np Ma2b ht 2013)

5221.

$$\lg x^{\frac{3}{5}} = 2$$

$$\frac{3}{5} \cdot \lg x = 2$$

$$\lg x = \frac{2 \cdot 5}{3}$$

$$x = 10^{\frac{10}{3}}$$

$$x^3 = \left(10^{\frac{10}{3}}\right)^3 = \underline{10^{10}}$$

5232 År 1960 fanns det uppskattningsvis 20 000 gråsälar i Östersjön. På grund av höga halter av miljögifter minskade sedan antalet sälar kraftigt. Minskningen var exponentiell och år 1980 fanns endast 2 000 gråsälar kvar.

a) Vilken var den genomsnittliga årliga procentuella minskningen av antalet gråsälar mellan åren 1960 och 1980?

Efter 1980 har sälstammen delvis återhämtat sig. Uppskattningsvis fanns det år 2002 12 000 gråsälar i Östersjön. Enligt en prognos från Naturvårdsverket kommer antalet gråsälar att öka exponentiellt med 6,5 % per år under de närmaste åren.

b) Vilket år kommer antalet gråsälar återigen att vara 20 000 om prognosen håller?

(Np MaC vt 2002)

5232.

a) $y = 20000 \cdot a^t$

$(20, 2000) \Rightarrow 20000 \cdot a^{20} = 2000$

$a = \left(\frac{1}{10}\right)^{1/20} \approx 0{,}891 \Rightarrow$

Årliga minskningen $\approx 1 - 0{,}891 = 0{,}109 \approx \underline{11\ \%}$

b) $y = 12000 \cdot 1{,}065^t$

$(t, 20000) \Rightarrow 12000 \cdot 1{,}065^t = 20000$

$1{,}065^t = \frac{10}{6}$

$t = \frac{\lg \frac{10}{6}}{\lg 1{,}065} \approx 8$ år $\Rightarrow$

Året $= 2002 + 8 = \underline{2010}$

5233 En sjö håller på att växa igen. Sjöns area minskar exponentiellt. Vattenytan mätte 12 km² år 1980 och 8,0 km² år 2020.

a) Med hur många procent minskar arean av vattenytan varje år?

b) Bestäm ett funktionsuttryck $A(t)$ som visar hur arean av vattenytan minskar med antalet år från 1980.

c) Hur stor bör arean vara år 2030 enligt modellen?

d) Vilket år är vattenytans area 4,0 km² om den fortsätter att minska på samma sätt?

e) Vilken är definitionsmängden och värdemängden för funktionen A?

5233.

a) $A = 12 \cdot a^t$

$(20, 8) \Rightarrow 12 \cdot a^{40} = 8 \Rightarrow a = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/40} \approx 0{,}99$

Minskningen $\approx 1 - 0.99 = 1\%$

b) $A(t) = 12 \cdot 0{,}99^t$

c) $A(50) = 12 \cdot 0{,}99^{50} \approx 7{,}2 \text{ km}^2$

d) $12 \cdot 0{,}99^t = 4 \Rightarrow$

$$t = \frac{\lg \frac{1}{3}}{\lg 0{,}99} \approx 108 \Rightarrow$$

Året blir $= 1980 + 108 = 2088$

e) Def. mängd: $t \geq 0$ år

Värdemängd: $0 < A \leq 12 \text{ km}^2$

5234 Folkmängden i en stad följer den matematiska modellen $N = N_0 \cdot 10^{0,006t}$ där t är antal år efter år 2020. Efter hur många år har folkmängden ökat med 20 %?

5234. $10^{0,006t} = 1,20 \Rightarrow$

$$t = \frac{\lg 1,20}{0,006} \approx \underline{13 \text{ år}}$$

5235 En radioaktiv isotop med massan 250 g sönderfaller så att det återstår 25 g av isotopen efter 100 år. Bestäm isotopens halveringstid.

5235. $y(t) = 250 \cdot a^t$

$(100, 25) \Rightarrow 250 \cdot a^{100} = 25 \Rightarrow a = \left(\frac{1}{10}\right)^{1/100} \approx 0,977$

$y(t) = 250 \cdot 0,977^t$

$0,977^t = 0,5 \Rightarrow$

$$\text{Halveringstiden} = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,977} \approx \underline{30 \text{ år}}$$

5236 En fabrik måste minska sina utsläpp i sjöar och vattendrag med sammanlagt 20 % under de följande fyra åren.

a) Hur stor bör den årliga utsläppsminskningen vara i procent, om man eftersträvar en lika stor relativ minskning under vart och ett av åren?

b) Anta att samma årliga reduktionsmål tilllämpas även efter fyraårsperioden. Hur många år kommer det att ta innan utsläppen minskat till mindre än hälften av de ursprungliga?

(Finländsk studentexamen, 2006)

5236. a) $a^4 = 0.80$

$a = 0.80^{1/4} \approx 0.946$

Minskningen bör vara $\approx 1 - 0.946 = 0.054 = \underline{5.4\ \%}$

b) $0.946^t < 0.5 \Rightarrow$

$t > \dfrac{\lg 0.5}{\lg 0.946} \approx 12.4 \Rightarrow \underline{13 \text{ år}}$

5237 Oljeproduktionen i ett land minskar med 7 % per år. Hur länge dröjer det tills oljeproduktionen halverats om minskningen fortsätter på samma sätt?

5237. $0.93^t = 0.5 \Rightarrow$

$t = \dfrac{\lg 0.5}{\lg 0.93} \approx \underline{10 \text{ år}}$

5238 Jordbävningen vid Salomonöarna år 2007 hade magnituden 8 på richterskalan.

Magnituden beräknas med formeln

$M = \frac{2}{3}(\lg E - 4{,}4)$

där E är den frigjorda energin i joule. Hur mycket energi frigjordes i jordbävningen vid Salomonöarna?

5238.

$$M = \frac{2}{3}(\lg E - 4{,}4) \Rightarrow$$

$$\lg E = \frac{3}{2}M + 4{,}4$$

$$E = 10^{\frac{3}{2}M + 4{,}4} = 10^{\frac{3}{2}\cdot 8 + 4{,}4} \approx \underline{2{,}5 \cdot 10^{16}} \text{ J}$$

5239 Magnituden M är ett mått på hur starkt en stjärna lyser och kan beräknas med hjälp av formeln

$M - 5 = a - 5 \lg \frac{r}{3 \cdot 10^{16}}$

där r är avståndet i meter från jorden till stjärnan och a en konstant för en specifik stjärna, se tabell nedan.

Stjärnans namn	M	a	r
Solen	4,80	−26,7	$1{,}50 \cdot 10^{11}$
Sirius A		−1,46	$8{,}14 \cdot 10^{16}$
Proxima Centauri	15,5	11,1	

a) Beräkna magnituden M för stjärnan Sirius A.

b) Beräkna avståndet r till stjärnan Proxima Centauri.

(Np Ma2c vt 2015)

5239.

a) $$M = -1{,}46 - 5 \lg \frac{8{,}14 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^{16}} + 5 \approx \underline{1{,}37}$$

b) $$\lg \frac{r}{3 \cdot 10^{16}} = \frac{a + 5 - M}{5} \Rightarrow$$

$$r = 3 \cdot 10^{16} \cdot 10^{\frac{a+5-M}{5}} \approx 3 \cdot 10^{16} \cdot 10^{\frac{11{,}1 + 5 - 15{,}5}{5}} \approx \underline{3{,}95 \cdot 10^{16}}$$

5240 Antalet isbjörnar i Baffin Bay har under de senaste 30 åren minskat med 30 %. I dag uppskattas antalet isbjörnar i området till 2 100 st. Anta att minskningen fortsätter i samma takt och beskriv isbjörnsbeståndet i Baffin Bay från i dag med en

a) exponentiell modell

b) linjär modell

c) Hur länge dröjer det enligt respektive modell innan isbjörnarna i Baffin Bay är utrotade?

5240. a) $a^{30} = 0{,}70 \Rightarrow a = 0{,}70^{1/30} \approx 0{,}9882$

$y = 2100 \cdot 0{,}9882^t$

b) $y = 2100 - kt$

$k = \dfrac{\frac{2100}{0.7} - 2100}{30} = 30 \Rightarrow$

$y = 2100 - 30t$

c) Linjär modell: $t = \dfrac{2100}{30} = 70$ år

Exponentiell modell:

(blir aldrig noll men sätter antalet till 1) $\Rightarrow$

$t = \dfrac{\lg \frac{1}{2100}}{\lg 0{,}9882} \approx 640$ år

5241 Med kol-14 metoden kan man bestämma hur gammalt ett arkeologiskt fynd är. Metoden bygger på att mängden kol-14 är konstant i allt levande och när organismen dör och inga atomer av kol-14 tillförs, så sönderfaller de kol-14-atomer som då finns i den. Halveringstiden för kol-14 är 5 730 år. Halten kol-14 är $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ ppm i levande organismer. Hur gammalt är ett arkeologiskt fynd som innehåller $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ ppm kol-14?

5241.

$$a^{5730} = 0{,}5 \Rightarrow a = 0{,}5^{\frac{1}{5730}} \approx 0{,}999879$$

$$y = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}999879^{t}$$

$$1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}999879^{t} = 1 \cdot 10^{-7} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\lg \frac{1}{12}}{\lg 0{,}999879} \approx \underline{20\,500 \text{ år}}$$

5242 I en sjö uppmättes vid ett tillfälle pH-värdet till 6. Tre år senare visade nya mätningar att sjön hade försurats och pH-värdet uppmättes till 4,5. Hur många gånger högre var vätejonkoncentrationen vid den andra mätningen?

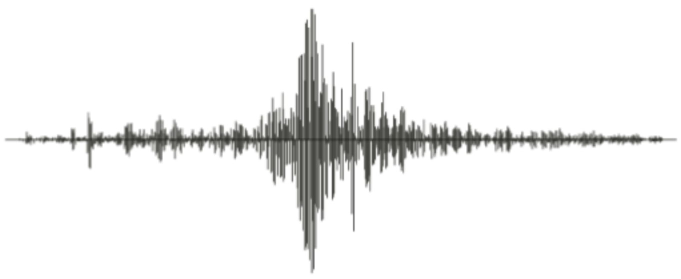
5242.

$$[H^{+}] = 10^{-pH} \Rightarrow \frac{10^{-4,5}}{10^{-6}} = \frac{10^{6}}{10^{4,5}} = 10^{1,5} \approx \underline{32 \text{ ggr}}$$

5243 En jordbävnings magnitud (styrka) anges med richterskalan. Magnituden M bestäms enligt

$$M = \frac{2}{3}(\lg E - K)$$

där E är den frigjorda energin och K är en korrektionskonstant som beror på avståndet till jordbävningens epicentrum. Visa att cirka 32 gånger mer energi frigörs vid varje stegs ökning på richterskalan.



5243. $\lg E = \frac{3}{2}M + K$

$$E(M) = 10^{\frac{3}{2}M + K}$$

$$E(M+1) = 10^{\frac{3}{2}(M+1) + K}$$

$$\frac{E(M+1)}{E(M)} = \frac{10^{\frac{3}{2}(M+1)+K}}{10^{\frac{3}{2}M+K}} = 10^{\frac{3}{2}(M+1) - \frac{3}{2}M} = 10^{\frac{3}{2}} \approx 32 \text{ ggr}$$

#

5251 Lös ekvationen $7^x = 343$ på två olika sätt. Ta hjälp av exemplet på föregående sida.

5251.

① $7^x = 343$

$\log_7 7^x = \log_7 343$

$x = \log_7 343 = \log_7 7^3 = \underline{3}$

② $7^x = 343$

$\lg 7^x = \lg 343$

$x \cdot \lg 7 = \lg 343$

$x = \dfrac{\lg 343}{\lg 7} = \dfrac{\lg 7^3}{\lg 7} = \dfrac{3 \cdot \lg 7}{\lg 7} = \underline{3}$

5252 Visa att $\log_3 AB = \log_3 A + \log_3 B$, dvs. visa att den första logaritmlagen gäller för logaritmer med basen 3.

5252.

$$VL = \log_3 AB = \log_3\left(3^{\log_3 A} \cdot 3^{\log_3 B}\right) = \log_3 3^{\log_3 A + \log_3 B} =$$

$$= \log_3 A + \log_3 B = HL \quad \#$$

5253 Visa att $\log_2 \frac{A}{B} = \log_2 A - \log_2 B$, dvs. visa att den andra logaritmlagen gäller för logaritmer med basen 2.

5253.

$$VL = \log_2 \frac{A}{B} = \log_2\left(\frac{2^{\log_2 A}}{2^{\log_2 B}}\right) = \log_2 2^{\log_2 A - \log_2 B} =$$

$$= \log_2 A - \log_2 B = HL \quad \#$$

5254 Lös ekvationerna

a) $\log_2 64 = x \cdot \log_8 64$

b) $x \cdot \log_3 9 = \frac{\log_4 16}{\log_2 16}$

5254.

a) $\log_2 64 = x \cdot \log_8 64$

$$\frac{\lg 64}{\lg 2} = x \cdot \frac{\lg 64}{\lg 8} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\lg 8}{\lg 2} = \frac{\lg 2^3}{\lg 2} = \frac{3 \cdot \lg 2}{\lg 2} = \underline{3}$$

b) $x \cdot \log_3 9 = \frac{\log_4 16}{\log_2 16}$

$$x \cdot \frac{\lg 9}{\lg 3} = \frac{\frac{\lg 16}{\lg 4}}{\frac{\lg 16}{\lg 2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 4 \cdot \lg 9} = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 2^2 \cdot \lg 3^2} = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{2 \cdot \lg 2 \cdot 2 \cdot \lg 3} = \underline{\frac{1}{4}}$$

5255 Visa att

a) $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$

b) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

5255.

a)

$$HL = \frac{\lg x}{\lg a} = \log_a a^{\frac{\lg x}{\lg a}} = \log_a \left(10^{\lg a}\right)^{\frac{\lg x}{\lg a}} =$$

$$= \log_a\left(10^{\lg x}\right) = \log_a x = VL$$

#

b)

$$VL = \log_a b \cdot \log_b a = \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg a}{\lg b} = 1$$

#

5256 Visa att om $a > 0$, så gäller att

$a = \sqrt[x]{b} \Leftrightarrow \log_a b = x$

5256.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow \frac{\lg b}{\lg a} = x \Leftrightarrow \lg a = \frac{\lg b}{x} \Leftrightarrow$$

$$a = 10^{\frac{\lg b}{x}} = \left(10^{\lg b}\right)^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{b}$$

#