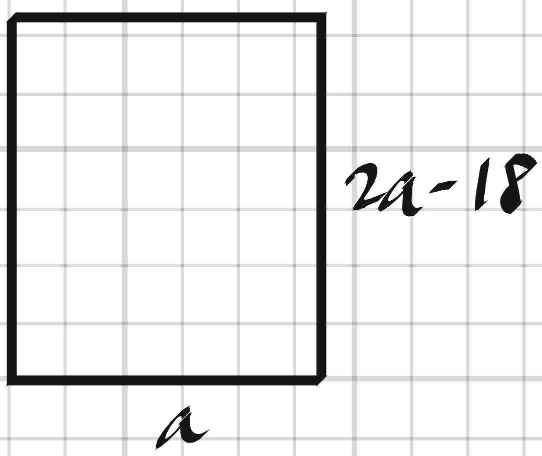
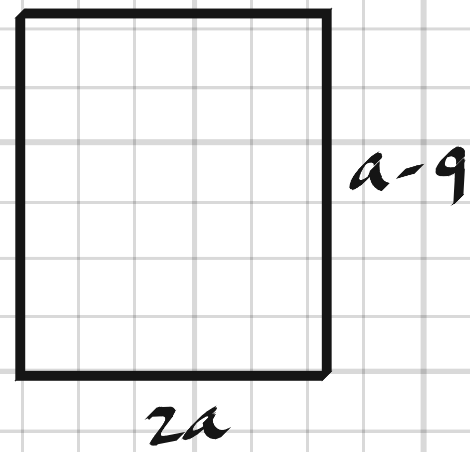
2115 En rektangel har arean $(2a^2 - 18a)$ cm^2.
Ange höjden om basen är

a) a cm b) $2a$ cm

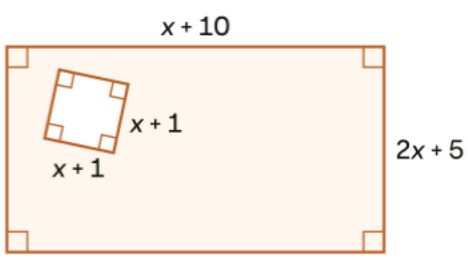
2115. a) $A = a(2a-18)$



b) $A = 2a(a-9)$



2116 Teckna ett uttryck för arean av det färgade området och förenkla det så långt som möjligt.



2116. $(2x+5)(x+10) - (x+1)(x+1) =$

$= 2x^2 + 20x + 5x + 50 - x^2 - 2x - 1 =$

$= x^2 + 23x + 49$ a.e.

2117 Bryt ut $-2x$ ur uttrycken.

a) $-20xy + 50x^3$ b) $18x^2y + 24xy^2$

2117. a) $\underline{-2x(10y - 25x^2)}$

b) $\underline{-2x(-9xy - 12y^2)}$

2118 Multiplicera och förenkla uttrycken.

a) $3x - (x - 5) - (x + 3)(x - 1)$

b) $(x - 1)(x^2 - x + 3)$

c) $2y(y + 2)(y^2 - 2)$

2118. a) $3x - (x-5) - (x+3)(x-1) =$

$= 3x - x + 5 - (x^2 + 2x - 3) =$

$= 3x - x + 5 - x^2 - 2x + 3 = \underline{8 - x^2}$

b) $(x-1)(x^2 - x + 3) = x^3 - x^2 + 3x - x^2 + x - 3 =$

$= \underline{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}$

c) $2y(y+2)(y^2-2) = 2y(y^3 - 2y + 2y^2 - 4) =$

$= \underline{2y^4 + 4y^3 - 4y^2 - 8y}$

2119 Förenkla uttrycket $\frac{a(a-1)}{x+ax}$, om $x = a - 1$.

2119.

$$\frac{a(a-1)}{x(1+a)} = \frac{a(a-1)}{(a-1)(1+a)} = \underline{\frac{a}{1+a}}$$

2120 Förenkla uttrycken

a) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{(x-5)(x+5)}{(5-x)(5+x)}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ när $xy = a$ och $x + y = b$

2120. a)

$$\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \underline{\frac{2}{x^2-1}}$$

b)

$$\frac{(x-5)(x+5)}{-(x-5)(5+x)} = \underline{-1}$$

c)

$$\frac{y+x}{xy} = \underline{\frac{b}{a}}$$

2121 Multiplicera och förenkla uttrycken.

a) $(x^2 - 3x + 2)(x - 4) - (x^2 - 5x + 4)(x - 2)$

b) $(x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x + 1)$

c) $x(x^{2m} + x^{m-1}) - x^m$

2121.

a) $x^3 - 3x + 2x - 4x^2 + 12x + 2x - 8 -$

$(x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 10x + 4x - 8) = \underline{0}$

b) $2x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x^3 - 6x^2 + 2x - 6x^2 + 9x - 3 =$

$= \underline{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}$

c) $x^{2m+1} + x^m - x^m = \underline{x^{2m+1}}$

1 $f(x) := (x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 4) - (x^2 - 5x + 4) \cdot (x - 2)$

→ $f(x) := 0$

2 $g(x) := (x^2 + 2x - 3) \cdot (2x^2 - 3x + 1)$

→ $g(x) := 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$

3 $h(x) := x \cdot (x^{2m} + x^{m-1}) - x^m$

→ $h(x) := x^{1+m-1} + x\,(x^m)^2 - x^m$

4 simplify(h)

→ $(x^m)^2\, x$

5

2122 Hörnen på ett A4-papper, med måtten 210 mm × 297 mm, klipps bort och pappret viks sedan till en öppen låda. Kvadraterna som klipps bort i hörnen har sidlängden x cm. Teckna ett uttryck för lådans volym och förenkla så långt som möjligt.

$$V(x) = (210-2x)\cdot(297-2x)\cdot x =$$

$$= 62370x - 1014x^2 + 4x^3$$

2123 Lös ekvationen

$$\frac{r}{2}\left(\frac{3}{4} - 4r\right) = \left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 8r\right)$$

2123.

$$\frac{3r}{8} - \cancel{2r^2} = \frac{r}{8} - \cancel{2r^2} - \frac{1}{4} + 4r$$

$$\frac{r + 32r - 3r}{8} = \frac{1}{4}$$

$$30r = 2$$

$$r = \frac{1}{15}$$

2124 Förenkla uttrycket

$$\frac{ax+ay}{5} \Big/ \frac{bx+by}{10}$$

2124. $\frac{ax+ay}{5} \cdot \frac{10}{bx+by} = \frac{2a(x+y)}{b(x+y)} = \underline{\frac{2a}{b}}$

2125 Visa att

a) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$

b) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$

2125.

a) $VL = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3 = HL$ #

b) $VL = x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3 = HL$ #

2126 Skriv om uttrycken som produkten av två parentesuttryck.

a) $x^2 - 3x - 18$ b) $x^2 + x - 6$

2126. a) $x^2 - 3x - 18 = \underline{(x-6)(x+3)}$

b) $x^2 + x - 6 = \underline{(x+3)(x-2)}$

2127 Faktorisera

a) $y(y+2)^3 + 2y(y+2)^4$

b) $x(x+1)^2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^2 \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}}$

2127.

a) $y(y+2)^3 \cdot (1 + 2(y+2)) =$

$= \underline{y(y+2)^3(2y+5)}$

b) $(x+1)^2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x - (x-1)) = \underline{(x+1)^2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}}}$

2139 Förenkla uttrycket så långt som möjligt.

$4\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

(Np Ma2c ht 2012)

2139. $4\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = \underline{x^2 - 4}$

2140. Mike har gjort rätt. Om 2:an flyttas innanför parantesen måste den skrivas som $\sqrt{2}$.

$(\sqrt{2}x + 3\sqrt{2})^2 = 2x^2 + 12x + 18$

2141 Beräkna värdet av uttrycken med hjälp av kvadreringsregeln. Använd a)-uppgiften för att lista ut ett bra sätt att lösa de övriga uppgifterna.

a) $(50 + 2)^2$ b) 63^2 c) 36^2

2141. a) $50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 + 200 + 4 = \underline{2704}$

b) $(60+3)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 3 + 3^2 = 3600 + 360 + 9 = \underline{3969}$

c) $(30+6)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 6 + 6^2 = 900 + 360 + 36 = \underline{1296}$

2142 Fyll i de tomma rutorna så att likheterna stämmer.

a) $(x + \square)^2 = x^2 + 6x + \square$

b) $(\square + 5)^2 = 4y^2 + \square + 25$

c) $(a + \square)(a - \square) = \square - 36$

2142. a) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(2y+5)^2 = 4y^2 + 20y + 25$

c) $(a+6)(a-6) = a^2 - 36$

2143 Visa att

a) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

b) $(a-b)^2 = (b-a)^2$

2143.

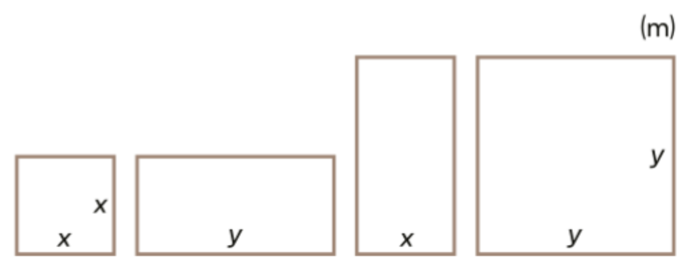
a) $VL = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) =$

$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} = 4ab = HL$ #

b) $VL = a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2 = (b-a)^2 = HL$ #

2144 Bilden visar fyra hästhagar som är kvadratiska respektive rektangulära med sidlängderna x och y meter.

Nedan visas en skiss över hur hagarna ser ut ovanifrån.



Hästarna ska flyttas till en ny gemensam hage. Den nya hagen är kvadratisk och har lika stor area som de fyra ursprungliga hagarna tillsammans. Bestäm ett förenklat uttryck för sidans längd hos den nya hagen.

(Np Ma2c ht 2012)

2144.

$z^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow$

$\underline{z = x + y}$

2145 Utveckla kvadraterna

a) $(x^3 - x^4)^2$

b) $(7^x - 1)^2$

c) $4\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$

2145.

a) $x^6 - 2x^7 + x^8$

b) $7^{2x} - 2 \cdot 7^x + 1$

c) $\left(\frac{2x}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

2146 Multiplicera uttrycken och förenkla.

a) $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

b) $(x\sqrt{3} - 4)(x\sqrt{3} + 4)$

c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)$

d) $(x + (1 - a))(x - (1 - a))$

2146.

a) $x^2 - 7$

b) $3x^2 - 16$

c) $1 - \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2} - 1 = \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}$

d) $x^2 - (1-a)^2 = x^2 - (1 - 2a + a^2) = x^2 - a^2 + 2a - 1$

2147 Ett knep för att utföra kvadreringen 45^2 är att i stället beräkna $40 \cdot 50 + 25$.

a) Visa att $40 \cdot 50 = 45^2 - 25$

b) Beräkna 85^2 med samma knep.

c) Förklara varför knepet alltid fungerar.

2147.

a) $VL = 40 \cdot 50 = (45-5)(45+5) = 45^2 - 5^2 = 45^2 - 25 = HL$

#

b) $85^2 = 80 \cdot 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225$

c) $a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2} - 5\right)\left(\frac{a+b}{2} + 5\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 5^2 =$

$= \frac{(a+b)^2}{4} - 5^2$

$b - a = 10 \Rightarrow b = 10 + a \Rightarrow a + b = 10 + 2a \Rightarrow$

$\frac{(a+b)^2}{4} - 5^2 = \frac{(10+2a)^2}{4} - 5^2 = \frac{100 + 40a + 4a^2 - 100}{4} =$

$= 10a + 2a^2 = a(10 + 2a) = a \cdot b$

#

2148 Multiplicera och förenkla
$(2(x+1) - y^3)(2(x+1) + y^3)$.

2148. $4(x+1)^2 - y^6 = (2x+2)^2 - y^6 =$

$= \underline{4x^2 + 8x - y^6 + 4}$

2149 a) Förklara varför $2n - 1$ är ett udda tal, givet att n är ett heltal.

b) Visa att summan av kvadraten på talet $2n - 1$ och kvadraterna på de två udda tal som följer därefter är
$12n^2 + 12n + 11$

c) Visa att produkten av två udda tal alltid är udda.

2149.

a) 2n är ett jämnt tal eftersom det är delbart med 2. Då blir ju det talet minus 1 ett udda tal.

b) $(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 =$

$= 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 =$

$= 12n^2 + 12n + 11$ #

c) $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 =$

$= 2m + 1$ om $m = 2n^2 + 2n$ #

2150 Skriv om 9 991 som differensen mellan två kvadrattal. Använd resultatet som hjälp för att faktorisera 9 991.

2150. $9991 = 10000 - 9 = \underline{(100+3)(100-3)}$

2151 Visa att uttrycket $x^2 - 6x + 10$ är större än eller lika med 1 för alla värden på x.

2151. $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1$, då kvadrattermen ≥ 0. #

2152 Johan påstår att hälften av medelvärdet av kvadraterna av två heltal alltid är mindre än kvadraten av deras medelvärde. Undersök om detta är sant.

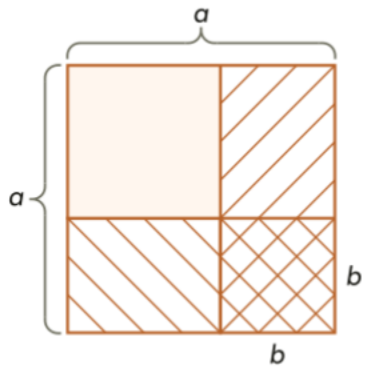
2152. Påstående: $\dfrac{a^2+b^2}{4} < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$HL = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} > VL$ om både a och b är positiva

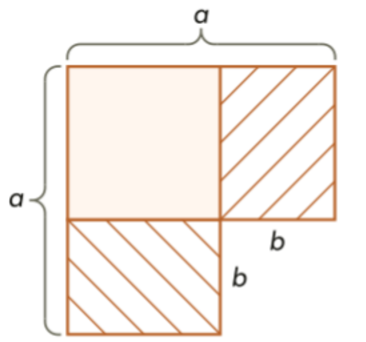
<u>Om a eller b är negativa eller noll gäller ej påståendet</u>.

2153 Med hjälp av figurer kan man motivera kvadreringsreglerna och konjugatregeln.

a) Ta hjälp av figuren här nedanför för att motivera andra kvadreringsregeln.



b) Utgå från figuren här nedanför. Fördela om ytorna och motivera konjugatregeln.



2153 a) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ motsvarar det enfärgade fältet. Eftersom termen $-2ab$ tar bort b^2 två gånger kompenseras det med $+b^2$-termen.

b) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Om det högra sträckade fältet flyttas till vänster så att det överlappar det enfärgade fältet delvis, så motvarar konjugatregeln resterande enfärgade yta.

2164 Ett uttryck för arean av en kvadrat är $(x^2 - 22x + 121)$ dm^2. Ange ett uttryck för kvadratens sida.

2164. $x - 11$ dm

2165 Faktorisera uttrycken. Ledtråd: Bryt först ut en gemensam faktor.

a) $-2x^2 + 8y^2$ b) $4a^2 - 32a + 64$

2165. a) $2(4y^2 - x^2) = 2(2y + x)(2y - x)$

b) $4(a^2 - 8a + 16) = 4(a - 4)^2$

2166 Faktorisera uttrycken med hjälp av konjugatregeln.

a) $x^2 - \frac{4}{9}$ b) $\frac{a^2}{4} - \frac{16}{25}$ c) $x^2 - 3$

2166. a) $(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$

b) $(\frac{a}{2} + \frac{4}{5})(\frac{a}{2} - \frac{4}{5})$

c) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

2167 Faktorisera uttrycken.

a) $a^2 + \frac{2a}{3} + \frac{1}{9}$

b) $x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{4}{49}$

c) $y^2 - 10$

d) $a^2 - b^4$

2167. a) $(a + \frac{1}{3})^2$

b) $(x - \frac{2}{7})^2$

c) $(y + \sqrt{10})(y - \sqrt{10})$

d) $(a + b^2)(a - b^2)$

2168 Fyll i de tomma rutorna så att likheterna stämmer.

a) $\frac{y^2 - 16}{y - \square} = y + 4$

b) $\frac{x^2 + 4x + \square}{x + 2} = x + 2$

c) $\frac{y^2 - \square + 81}{y - 9} = y - 9$

2168. a) $\frac{y^2 - 16}{y - 4}$

b) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = x + 2$

c) $\frac{y^2 - 18y + 81}{y - 9} = y - 9$

2169 En triangel har arean $(16x - 4xy^2)$ cm^2.
Bestäm basen om höjden är $4x$ cm.

2169.

$$\frac{bh}{2} = 4x(4-y^2) \Rightarrow$$

$$\underline{b = 2(4-y^2)}$$

2170 Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{5x^2 + 5x}{25 - 10x}$ b) $\dfrac{11x^2y^2 - 33x^2}{22x^2 - 55x^2y}$

2170. a) $$\frac{5x(x+1)}{5(5-2x)} = \underline{\frac{x^2+x}{5-2x}}$$

b) $$\frac{11x^2(y^2-3)}{11x^2(2-5y)} = \underline{\frac{y^2-3}{2-5y}}$$

2171 Förenkla följande uttryck.

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{2x - 2}{x - 3}$

c) $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

2171. a) $\dfrac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\dfrac{(x-3)(\cancel{x-3})}{(x+1)(\cancel{x-1})} \cdot \dfrac{2(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-3})} = \dfrac{2(x-3)}{x+1}$

c) $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \dfrac{a^2+b^2}{b-a}$

2172 Faktorisera uttrycken.

a) $a^{2+n} + a^n$

b) $4^n + 2^{n-1}$

c) $4(x + 5) - x^2(x + 5)$

2172. a) $a^n(a^2+1)$

b) $2^n(2^n + \frac{1}{2})$

c) $(x+5)(4-x^2) = (x+5)(2+x)(2-x)$

2173 Visa att $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ för alla värden på a och b.

2173.

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab =$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$$ #

2174 Förenkla uttrycket

$$\frac{\frac{3}{2x-2} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1}}$$

2174.

$$\frac{\frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{x}{(x+1)(x-1)}} =$$

$$\frac{\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{2\cancel{(x-1)(x+1)}}}{\frac{x+1+x}{\cancel{(x+1)(x-1)}}} = \frac{3x+3-2x+2}{2(2x+1)} = \underline{\frac{x+5}{4x+2}}$$

2175 Faktorisera uttrycken.

a) $(x-1)(x+2)^2-(x-1)^2(x+2)$

b) $x^2-9y^2+12x+36$

2175.

a) $(x-1)(x+2)\big(x+2-(x-1)\big) = \underline{3(x-1)(x+2)}$

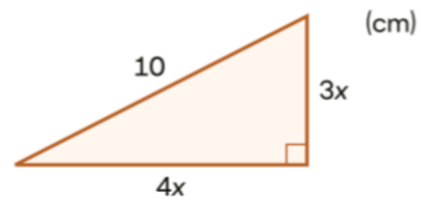
b) $(x+6)^2-9y^2 = \underline{(x+6+3y)(x+6-3y)}$

2212 Reza tjänar 34 500 kr per månad. Han får samma procentuella löneökning två år i rad och tjänar sedan 36 105 kr per månad. Hur stor var den procentuella ökningen varje år?

2212. $34500\cdot(1+x)^2 = 36105$

$$x = \left(\frac{36105}{34500}\right)^{1/2}-1 \approx 0{,}023 = \underline{2{,}3\ \%}$$

2213 Bestäm längden av kateterna i triangeln.



2213.

$$(4x)^2 + (3x)^2 = 10^2$$

$$16x^2 + 9x^2 = 100$$

$$25x^2 = 100$$

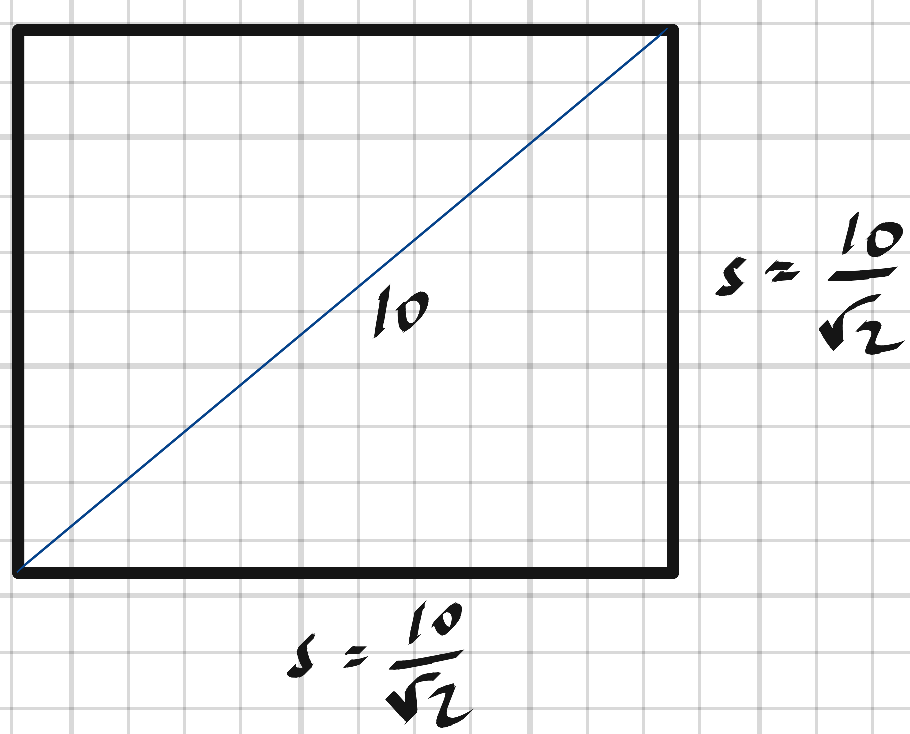
$$x = (\pm)\,2 \Rightarrow$$

Kateternas längder är $4 \cdot 2 = \underline{8\text{ cm}}$ resp $3 \cdot 2 = \underline{6\text{ cm}}$

2214 I en kvadrat är diagonalen 10 cm. Bestäm kvadratens area.

2214.

$$s = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = s^2 = \frac{100}{2} = \underline{50\text{ cm}^2}$$



2215 Lös ekvationen

$(x - 5)^2 - (x + 3)(x - 3) = (x + 4)^2 - 18x$

2215. $x^2 - 10x + 25 - x^2 + 9 = x^2 + 8x + 16 - 18x$

$x^2 = 18$

$x = \pm\sqrt{18}$

2216 Lös andragradsekvationerna och svara exakt.

a) $(x - 2)^2 = 9$

b) $(x + 3)^2 - 30 = 6$

c) $(5 - 2x)^2 - 144 = 0$

2216. a) $x - 2 = \pm 3$

$x = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 5$

b) $x + 3 = \pm 6$

$x = -3 \pm 6 \Rightarrow x_1 = -9,\ x_2 = 3$

c) $5 - 2x = \pm 12$

$x = \frac{5 \pm 12}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{2},\ x_2 = \frac{17}{2}$

2217 Lös andragradsekvationerna och svara exakt.

a) $(x-2)^2 = \frac{64}{81}$

b) $(x+3)^2 - \frac{4}{25} = \frac{12}{25}$

c) $(5-2x)^2 - \frac{8}{49} = \frac{1}{49}$

2217.

a) $x - 2 = \pm \frac{8}{9}$

$x = 2 \pm \frac{8}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{9}, \quad x_2 = \frac{26}{9}$

b) $x + 3 = \pm \frac{4}{5}$

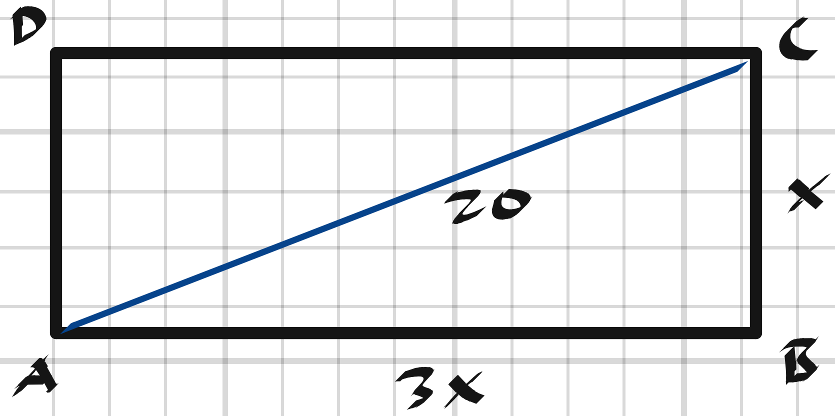
$x = -3 \pm \frac{4}{5} \Rightarrow x_1 = -\frac{19}{5}, \quad x_2 = -\frac{11}{5}$

c) $5 - 2x = \pm \frac{3}{7}$

$x = \frac{5 \pm \frac{3}{7}}{2} = \frac{35 \pm 3}{14} \Rightarrow x_1 = \frac{16}{7}, \quad x_2 = \frac{19}{7}$

2218 I rektangeln *ABCD* är sträckan *AB* tre gånger så lång som sträckan *BC*. Sträckan *AC* är 20 cm. Bestäm exakt rektangelns

a) omkrets b) area



2218.

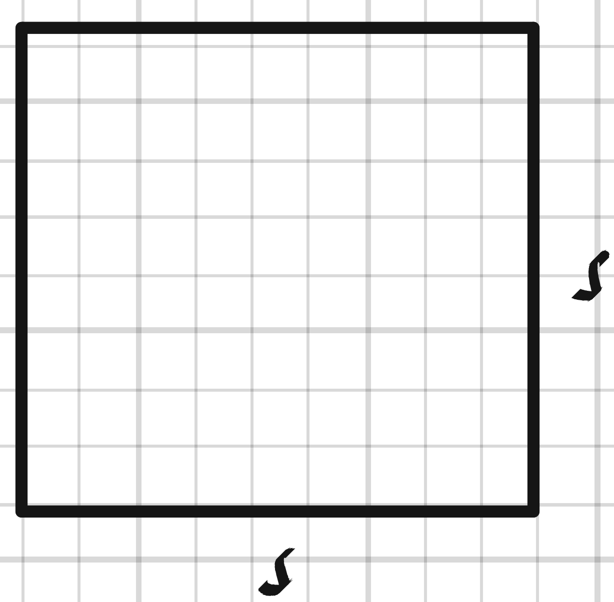
$$(3x)^2 + x^2 = 20^2$$

$$x = \overset{+}{\scriptstyle(-)}\,\frac{20}{\sqrt{10}}$$

a) $O = 8x = \dfrac{8 \cdot 20}{\sqrt{10}} = \dfrac{160}{\sqrt{10}} \approx \underline{50{,}6 \text{ cm}}$

b) $A = 3x^2 = \dfrac{3 \cdot 20^2}{10} = \underline{120 \text{ cm}^2}$

2219 En kvadrat har arean *A*. Uttryck kvadratens omkrets med hjälp av *A*.



2219.

$$s = \sqrt{A}$$

$$O = 4s = \underline{4\sqrt{A}}$$

2220 Låt d beteckna längden av diagonalen i en kvadrat och A beteckna kvadratens area. Visa att $d^2 = 2A$.

2220.

$$VL = d^2 = (s\sqrt{2})^2 = s^2 \cdot 2 = 2A = HL$$

#

2225 Lös ekvationen $x^2 - 16 = 0$

a) med roturdragning

b) genom att faktorisera ekvationens vänstra led med hjälp av konjugatregeln

2225.

a) $\underline{x = \pm 4}$

b) $(x+4)(x-4) = 0$

$\underline{x_1 = -4, \quad x_2 = 4}$

2226 Ange en andragradsekvation med rötterna

a) $x_1 = 0$ och $x_2 = 9$

b) $x_1 = 2$ och $x_2 = -3$

2226.

a) $\underline{x(x-9) = 0}$

b) $\underline{(x-2)(x+3) = 0}$

2227 Lös ekvationerna genom att först faktorisera vänstra ledet med hjälp av någon av kvadreringsreglerna.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 25$

2227. a) $(x-1)^2 = 0$

$\underline{x_{1,2} = 1}$ (dubbelrot)

b) $(x+3)^2 = 25$

$\underline{x = -3 \pm 5}$

2228 Efter att ha seglat på grund skickar Eva och Svante upp en nödraket. Raketens bana beskrivs av $h(t) = 25t - 5t^2$ där $h(t)$ är höjden i meter över vattnet och t är tiden i sekunder efter det att de skickat i väg raketen. Efter hur lång tid slår raketen ner i vattnet?

2228.

$25t - 5t^2 = 0$

$5t(5-t) = 0$

$t_1 = 0,\ t_2 = 5 \Rightarrow$

Efter 5 s.

2229 Lisa löser ekvationen $x(x - 6) = 0$ och får lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = 6$. Hon tycker att metoden borde kunna användas för att lösa ekvationen $x(x - 6) = 14$, eftersom 14 kan skrivas som $2 \cdot 7$. Förklara varför metoden inte fungerar om produkten är något annat än 0.

2229. För att flera olika kombinationer av faktorer kan samma produkt.

2230 Konstruera en andragradsekvation med rötterna $x_1 = 0$ och $x_2 = -\frac{1}{3}$ som är skriven i formen $ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c är heltal.

2230.

$$x\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{x}{3} = 0$$

$$\underline{3x^2 + x = 0}$$

2231 Vilka tal a och b gör att ekvationen $(ax + 2)(bx - 5) = 0$ har lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = 5$?

2231. $\underline{a = -2 \ , \ b = 1}$ $\Rightarrow$

$$(2 - 2x)(x - 5) = 0$$

$$2(1 - x)(x - 5) = 0$$

2232 Linus ska lösa ekvationen $x^2 = 8x$. Han gör så här:

$x^2 = 8x$

$\frac{x^2}{x} = \frac{8x}{x}$

$x = 8$

Elvira har löst ekvationen på ett annat sätt och fått *två* lösningar till ekvationen, som vid prövning visar sig vara korrekta.

a) Vilka är de två lösningarna?

b) Förklara varför Linus metod inte ger båda lösningarna.

2232. a) $x_1 = 0, \quad x_2 = 8$

b) När man dividerar bägge leden måste man tänka på att x kan vara noll.

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0$$

2305 Lös ekvationerna exakt.

a) $5x^2 - 10x = 15$

b) $2x^2 - 8x + 10 = 0$

c) $x^2 - 12x + 8 = 0$

2305. a) $5(x^2 - 2x - 3) = 0$

$(x-1)^2 - 1 - 3 = 0$

$x - 1 = \pm 2$

$\underline{x = 1 \pm 2}$

b) $2(x^2 - 4x + 5) = 0$

$(x-2)^2 - 4 + 5 = 0$

$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ <u>Ekv. saknar reella rötter.</u>

c) $(x-6)^2 - 36 + 8 = 0$

$x - 6 = \pm\sqrt{28}$

$\underline{x = 6 \pm \sqrt{28}}$

2306 Lös ekvationerna

a) $2x^2 + 7x + 5 = x(x + 3) + 17$

b) $9x^2 + 36x + 36 = 4$

2306. a) $2x^2 + 7x + 5 = x^2 + 3x + 17$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 - 12 = 0$$

$$x + 2 = \pm 4$$

$$\underline{x = -2 \pm 4}$$

b) $9(x^2 + 4x + 4) = 4$

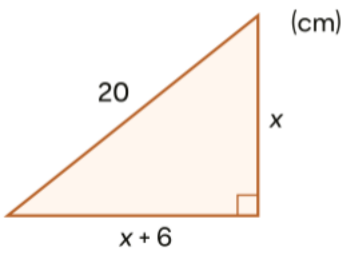
$$9(x+2)^2 = 4$$

$$(x+2)^2 = \frac{4}{9}$$

$$x + 2 = \pm \frac{2}{3}$$

$$\underline{x = -2 \pm \frac{2}{3}}$$

2307 Bestäm triangelns sidor.



2307.

$$(x+6)^2 + x^2 = 20^2$$

$$2x^2 + 12x + 36 = 400$$

$$2(x^2 + 6x + 18) = 400$$

$$(x+3)^2 - 9 + 18 = 200$$

$$(x+3)^2 = 191$$

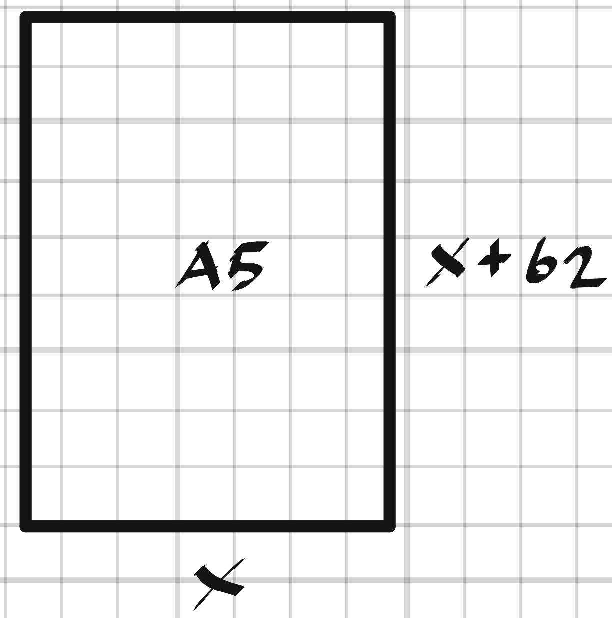
$$x = -3 (\pm) \sqrt{191} \approx 10{,}8 \text{ cm}$$

$$x + 6 \approx 10{,}8 + 6 = 16{,}8 \text{ cm}$$

Triangelns sidor är 11, 17 och 20 cm

2308 Ett papper av formatet A5 har formen av en rektangel där ena sidan är 62 mm längre än den andra. Arean är 31 250 mm^2. Vilka mått har ett A5-papper?

2308.



$$x(x+62) = 31250$$

$$x^2 + 62x - 31250 = 0$$

$$(x+31)^2 - 31^2 - 31250 = 0$$

$$x + 31 = \pm\sqrt{32211}$$

$$x = -31 \pm 179 \approx 148$$

$$x + 62 \approx 210$$

En A5 har måtten 148 × 210 mm.

2309 Bestäm värdet av a, så att ekvationens ena lösning är $x = 1$. Hitta sedan ekvationens andra lösning.

a) $x^2 + 4x + a = 0$

b) $x^2 + ax - 7 = 0$

c) $ax^2 + 5x - 6 = 0$

2309. a) $1^2 + 4 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow a = -5$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+2)^2 - 4 - 5 = 0$

$x + 2 = \pm 3 \Rightarrow x = -2 \pm 3 \Rightarrow \underline{x_2 = -5}$

b) $1^2 + a \cdot 1 - 7 = 0 \Rightarrow a = 6$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$(x+3)^2 - 9 - 7 = 0$

$x + 3 = \pm 4 \Rightarrow x = -3 \pm 4 \Rightarrow \underline{x_2 = -7}$

c) $a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = 0$

$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow \underline{x_2 = -6}$

2310 Bosse och Helena löser ekvationen $x^2 + 12x + 3 = 0$ med kvadratkomplettering. Bosse inleder med att subtrahera 3 från båda led, medan Helena inleder med att addera 33 till båda led. Förklara hur Bosse och Helena kan ha tänkt.

2310. Bosse "flyttar" över 3:an till HL, vilket knappast förenklar lösningen.

Helena skapar termen 36 i VL så att hon sedan kan faktorisera till $(x+6)^2$.

2311 Låt $x - 1$, x och $x + 1$ vara tre positiva heltal. Produkten av dem är fem gånger så stor som deras summa. Vilka är de tre talen?

2311. $(x-1) \cdot x \cdot (x+1) = 5 \cdot (x-1+x+x+1)$

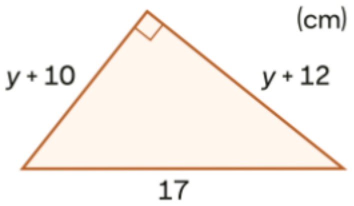
$x(x^2-1) = 5 \cdot 3x$

$x > 0 \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 15 \quad \Rightarrow$

$x = 4$

Talen är 3, 4 och 5

2312 Bestäm triangelns area.



2312.

$$b = y + 10 \Rightarrow h = b + 2$$

$$b^2 + (b+2)^2 = 17^2$$

$$2b^2 + 4b + 4 = 289$$

$$2(b^2 + 2b + 2) = 289$$

$$b^2 + 2b + 2 = \frac{289}{2}$$

$$(b+1)^2 - 1 + 2 = \frac{289}{2}$$

$$(b+1)^2 = \frac{287}{2}$$

$$b = -1 \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{287}{2}} \approx 10{,}98$$

$$h \approx 10{,}98 + 2 = 12{,}98$$

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{10{,}98 \cdot 12{,}98}{2} \approx 71{,}25 \approx \underline{71 \text{ cm}^2}$$

2313 Enya visar en matematisk konstighet för sin kompis Senéad. Hon utgår från likheten $25 - 45 = 16 - 36$ och kvadratkompletterar bägge led. Hon får följande resultat

$25 - 45 = 16 - 36$

Adderar $\left(\frac{9}{2}\right)^2$ till båda led

$5^2 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 4^2 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$

Skriver om båda led med kvadreringsregeln

$\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$

Tar kvadratroten ur båda led

$\left(5 - \frac{9}{2}\right) = \left(4 - \frac{9}{2}\right)$

Adderar till $\frac{9}{2}$ till båda led

$5 = 4$

Sinéad förstår att något inte stämmer, men kan inte komma på vad det kan vara. Hjälp Enya att förklara för Sinéad vad som ligger bakom det tokiga resultatet.

2313. Vid steget när hon tar kvadratroten ur bägge leden glömmer hon $\pm$. I hennes exempel får hon då bara ut den falska roten.

$$5 - \frac{9}{2} = \pm\left(4 - \frac{9}{2}\right)$$

① $5 - \frac{9}{2} = -4 + \frac{9}{2}$ ② $5 - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ok! $5 = 4$ falsk lösning!

2323 Edvin och Maja diskuterar hur man enklast löser olika typer av andragradsekvationer. De har hittat följande varianter:

1. $x^2 - 25 = 0$
   (Ekvation med x^2-term och konstantterm)
2. $x^2 + 4x = 0$
   (Ekvation med x^2-term och x-term)
3. $x^2 - 6x + 5 = 0$
   (Ekvation med x^2-term, x-term och konstantterm)

Ge förslag till Edvin och Maja hur de ska kunna lösa de tre olika ekvationerna på enklaste sätt.

2323.

1. $x^2 - 25 = 0$

$x = \pm 25^{1/2} = \pm 5$

2. $x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = -4, \; x_2 = 0$

3. $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 3 \pm (3^2 - 5)^{1/2} = 3 \pm 2$

2324 Ekvationen $y = 1{,}7 + x - 0{,}1x^2$ beskriver Fannys stöt med kula, där y är kulans höjd i meter då den har färdats x meter horisontellt.

a) Hur högt håller Fanny kulan när hon stöter i väg den?

b) Hur långt stöter hon?

2324. a) $\underline{1{,}7 \text{ m}}$

b) $y = 0 \Rightarrow$

$1{,}7 + x - 0{,}1x^2 = 0$

$x^2 - 10x - 17 = 0$

$x = 5 (\pm) \sqrt{25 + 17} = 5 + \sqrt{42} \approx \underline{11{,}5 \text{ m}}$

2325 Ange en andragradsekvation i formen $ax^2 + bx + c = 0$ som saknar lösningar.

2325. $\underline{2x^2 + 6x + 6 = 0}$

2326 Begränsningsarean av en rak cirkulär cylinder beräknas med formeln $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Bestäm r om $A = 300$ cm^2 och $h = 10$ cm.

2326.

$$2\pi\left(r^2 + rh - \frac{A}{2\pi}\right) = 0$$

$$r = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{A}{2\pi}}$$

$$r = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} + \frac{300}{2\pi}}$$

$$r = -5(\pm)8{,}5 = \underline{3{,}5 \text{ cm}}$$

2327 Ange två olika andragradsekvationer i formen $ax^2 + bx + c = 0$ som båda har rötterna $x_1 = -7$ och $x_2 = -4$.

2327.

$$(x+7)(x+4) = \underline{x^2 + 11x + 28}$$

$$-(x+7)(x+4) = \underline{-x^2 - 11x - 28}$$

2328 Lös ekvationen $(x - \sqrt{3})^2 - 4(x - \sqrt{3}) + 3 = 0$ om du vet att $t^2 - 4t + 3 = 0$ har lösningarna $t_1 = 3$ och $t_2 = 1$. Svara med exakta värden.

(Np Ma2c vt 2014)

2328.

$x_1 - \sqrt{3} = 3 \Rightarrow \underline{x_1 = 3 + \sqrt{3}}$

$x_2 - \sqrt{3} = 1 \Rightarrow \underline{x_2 = 1 + \sqrt{3}}$

2329 Lös ekvationen $x^4 - 20x^2 + 19 = 0$. Börja med att sätta $x^2 = t$.

2329.

$t^2 - 20t + 19 = 0$

$t = 10 \pm \sqrt{100 - 19} = 10 \pm 9$

$t_1 = 1 \Rightarrow \underline{x_{1,2} = \pm 1}$

$t_2 = 19 \Rightarrow \underline{x_{3,4} = \pm \sqrt{19}}$

2330 I många länder används den så kallade *abc*-formeln i stället för *pq*-formeln, när man löser andragradsekvationer. Den formeln säger att ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har lösningarna

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bevisa att formeln ger ekvationens lösningar.

2330.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$2ax^2 + 2bx + 2c = 0$$

$$2a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

#

2331 Det finns två samband mellan rötterna till en andragradsekvation och koefficienterna till ekvationen.

> Om x_1 och x_2 är lösningar till ekvationen
> $x^2 + px + q = 0$, så är
> $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

Visa att

a) $x_1 + x_2 = -p$

b) $x_1 \cdot x_2 = q$

2331.

a+b) $x^2 + px + q = 0$

$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$

$x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = x^2 + px + q \Rightarrow$

$x_1 + x_2 = -p \quad , \quad x_1 x_2 = q$

#

2332 Max har upptäckt att om q är negativ i ekvationen $x^2 + px + q = 0$, så är alltid den ena roten positiv och den andra negativ. Han kan inte riktigt förstå varför det blir så, men Mollie säger att det är enkelt. Hjälp Mollie att förklara för Max varför hans upptäckt stämmer.

2332. Då $q = x_1 \cdot x_2$ så kan bara den ena av rötterna x_1 eller x_2 vara negativ om q är negativ.

2338 Ange värdet på a så att ekvationen $x^2 + ax + 18 = 0$ får lösningarna $x_1 = 3$ och $x_2 = 6$.

2338. $(x-3)(x-6) = x^2 + ax + 18$

$x^2 - 9x + 18 = x^2 + ax + 18 \Rightarrow \underline{a = -9}$

2339 För vilka värden på koefficienten a har ekvationen $x^2 + ax + 10 = 0$

a) två rötter

b) en dubbelrot

c) inga rötter

2339. $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{40}{4}} = -\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 40}}{2}$

a) Två rötter $\Rightarrow a^2 - 40 > 0 \Rightarrow$

$a < -\sqrt{40}$, $a > \sqrt{40}$

b) En dubbelrot $\Rightarrow a^2 - 40 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{40}$

c) Inga reella rötter $\Rightarrow a^2 - 40 < 0 \Rightarrow$

$-\sqrt{40} < a < \sqrt{40}$

2340 Diskriminanten till en andragradsekvation av formen $ax^2 + bx + c = 0$ är $b^2 - 4ac$. Skriv ekvationen i formen $x^2 + px + q = 0$ och visa att $b^2 - 4ac$ har samma tecken som $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

2340. $ax^2 + bx + c = 0$

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow p = \frac{b}{a}, \; q = \frac{c}{a}$

1 $\begin{cases} b^2 - 4ac < 0 \text{ om } b^2 < 4ac \\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \text{ om } p^2 < 4q \Rightarrow b^2 < 4a^2q \Rightarrow b^2 < 4ac \end{cases}$

$\#$

2 $\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \text{ om } b^2 > 4ac \\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \text{ om } p^2 > 4q \Rightarrow b^2 > 4a^2q \Rightarrow b^2 > 4ac \end{cases}$

$\#$

2341 Om diskriminanten till en andragradsekvation har värdet noll, så har ekvationen en dubbelrot. Visa att omvändningen också gäller dvs. visa att om en andragradsekvation har en dubbelrot, så är värdet av diskriminanten noll.

2341

Dubbelrot $\Rightarrow$ Ekv. kan skrivas på formen $(x-a)^2=0$

$$x^2-2ax+a^2=0$$

$$x=a\pm\sqrt{\underbrace{a^2-a^2}}$$

Diskriminanten $=0$ #

2351 Andragradsekvationen $x^2 + ax + 24a = 0$ har en rot $x = -6$. Vilken är den andra roten?

2351.

$$(x+6)(x-x_2)=x^2+ax+24a$$

$$x^2-(x_2-6)x-6x_2=x^2+ax+24a \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2-6=-a \\ 6x_2=-24a \end{cases}$$

$$x_2=-4a \Rightarrow -4a-6=-a \Rightarrow a=-2$$

$$x_2=-a+6=\underline{8}$$

2352 För två tal a och b gäller att $a - b = 5$ och $a^2 - b^2 = 195$. Bestäm talen a och b.

2352. $(a+b)(a-b) = 195 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b = 39 \\ a-b = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$2b = 34$

$b = 17,\ a = 22$

2353 Två på varandra följande positiva heltal kvadreras. Summan av kvadraterna blir 113. Vilka är talen?

2353. $x^2 + (x+1)^2 = 113$

$2x^2 + 2x + 1 = 113$

$2(x^2 + x - 56) = 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{224}{4}} = \frac{-1 \pm 15}{2} = 7$

Talen är 7 och 8.

2354 Lös ekvationerna.

a) $x^3 + 24x^2 + 44x = 0$

b) $2x^3 + 6x^2 - 8x = 0$

2354.

a) $x(x^2 + 24x + 44) = 0$

$x = -12 \pm \sqrt{144 - 44} = -12 \pm 10$

$x(x+22)(x+2) = 0$

$\underline{x_1 = -22, \ x_2 = -2, \ x_3 = 0}$

b) $2x(x^2 + 3x - 4) = 0$

$2x(x-1)(x+4) = 0$

$\underline{x_1 = -4, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1}$

2355 Familjen Jansson betalade totalt 420 kr för den mjölk som de drack under en månad. Månaden efter ökade priset på mjölken med 50 öre per liter. Genom att minska mjölkdrickandet med 4 liter blev kostnaden för mjölk även denna månad 420 kr. Hur mycket kostade en liter mjölk före prishöjningen?

2355.

x = literpriset innan höjningen

y = antal liter – " –

$$yx = 420$$

$$(y-4)(x+0{,}5) = 420$$

$$\left(\frac{420}{x} - 4\right)(x+0.5) = 420$$

$$420 + \frac{210}{x} - 4x - 2 = 420$$

$$\frac{210}{x} - 4x = 2$$

$$210 - 4x^2 = 2x$$

$$4(x^2 + 0.5x - 52.5) = 0$$

$$x = -0.25 \pm \sqrt{0.0625 + 52.5} = -0.25 \pm 7.25 = 7 \text{ kr/l}$$

2356 Visa att för tre på varandra följande heltal gäller att differensen mellan kvadraten på det största talet och kvadraten på det minsta talet är fyra gånger så stor som talet i mitten.

2356. $(x+2)^2 - x^2 = 4(x+1)$

$VL = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4 = 4(x+1) = HL$ #

2357 Lös det icke-linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

2357. $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - x = 1 \end{cases}$

(2): $y^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

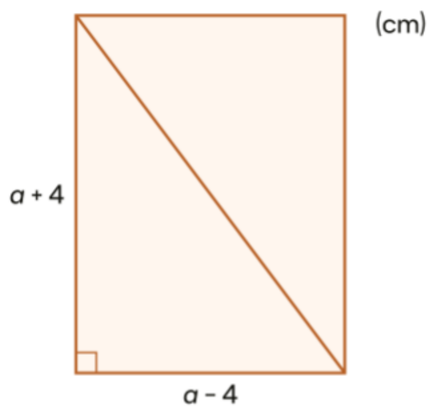
(1+2): $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$

$2(x^2 + x - 12) = 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{-1 \pm 7}{2}$

$$\begin{cases} \underline{x_1 = -4 \quad , \quad y_1 = -3} \\ \underline{x_2 = 3 \quad , \quad y_2 = 4} \end{cases}$$

2358 Figuren nedan visar en rektangel med diagonalen inritad.



a) Vilka värden kan a anta om rektangelns area ska vara större än 18 cm^2? Svara exakt.

b) Längden av rektangelns diagonal ges av uttrycket $\sqrt{(a+4)^2+(a-4)^2}$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.

(Np Ma2c vt 2014)

2358. a) $(a+4)(a-4) > 18$

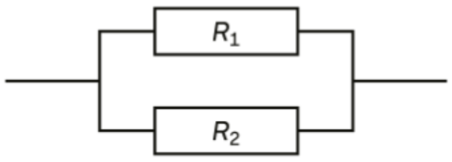
$a^2 - 16 > 18$

$a^2 > 34$

$a < -\sqrt{34}$, $\underline{a > \sqrt{34}}$

b) $\sqrt{a^2+8a+16+a^2-8a+16} = \underline{\sqrt{2a^2+32}}$ i.e.

2359 Två resistorer är parallellkopplade enligt figuren.



Den totala resistansen har mätts till 2 ohm och för den ena av resistorerna är motståndet 3 ohm mer än för den andra.

Den totala resistansen R kan bestämmas med formeln

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Vilket motstånd har de två resistorerna R_1 och R_2?

2359.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1+3} = \frac{1}{2}$$

$$(R_1+3) + R_1 = \frac{1}{2} R_1(R_1+3)$$

$$\frac{1}{2} R_1^2 + \frac{3}{2} R_1 - 2R_1 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}(R_1^2 - R_1 - 6) = 0$$

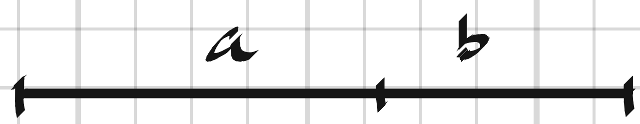
$$R_1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1 \pm 5}{2} = \underline{3\ \Omega}$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{6}{3-2} = \underline{6\ \Omega}$$

2360 För att dela en sträcka i två enligt det gyllene snittet, ska man dela den så att den kortare sträckan förhåller sig till den längre, såsom den längre sträckan förhåller sig till hela sträckan.

Dela en sträcka som är 1 meter lång enligt det gyllene snittet. Hur lång är den längre sträckan? Svara exakt.

2360.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$a^2 = b(a+b)$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

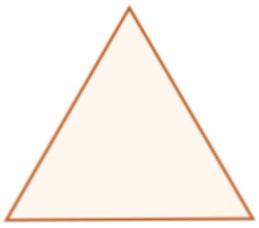
$$a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{4b^2}{4}} = \frac{b \pm \sqrt{5}b}{2} = b \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$a > 0 \implies \phi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

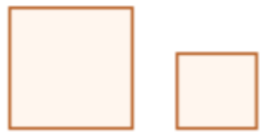
$$a + b = 1 \implies a\left(1 + \frac{1}{\phi}\right) = 1 \implies$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} \text{ m} \approx \underline{0{,}618 \text{ m}}$$

2361 Ett snöre är 24 m långt. Snöret kan formas till olika geometriska figurer.



Figur 1



Figur 2

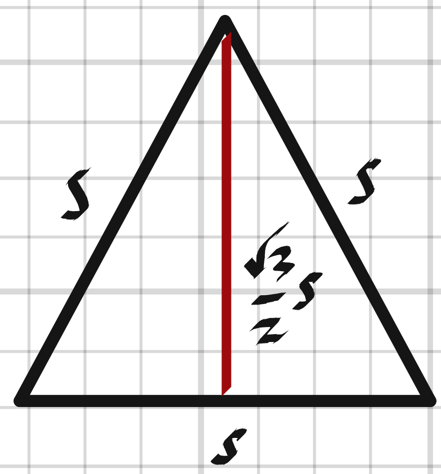
a) Hela snöret formas till en liksidig triangel, se Figur 1. Bestäm triangelns area.

b) Snöret delas sedan i två olika långa delar. Av varje del formas en kvadrat, se Figur 2. Undersök om det är möjligt att kvadraterna tillsammans får arean 17 m^2.

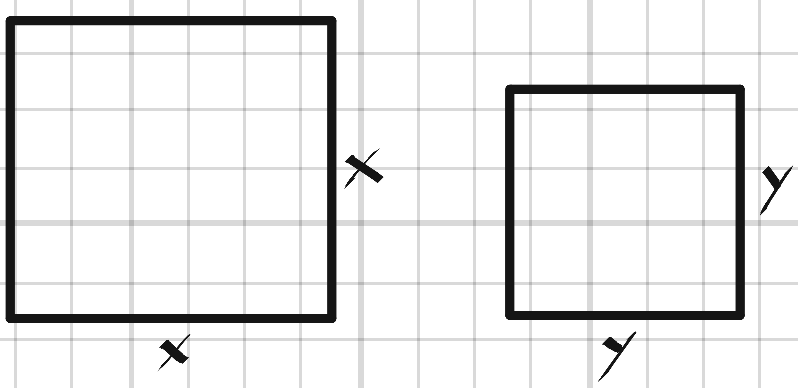
(Np Ma2c vt 2012)

2361. a) $s = \frac{24}{3} = 8 \text{ m}$

$$A = \frac{s \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx \underline{28 \text{ m}^2}$$



b)



$$\begin{cases} 4x + 4y = 24 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

$$x^2 + (6-x)^2 = 17$$

$$2x^2 + 36 - 12x = 17$$

$$2\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right) = 0$$

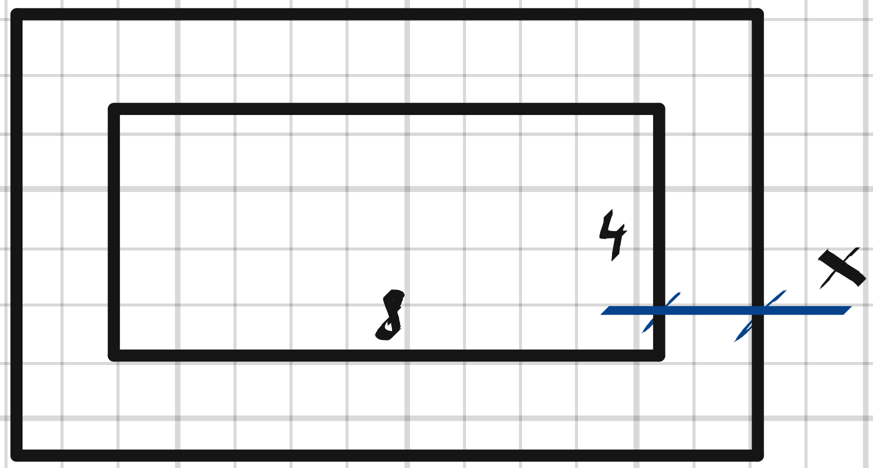
$$x = 3 \pm \sqrt{\frac{18-19}{2}}$$

Ekvationen saknar reella lösningar

$\Rightarrow$ Det är ej möjligt

2362 Ammar ska lägga klinker kring sin 4×8 meter stora pool. Han har 58 m^2 klinker och klinkergången ska vara lika bred överallt. Beräkna bredden på klinkergången om all klinker går åt.

2362.



$$(8+2x)(4+2x) - 8 \cdot 4 = 58$$

$$32 + 24x + 4x^2 - 32 = 58$$

$$4\left(x^2 + 6x - \frac{29}{2}\right) = 0$$

$$x = -3 (\pm) \sqrt{\frac{18+29}{2}} = -3 (\pm) \sqrt{\frac{47}{2}} \approx \underline{1{,}8 \text{ m}}$$

2363 Visa att uttrycket $1 + x(2 - x)x - x^2(1 - x)$ aldrig antar ett negativt värde, oavsett värde på x.

2363. $1 + 2x^2 - x^3 - x^2 + x^3 = 1 + x^2 > 0$ #

2364 I ekvationen $ax^2 - a^2x = -2$ är a en positiv konstant. Lös ekvationen och visa vilka värden på a som ger två olika reella rötter.

(Np Ma2c vt 2014)

2364.

$$a\left(x^2 - ax + \frac{2}{a}\right) = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{a}}$$

2 reella rötter $\Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{2}{a} > 0$

$$\frac{a^2}{4} > \frac{2}{a} \Rightarrow a^3 > 8 \Rightarrow \underline{a > 2}$$

2365 Det finns många lösningar till följande ekvation $(x^2 - 5x + 5)^{(x+2)(x-3)} = 1$. Lös ekvationen.

Ledtråd: Fundera över vilka kombinationer av a och b som ger $a^b = 1$.

2365. $a^b = 1$ om $a = 1$

eller $a = -1$, b jämnt tal

eller $b = 0$, $a \neq 0$

$\underline{a = 1}$: $x^2 - 5x + 5 = 1$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 1, x_2 = 4}$

$\underline{a = -1, b \text{ jämnt tal}}$:

$x^2 - 5x + 5 = -1$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{x_3 = 2, x_4 = 3}$

Kontroll: $(x_3 + 2)(x_3 - 3) = 4 \cdot (-1) = -4$ jämnt tal.

$(x_4 + 2)(x_4 - 3) = 5 \cdot 0$ ok

$\underline{b = 0, a \neq 0}$: $(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow \underline{x_5 = -2}, x_4 = 3$

2366 Om de två rötterna till ekvationen $x^2 - 85x + c = 0$ är primtal, vilket värde har då siffersumman av konstanten c?

(Kängurutävlingen junior 2015)

Om x_1 och x_2 är lösningar till ekvationen $x^2 + px + q = 0$, så är $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

2366.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = 85 \end{cases}$$

Symmetrilinjen är $x = 42,5$ vilket innebär att rötterna x_1 och x_2 måste ligga på samma avstånd från denna. Summan av dem skall samtidigt vara 85, vilket innebär att ett av talen måste vara jämnt och det enda jämna primtalet = 2

$\Rightarrow$ $x_1 = 2$, $x_2 = 83$

$c = 2 \cdot 83 = 166$

Siffersumman = $1 + 6 + 6 = \underline{13}$

Lös ekvationerna

2373 a) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$

b) $x + 4\sqrt{x} - 12 = 0$

2373.

$t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$

a)

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$t = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$

$t_1 = 1 \Rightarrow \underline{x_1 = 1}$

$t_2 = 5 \Rightarrow \underline{x_2 = 25}$

b)

$t^2 + 4t - 12 = 0$

$t = -2 \pm \sqrt{4+12} = -2 \pm 4$

$t_1 = -6$ falsk rot

$t_2 = 2 \Rightarrow \underline{x = 4}$

Lös ekvationerna

2374 a) $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3) = 0$

b) $(5 + \sqrt{y})(3 - 2\sqrt{y}) = 0$

2374. $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$

a) $(t-2)(t-3) = 0$

$t_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \underline{4}$

$t_2 = 3 \Rightarrow x_2 = \underline{9}$

$t = \sqrt{y} \Rightarrow t^2 = y$

b) $(5+t)(3-2t) = 0$

$t_1 = -5$ falsk rot

$t_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{x = \frac{9}{4}}$

2375 Konstruera en rotekvation som har

a) rötterna $x_1 = 9$ och $x_2 = 1$

b) $x = 49$ som enda rot

2375. a) $\underline{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1) = 0}$

b) $\underline{(\sqrt{x} - 7)^2 = 0}$

2376 Ange två olika rotekvationer med olika lösningar, som efter kvadrering av båda leden resulterar i hjälpekvationen $x^2 + 6x + 9 = 16x$.

2376.

$\underline{x + 3 = 4\sqrt{x}}$

$\underline{x + 3 = -4\sqrt{x}}$

2377 Lös ekvationerna

a) $x - 6\sqrt{x+1} + 6 = 0$

b) $x - 8\sqrt{x-5} + 10 = 0$

2377.

a)

$x + 6 = 6\sqrt{x+1}$

$(x+6)^2 = 36(x+1)$

$x^2 + 12x + 36 = 36x + 36$

$x(x - 24) = 0$

$x_1 = \underline{0}, \quad x_2 = \underline{24}$

b)

$x + 10 = 8\sqrt{x-5}$

$(x+10)^2 = 64(x-5)$

$x^2 + 20x + 100 = 64x - 320$

$x = 22 \pm \sqrt{484 - 420} = 22 \pm 8$

$x_1 = \underline{14}, \quad x_2 = \underline{30}$

2378 Varför vill man ha termen $\sqrt{x}$ ensam i ena ledet, innan man kvadrerar båda leden i ekvationen $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$?

2378. Annars får man inte bort rot-termen.

2379 Man kan lösa rotekvationer genom att göra en substitution. Genom att i ekvationen $x - 14\sqrt{x} + 24 = 0$ göra substitutionen $\sqrt{x} = t$ får man hjälpekvationen $t^2 - 14t + 24 = 0$.

a) Visa att substitutionen $\sqrt{x} = t$ ger hjälpekvationen $t^2 - 14t + 24 = 0$.

b) Lös hjälpekvationen $t^2 - 14t + 24 = 0$.

c) Lös ekvationen $x - 14\sqrt{x} + 24 = 0$ med hjälp av resultatet i b).

2379. a) $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$

b) $t = 7 \pm \sqrt{49-24} = 7 \pm 5$

$t_1 = 2$, $t_2 = 12$

c) $x_1 = t_1^2 = 4$

$x_2 = t_2^2 = 144$

2380 Du ska lösa rotekvationen $x - 18\sqrt{x} - 19 = 0$ och väljer att göra substitutionen $t = \sqrt{x}$.

a) Vilken hjälpekvation får du när du gjort substitutionen?

b) Vilka rötter har hjälpekvationen?

c) Vilka rötter har den ursprungliga ekvationen?

2380. a) $t^2 - 18t - 19 = \underline{0}$

b) $t = 9 \pm \sqrt{81 + 19} = 9 \pm 10 = \underline{19}$

c) $t = 19 \Rightarrow x = 19^2 = \underline{361}$

2381 Bestäm värdet av det oändliga rotuttrycket

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots}}}}}$$

2381. $x = \sqrt{20 + a}$ $\qquad$ $\underline{x = a = b = c = d = \ldots = 5}$

$a = \sqrt{20 + b}$

$b = \sqrt{20 + c}$

$c = \sqrt{20 + d}$

$\ldots$

2382 Bestäm produkten av de reella rötterna till ekvationen

$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$

2382 $x^2 + 18x + 30 = t \Rightarrow$

$t = 2\sqrt{t+15}$

$t^2 = 4(t+15)$

$t^2 - 4t - 60 = 0$

$t = 2 \pm \sqrt{4+60} = 2 \pm 8 \Rightarrow t_1 = -6,\ t_2 = 10$

Högerled kan inte vara negativ $\Rightarrow$ t_1 är en falsk rot.

$x^2 + 18x + 30 = 10$

$x = -9 \pm \sqrt{81-20} = -9 \pm \sqrt{61}$

$x_1 = -9 - \sqrt{61},\ x_2 = -9 + \sqrt{61}$

$x_1 \cdot x_2 = (-9-\sqrt{61})(-9+\sqrt{61}) = 81 - 61 = \underline{20}$