6106 Vilka trianglar i figuren är likformiga?
Motivera ditt svar.

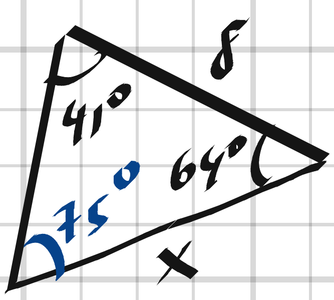
6106. Alla tre.

- Alla tre har en rät vinkel
- $\angle A$ ingår i både $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$
- $\angle C$ ingår i både $\triangle ABC$ och $\triangle BCD$
- $\angle CBD = \angle A$

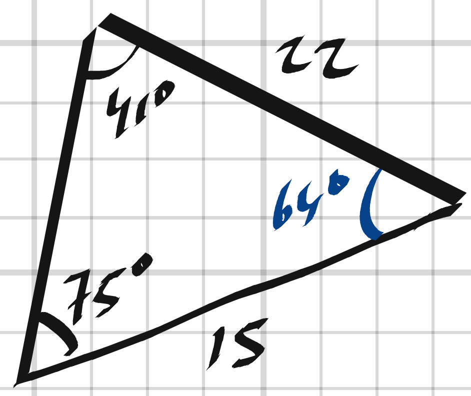
6107 Mathias har ritat två trianglar som är olika stora. I den ena triangeln är två av vinklarna 64° och 41°. I den andra triangeln är två av vinklarna 41° och 75°. Den längsta sidan i den ena triangeln är 22 cm och den längsta sidan i den andra triangeln är 8,0 cm. Den kortaste sidan i den större triangeln är 15 cm.

a) Är trianglarna som Mathias har ritat likformiga? Motivera ditt svar.

b) Beräkna längden av den kortaste sidan i den mindre triangeln.



$180° - 41° - 64° = 75°$

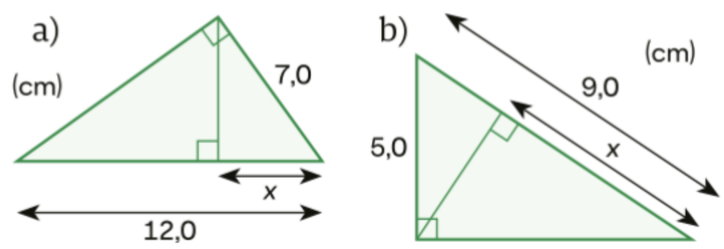


a) Ja, de är likformiga ty de har samma vinklar

b) $\frac{x}{8} = \frac{15}{22} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 15}{22} = \frac{60}{11} \approx 5.5$ cm

---

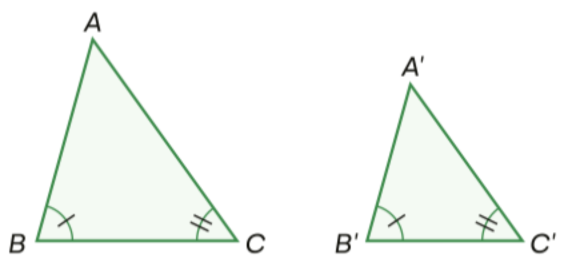
6108 Hur långa är sträckorna som är markerade med x?



6108. a) $\frac{x}{7} = \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{49}{12} \approx \underline{4{,}1 \text{ cm}}$

b) $\frac{9-x}{5} = \frac{5}{9} \Rightarrow x = 9 - \frac{25}{9} = \frac{81-25}{9} = \frac{56}{9} \approx \underline{6{,}2 \text{ cm}}$

6109 Trianglarna i figuren är likformiga.

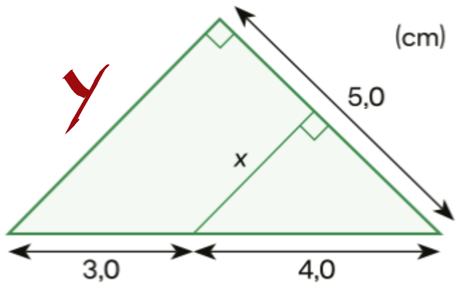


Visa att $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$

6109. Längden av AB förhåller sig till längden A'B' så som längden BC förhåller sig till längden B'C'.

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \quad \#$$

6110 Bestäm längden av sträckan markerad med x.



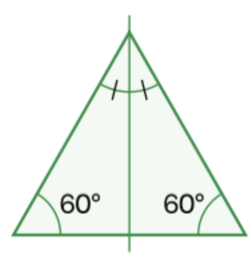
6110.

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3+4}$$

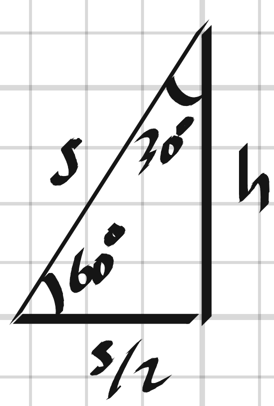
$$y = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$x = \frac{8 \cdot \sqrt{6}}{7} \approx 2{,}8 \text{ cm}$$

6111 Använd figuren till höger för att bestämma kvoten mellan den längre kateten och den kortare kateten i en rätvinklig triangel där en av vinklarna är 30°.



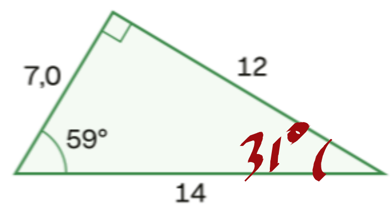
6111.



$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4s^2 - s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot s}{2}$$

$$\text{Kvoten} = \frac{h}{\frac{s}{2}} = \frac{2h}{s} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot s}{2}}{s} = \sqrt{3}$$

6121 Bestäm tan 31° med hjälp av figuren, utan att använda tangensfunktionen på ditt digitala hjälpmedel.



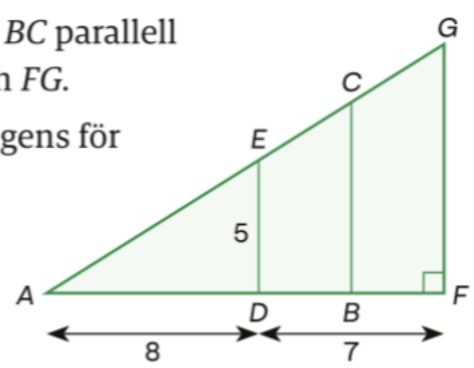
6121. $\tan 31° = \frac{7}{12}$

6122 I vilken sorts rätvinkliga trianglar gäller det att $\tan v = 1$? Motivera ditt svar.

6122. I 90°-45°-45° triangeln (halv kvadrat)

6123 I figuren är *BC* parallell med *DE* och *FG*.

Bestäm tangens för

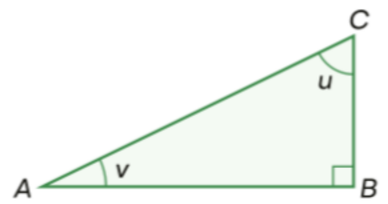


a) $\angle BAC$ b) $\angle FGA$

6123. a) $\tan \angle BAC = \frac{5}{8}$

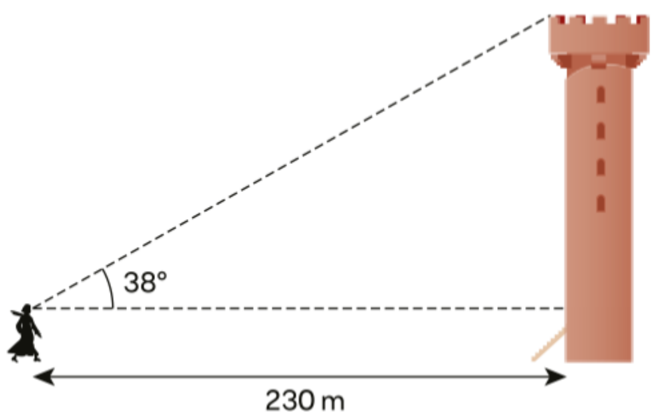
b) $\angle FGA = 90° - \angle BAC \Rightarrow \tan \angle FGA = \frac{1}{\tan \angle BAC} = \frac{8}{5}$

6124 Bestäm $\tan u$, om $\tan v = \frac{7}{11}$.



6124. $\tan u = \frac{1}{\tan v} = \frac{11}{7}$

6125 Hefi befinner sig 230 m från ett torn som syns under en vinkel av 38°.



Bestäm tornets höjd med lämpligt antal värdesiffror. Hefi är 1,75 m lång.

6125. Tornets höjd $= 230 \cdot \tan 38° + 1.75 \approx 181$ m

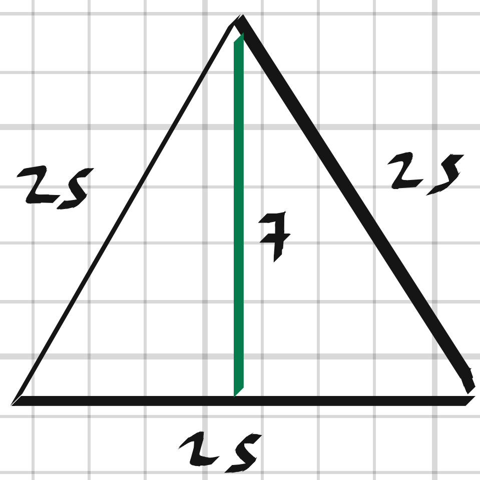
---

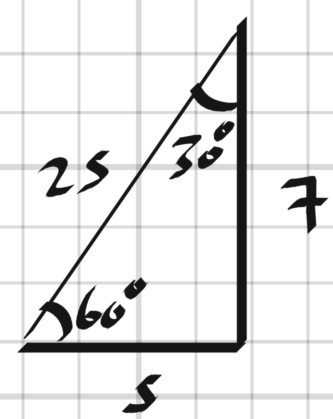
6126 Mercedes har upptäckt att värdet av $\tan v$ blir större och större när v ökar i intervallet $0° < v < 90°$. Förklara varför det är så.

6126. När vinkeln v går mot $90°$, går kvoten mellan motstående och närliggande katet mot oändligheten.

6127 Höjden i en liksidig triangel är 7 cm. Bestäm triangelns area.

6127.





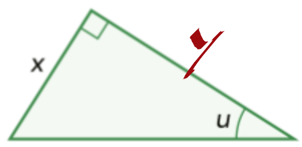
$\Rightarrow s = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$$A = \frac{2s \cdot 7}{2} = 7s = \frac{7 \cdot 7}{\sqrt{3}} = \frac{49}{\sqrt{3}} \approx 28 \text{ cm}^2$$

6128 Viktoria löste en uppgift som handlade om tangens för en vinkel i en rätvinklig triangel. Uppgiften innehöll informationen 12 cm respektive 53° och svaret blev 9,0 cm. Ge ett exempel på hur uppgiften kan ha varit formulerad.

6128. Beräkna närliggande katet om vinkeln är 53° och motstående katet är 12 cm.

6129 Ange en formel som beskriver triangelns area med hjälp av sidan x och vinkeln u.

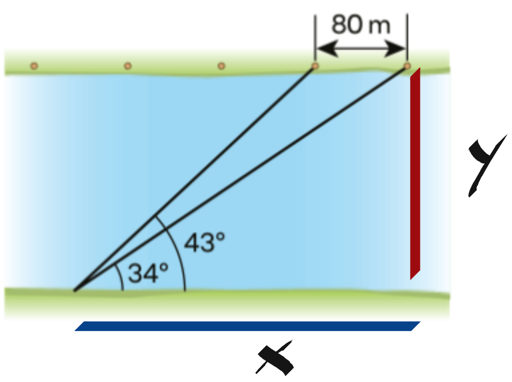


6129.

$$A = \frac{xy}{2}$$

$$y = \frac{x}{\tan u} \Rightarrow A = \frac{x^2}{2 \cdot \tan u}$$

6130 Avståndet mellan stolparna på andra sidan kanalen är 80 m. Beräkna kanalens bredd.



6130.

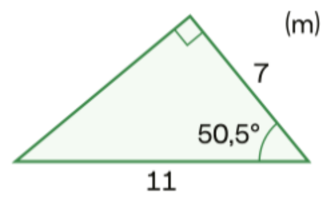
$$\begin{cases} y = x \cdot \tan 34° \\ y = (x-80) \cdot \tan 43° \end{cases}$$

$$x \cdot \tan 34° = (x-80) \cdot \tan 43° \Rightarrow$$

$$x = \frac{80 \cdot \tan 43°}{\tan 43° - \tan 34°} \Rightarrow$$

$$y = \frac{80 \cdot \tan 43° \cdot \tan 34°}{\tan 43° - \tan 34°} \approx 195 \text{ m}$$

6137 Bestäm sin 39,5° med hjälp av figuren, utan att använda räknarens sinusfunktion.

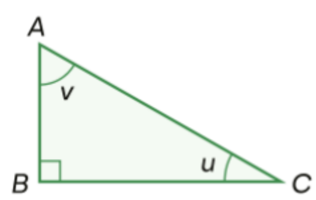


6137. $\sin 39{,}5° = \dfrac{7}{11}$

6138 Beräkna sin u, om

a) $\cos v = \dfrac{14}{23}$

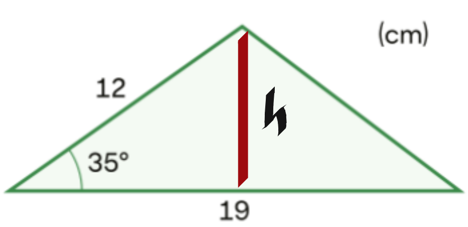
b) $\sin v = \dfrac{12}{31}$



6138. a) $\sin u = \cos v = \dfrac{14}{23}$

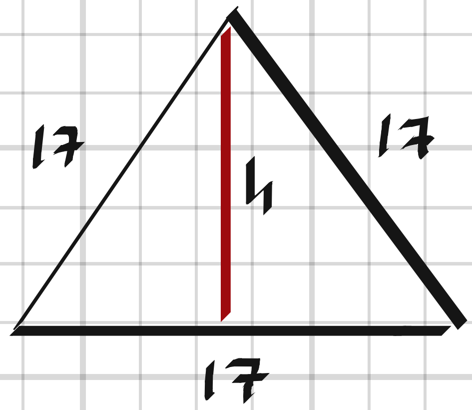
b) $\sin u = \dfrac{\sqrt{31^2 - 12^2}}{31} = \dfrac{\sqrt{817}}{31}$

6139 Beräkna triangelns area.



6139. $A = \dfrac{19 \cdot h}{2} = \dfrac{19 \cdot 12 \cdot \sin 35°}{2} \approx 65 \text{ cm}^2$

6140 Sidan i en liksidig triangel är 17 cm. Beräkna triangelns area.

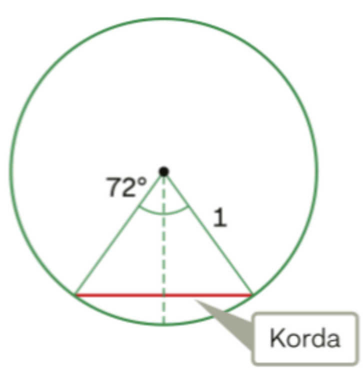


6140.

$$h = \frac{17}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$A = \frac{17 \cdot h}{2} = \frac{17^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx \underline{125 \text{ cm}^2}$$

6141 Ptolemaios från Alexandria (runt 150 e.Kr.) var den som bidrog mest till trigonometrins utveckling under antiken. Han skapade kordatabeller (egentligen sinustabeller) för vinklar mellan 0° och 90°. Värdena var korrekt angivna med upp till sex decimaler. Testa den antika metoden genom att lösa uppgifterna här nedanför.



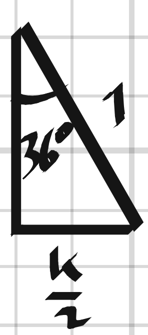
a) Visa att halva kordans längd är lika med sin 36°.

b) Utgå från figuren och teckna ett allmänt samband mellan kordans längd k och medelpunktsvinkeln v.

c) För vilka vinklar v gäller sambandet i b)? Motivera ditt svar.

6141.

a)



$$\frac{k}{2} = 1 \cdot \sin 36°$$

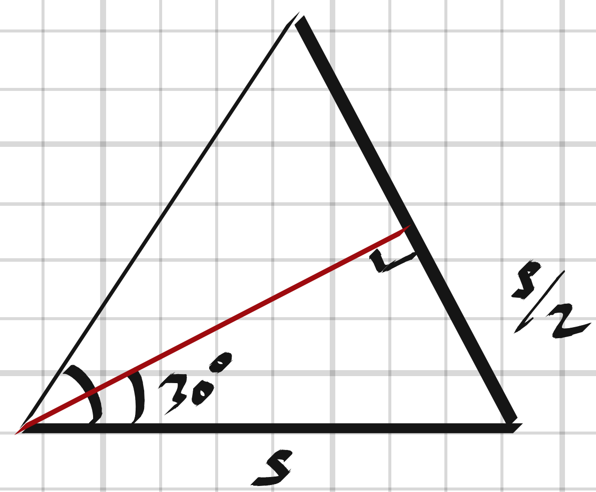
b) $$\underline{k = 2 \cdot \sin \frac{v}{2}}$$

c) $\underline{0 < v < 180°}$, gäller för halva cirkeln.

6142 Rita en bisektris till en av vinklarna i en liksidig triangel. Använd din figur till att bestämma det exakta värdet av $\sin 30°$ utan att använda räknare.

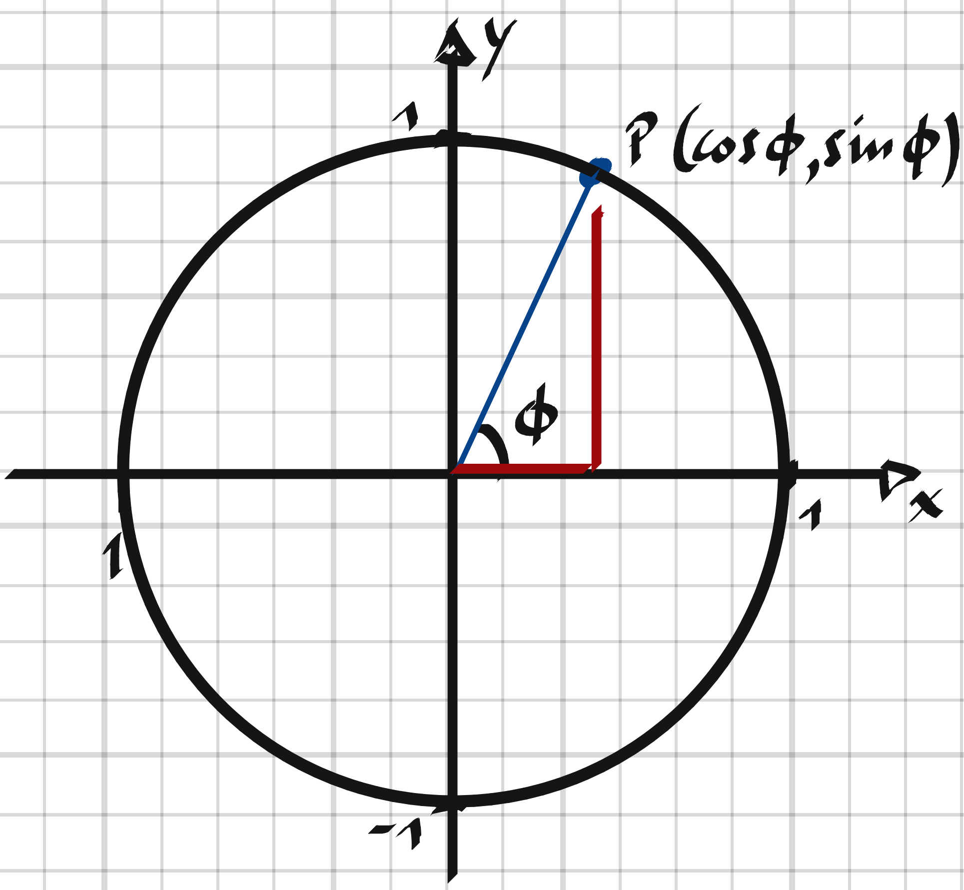
6142.

$$\sin 30° = \frac{s/2}{s} = \frac{1}{2}$$



6143 Förklara med hjälp av definitionerna varför varken sinus eller cosinus för en vinkel kan anta värden som är större än 1.

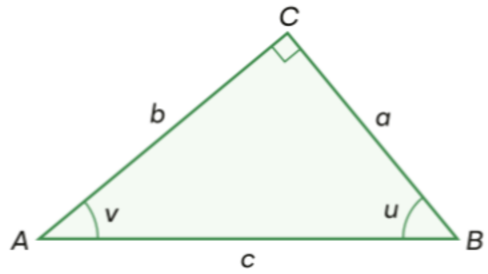
6143.



$$-1 \leq \cos\phi \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \sin\phi \leq 1$$

Hypotenusan i en triangel är alltid större än de bägge kateterna.

6144 Bestäm med hjälp av definitionerna kvoterna för $\sin v$, $\sin u$, $\cos v$ och $\cos u$ i den rätvinkliga triangeln. Vilka samband finns mellan dessa kvoter?

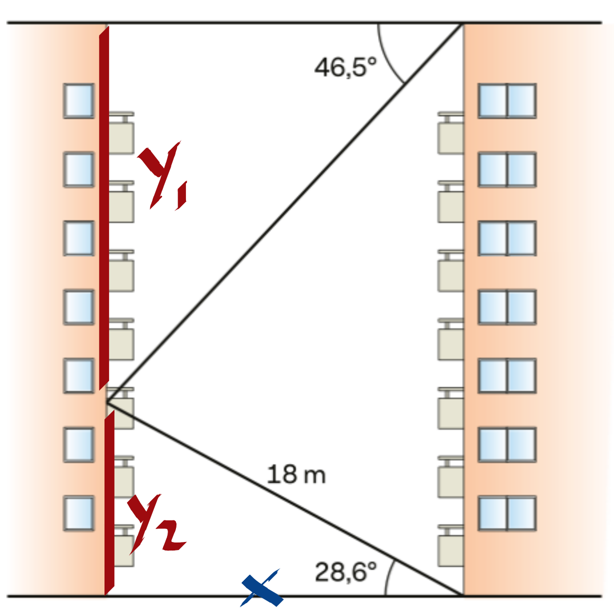


6144.

$$\sin v = \cos u = \frac{a}{c}$$

$$\sin u = \cos v = \frac{b}{c}$$

6145 Bestäm höghusets höjd.



6145.

$$x = 18 \cdot \cos 28.6^\circ$$

$$y_1 = x \cdot \tan 46.5^\circ = 18 \cdot \cos 28.6^\circ \cdot \tan 46.5^\circ$$

$$y_2 = 18 \cdot \sin 28.6^\circ$$

$$\text{Höjden} = y_1 + y_2 = 18(\cos 28.6^\circ \cdot \tan 46.5^\circ + \sin 28.6^\circ) = \underline{25\ \text{m}}$$

6146 Beräkna $\sin v$ och $\cos(90° - v)$ för ett antal vinklar v i intervallet $0° \leq v \leq 90°$.

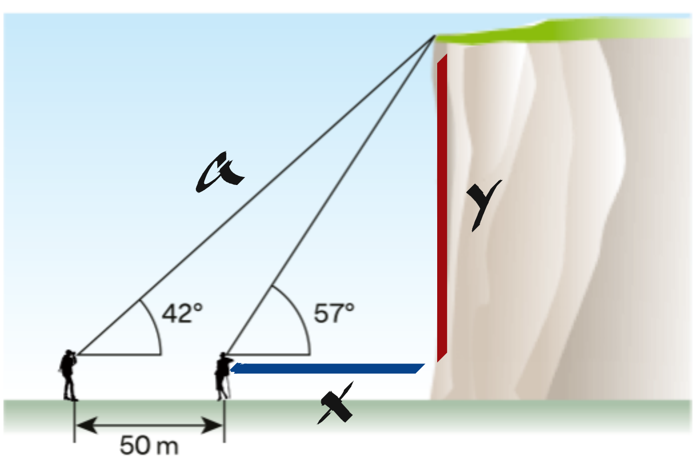
a) Vilket samband hittar du mellan $\sin v$ och $\cos(90° - v)$?

b) Gäller sambandet för alla vinklar v i intervallet $0° \leq v \leq 90°$? Motivera ditt svar.

6146. a) $\sin v = \cos(90° - v)$

b) Ja, motstående katet blir närliggande katet för vinkeln $(90° - v)$ och vice versa.

6147 En vandrare ser toppen av en klippa under en vinkel på 42°. Om han flyttar sig 50 m närmare klippan, så syns toppen under en vinkel på 57°. Bestäm avståndet från vandrarens första observationspunkt till klippans topp.



6147.
$$\begin{cases} y = x \cdot \tan 57° \\ y = (x+50) \cdot \tan 42° \end{cases}$$

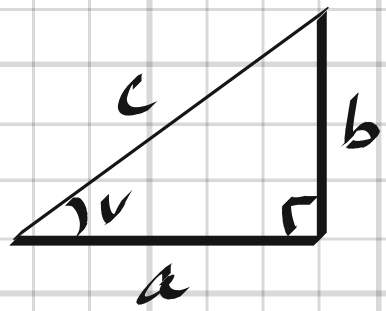
$$x \cdot \tan 57° = (x+50) \cdot \tan 42° \Rightarrow x = \frac{50 \cdot \tan 42°}{\tan 57° - \tan 42°}$$

$$a = \frac{x + 50}{\cos 42°} = \frac{\frac{50 \cdot \tan 42°}{\tan 57° - \tan 42°} + 50}{\cos 42°} \approx 160 \text{ m}$$

6148 Beräkna $k = (\sin v)^2 + (\cos v)^2$ för några olika värden på v.

a) Vilket värde på k fick du i de olika fallen?

b) Gäller sambandet för alla vinklar i en rätvinklig triangel. Motivera ditt svar.



Pythagoras sats:

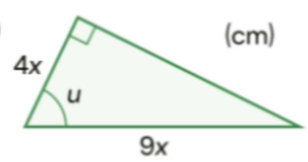
$a^2+b^2=c^2$

6148. a) $\underline{k=1}$

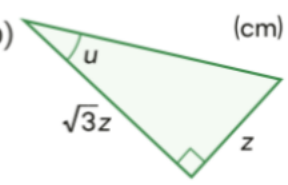
b) Ja, ty $k=\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$ #

6157 Bestäm vinkeln u.

a)



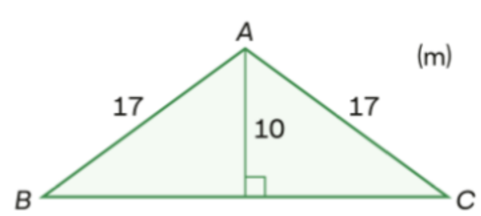
b)



6157. a) $u=\arccos\frac{4}{9}=\underline{63{,}6^\circ}$

b) $u=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{30^\circ}$

6158 Beräkna $\angle BAC$ i den likbenta triangeln.



6158. $\angle BAC=2\cdot\arccos\frac{10}{17}\approx\underline{107{,}9^\circ}$

6159 Vi har det trigonometriska sambandet arcsin $x = v$. Fyll i rätt termer i meningen här nedanför för att tydliggöra detta samband.

v är ______ vars ______ är lika med __.

6159. v är vinkeln vars sinusvärde är lika med x.

6160 Du vet att $\sin v = 0{,}20$. Beräkna värdet av

a) $3 \sin v$ b) $\sin 3v$

6160. a) $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$

b) $v = \arcsin 0{,}2 \Rightarrow$

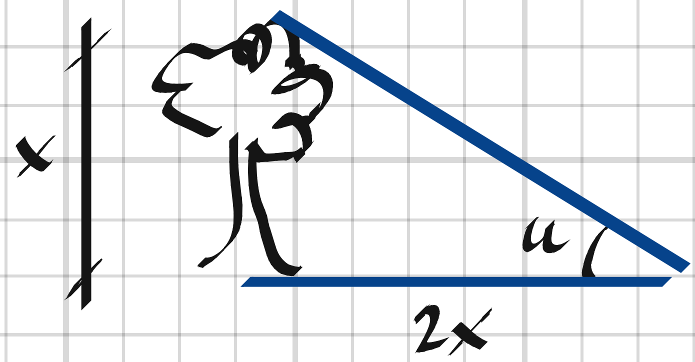
$\sin 3v = \sin(3 \cdot \arcsin 0{,}2) \approx 0{,}57$

6161 Formulera en uppgift som handlar om en vinkel på 45°, där man känner till ett funktionsvärde till den inversa funktionen och ska bestämma motsvarande värde till den trigonometriska funktionen.

6161. Bestäm $\tan v$ om $\arctan 1 = 45°$.

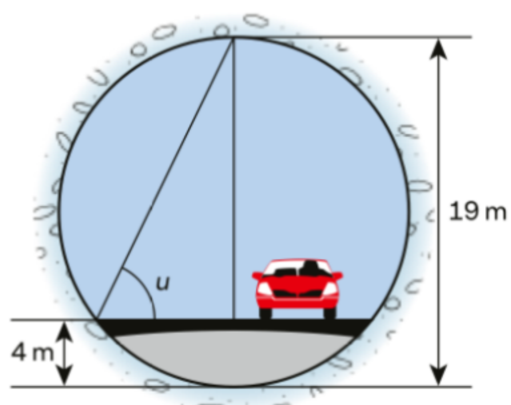
6162 Vid en viss tid på dagen är skuggan av ett träd dubbelt så lång som trädet. Bestäm solstrålarnas vinkel mot marken.

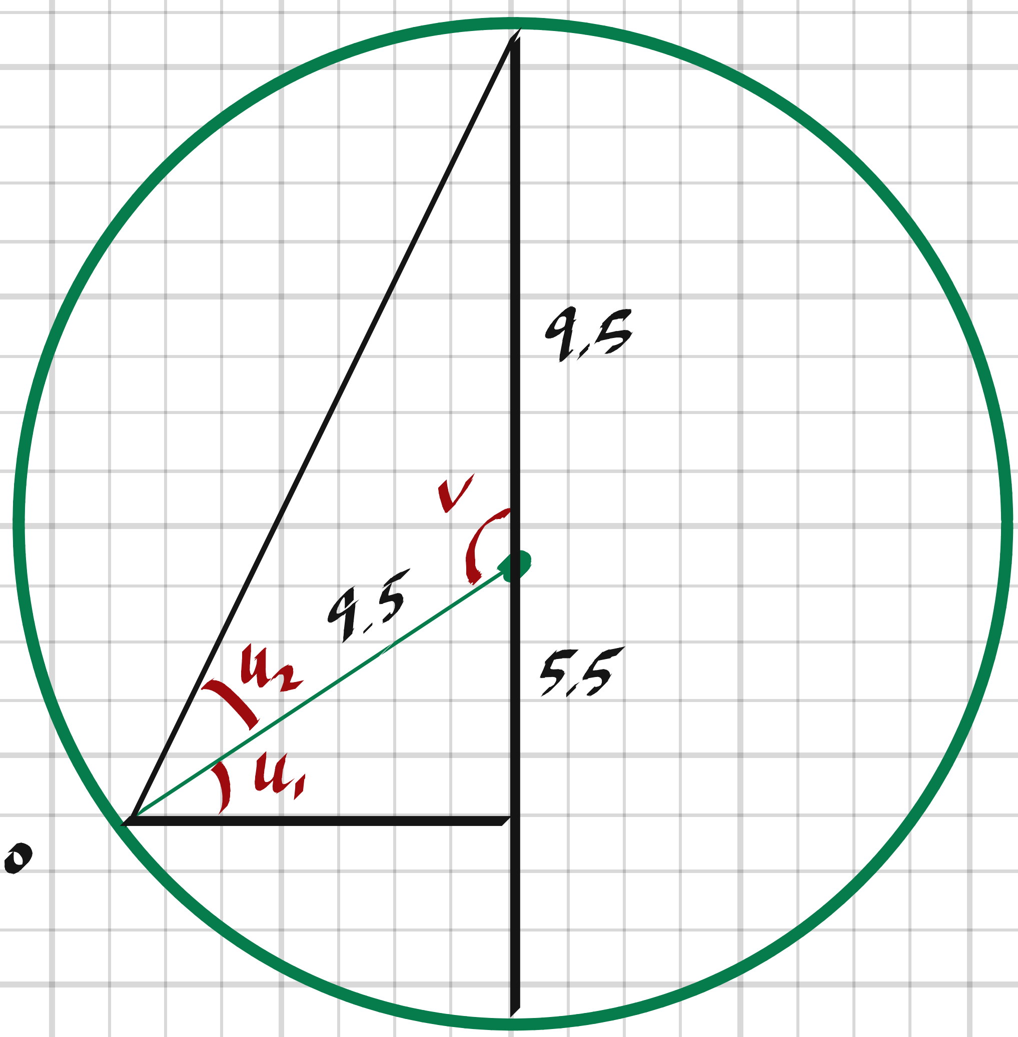
6162.



$$u = \arctan \frac{x}{2x} = \arctan \frac{1}{2} \approx \underline{26{,}6^\circ}$$

6163 Man har lagt en asfalterad väg genom en cylindrisk tunnel som är 19 m i diameter. Hur stor är vinkeln u i figuren?





6163.

$$u_1 = \arcsin \frac{5{,}5}{9{,}5} \approx 35{,}4^\circ$$

$$v = u_1 + 90^\circ \approx 125{,}4^\circ$$

$$u_2 = \frac{180^\circ - v}{2} \approx \frac{180^\circ - 125{,}4^\circ}{2} \approx 27{,}3^\circ$$

$$u \approx u_1 + u_2 \approx 35{,}4^\circ + 27{,}3^\circ \approx \underline{62{,}7^\circ}$$

6164 ”Om jag vet att en funktion f är en av de trigonometriska funktionerna (tan, sin eller cos) och att $f(a) = b$, kan jag direkt säga vad $f^{-1}(b)$ är”, säger Luka. Här är f^{-1} är motsvarande arcusfunktion.

a) Vilket värde har $f^{-1}(b)$?

b) Visa att ditt svar stämmer genom att ge två exempel.

6164.

a) $\underline{f^{-1}(b) = a}$

b)

ex 1: $f(a) = \sin a = b$

$f(b) = \sin b \Rightarrow$

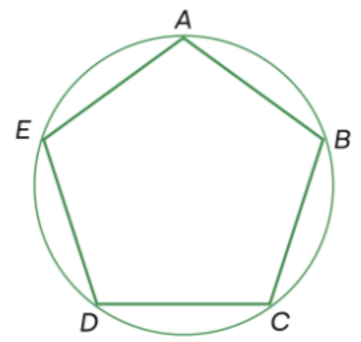
$f^{-1}(b) = \arcsin b = \arcsin(\sin a) = a$

ex 2: $f(a) = \tan a = b$

$f(b) = \tan b \Rightarrow$

$f^{-1}(b) = \arctan b = \arctan(\tan a) = a$

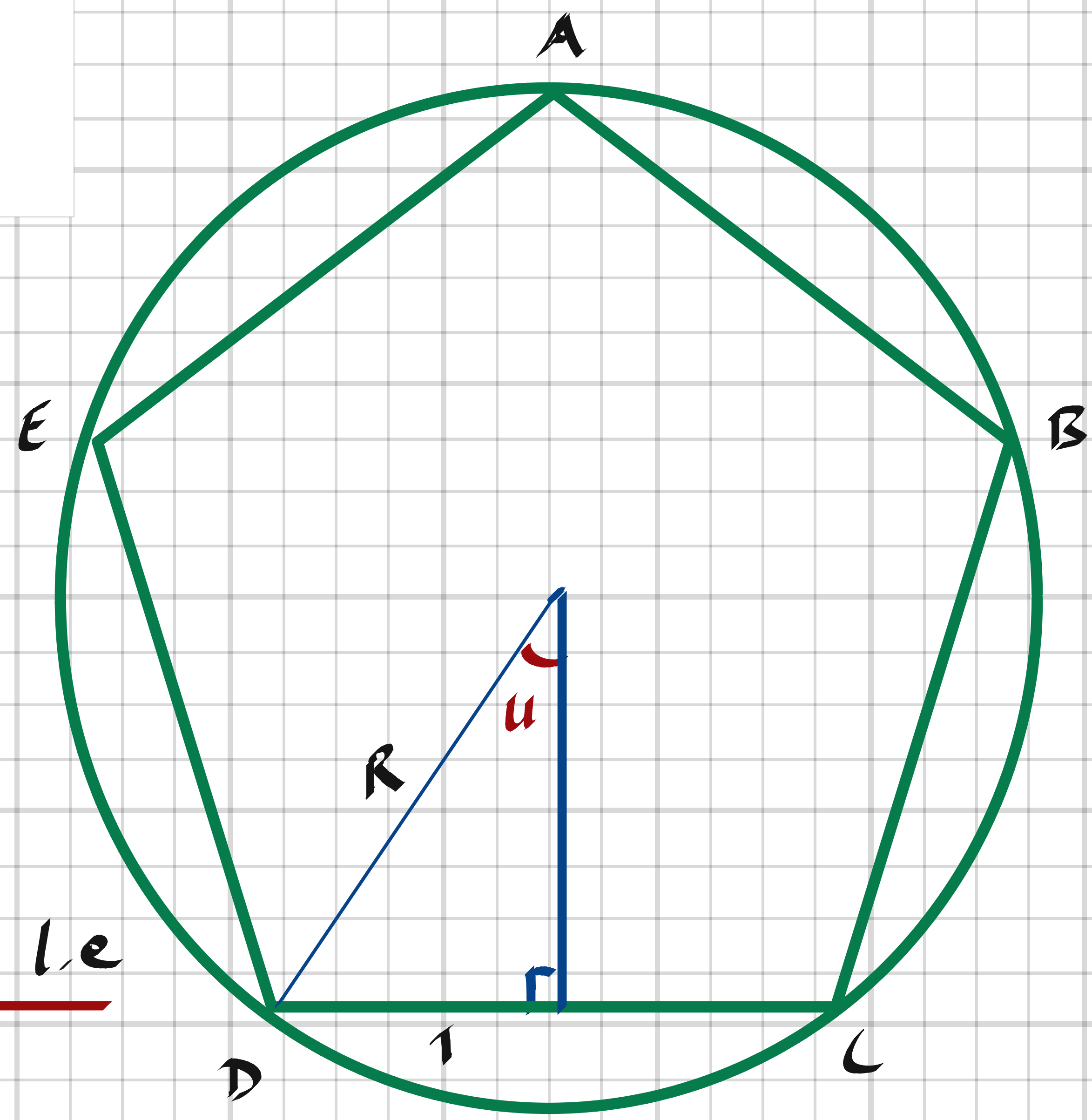
6165 I regelbundna månghörningar är alla sidor och alla vinklar lika stora. *ABCDE* är en regelbunden femhörning med sidlängden 2,0 l.e.



a) Bestäm cirkelns radie med hjälp av trigonometriska samband.

b) Vilken radie har en cirkel som omskriver en regelbunden sexhörning med sidlängden 2,0 l.e.?

6165.



a)

$$u = \frac{360^\circ}{2 \cdot 5} = 36^\circ$$

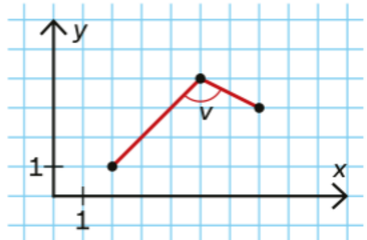
$$R = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{\sin 36^\circ} \approx \underline{1{,}7 \text{ l.e}}$$

b)

$$u = \frac{360^\circ}{2 \cdot 6} = 30^\circ$$

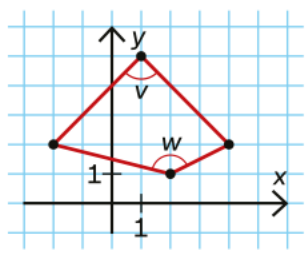
$$R = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \underline{2 \text{ l.e.}}$$

6171 Beräkna vinkeln v.



6171. $v = \arctan\frac{3}{3} + \arctan\frac{2}{1} \approx 45° + 63.4° = \underline{108{,}4°}$

6172 Beräkna vinklarna v och w i fyrhörningen.



6172. $v = 2 \cdot \arctan\frac{3}{3} = 2 \cdot 45° = \underline{90°}$

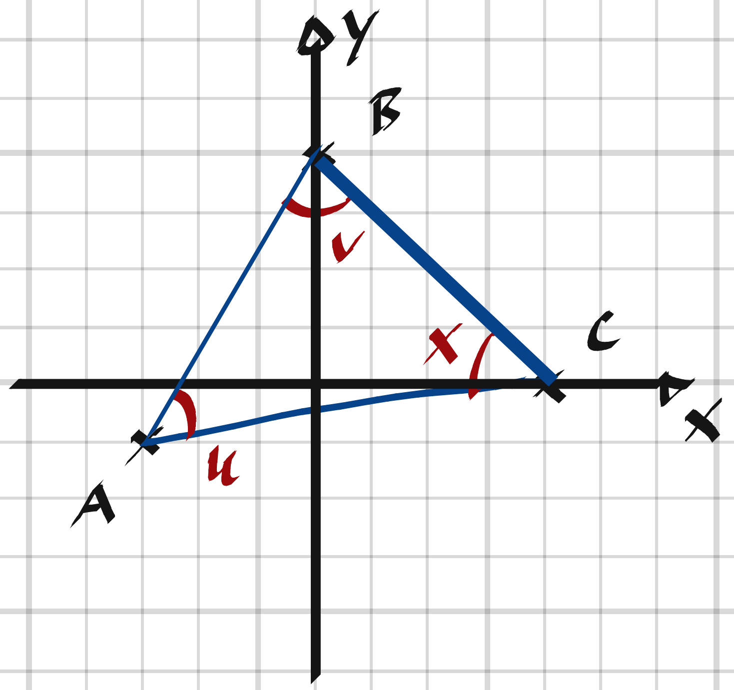
$w = \arctan\frac{4}{1} + \arctan\frac{2}{1} \approx 76.0° + 63.4° = \underline{139{,}4°}$

6173 Konstruera en uppgift där man ska beräkna längden av en sträcka som går mellan två punkter som ligger i olika kvadranter. Svaret ska vara 17 längdenheter.

6173. Bestäm längden av sträckan mellan punkterna (−3, 4) och (14, 4).

6174 Bestäm alla vinklar i triangeln ABC, där hörnens koordinater är $A = (-3, -1)$, $B = (0, 4)$ och $C = (4, 0)$.

6174.



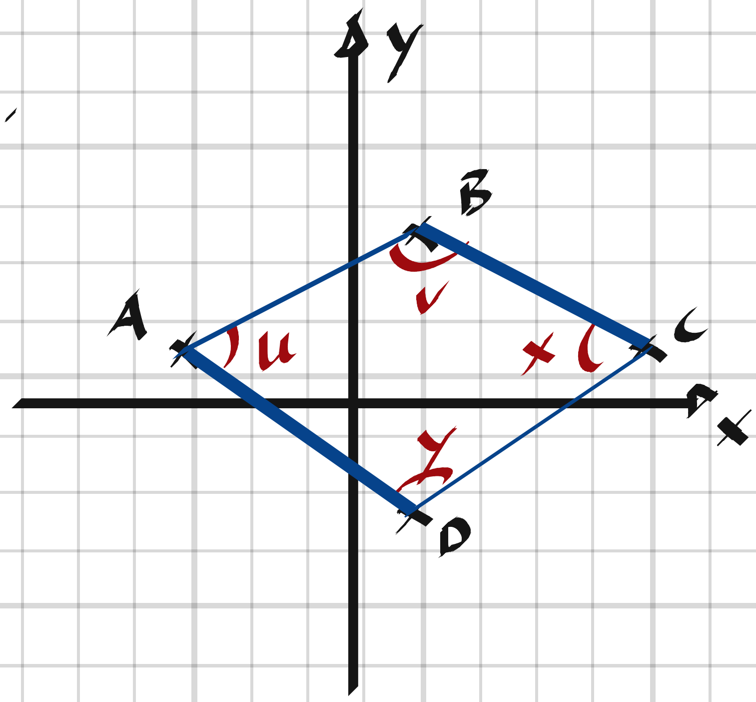
$u = \arctan\frac{5}{3} - \arctan\frac{1}{7} \approx \underline{50,9°}$

$v = \arctan\frac{3}{5} + \arctan\frac{4}{4} \approx \underline{76,0°}$

$C = 180° - u - v \approx 180° - 50,9° - 76,0° = \underline{53,1°}$

6175 Bestäm alla vinklar och sidor i en fyrhörning, där hörnens koordinater i det rätvinkliga koordinatsystemet är $A = (-3, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (5, 1)$ och $D = (1, -2)$.

6175.



Vinklar

$$u = \arctan\frac{2}{4} + \arctan\frac{3}{4} \approx \underline{63.4^\circ}$$

$$v = 2\cdot\arctan\frac{4}{2} \approx \underline{126.9^\circ}$$

$$x = \arctan\frac{2}{4} + \arctan\frac{3}{4} \approx \underline{63.4^\circ}$$

$$y = 360^\circ - u - v - x \approx \underline{106.3^\circ}$$

Sidor

$$\vec{AB} = (1-(-3), 3-1) = (4,2) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{4^2+2^2} = \underline{\sqrt{20}\ \text{l.e.}}$$

$$\vec{BC} = (5-1, 1-3) = (4,-2) \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{4^2+2^2} = \underline{\sqrt{20}\ \text{l.e.}}$$

$$\vec{CD} = (1-5, -2-1) = (-4,-3) \Rightarrow |\vec{CD}| = \sqrt{4^2+3^2} = \underline{5\ \text{l.e.}}$$

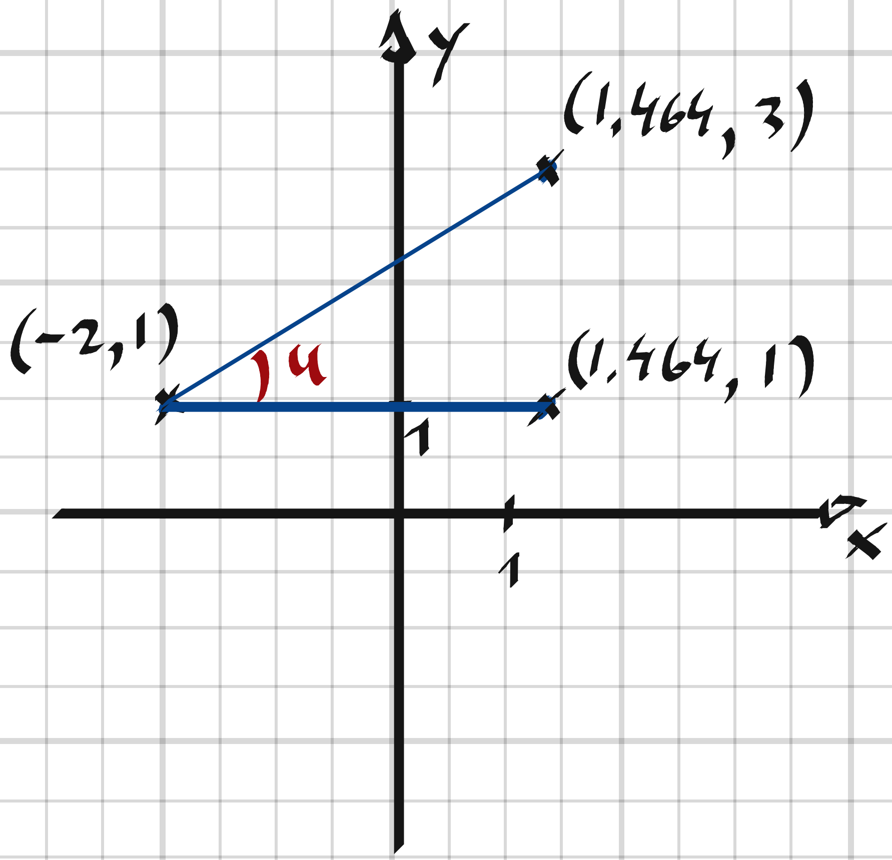
$$\vec{DA} = (-3-1, 1-(-2)) = (-4,3) \Rightarrow |\vec{DA}| = \sqrt{4^2+3^2} = \underline{5\ \text{l.e.}}$$

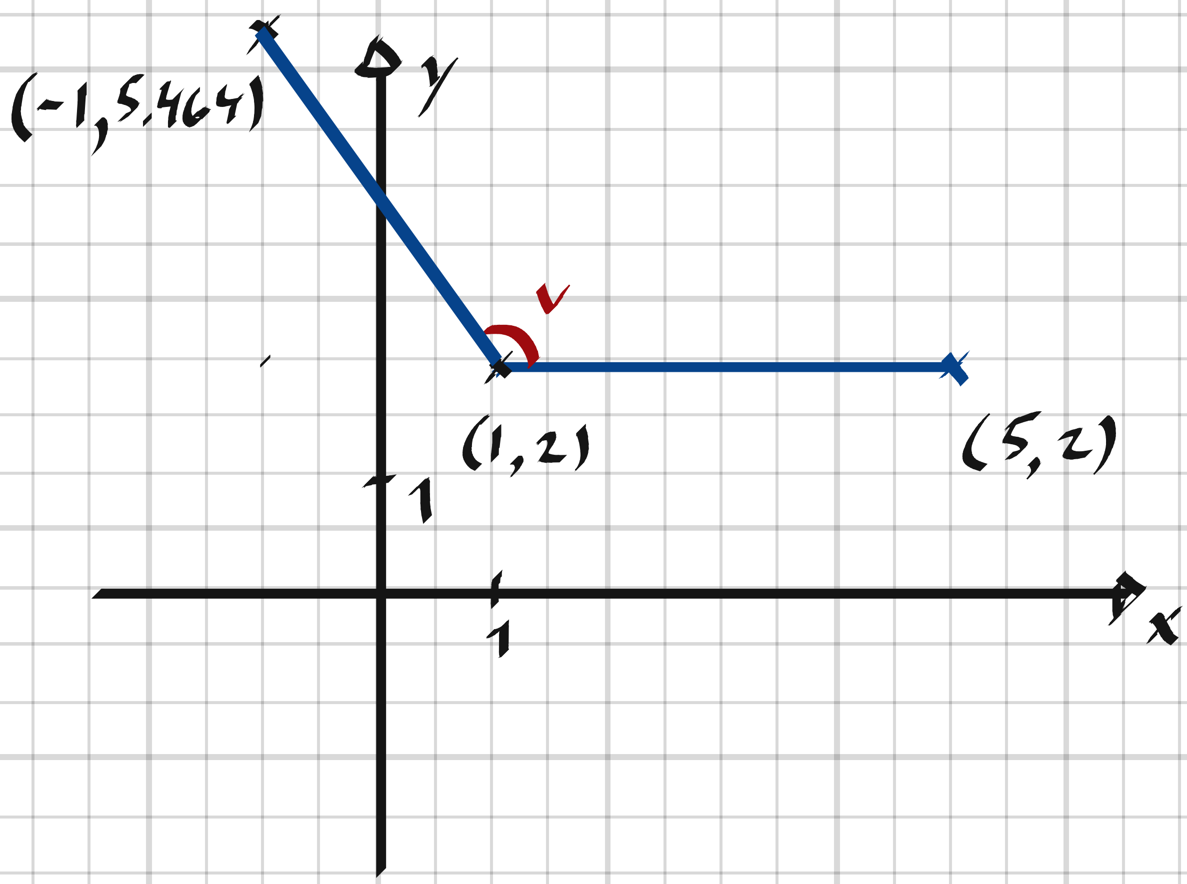
6176 Konstruera en uppgift där man ska bestämma vinkeln mellan två sträckor i ett koordinatsystem och där svaret är

a) 30°

b) 120°

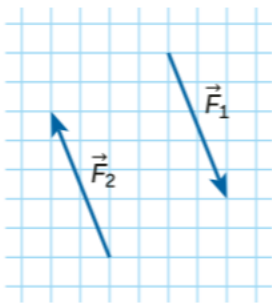
6176.





Bestäm vinklarna u och v.

6214 Vad kan man säga om krafterna $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$ i förhållande till varandra?



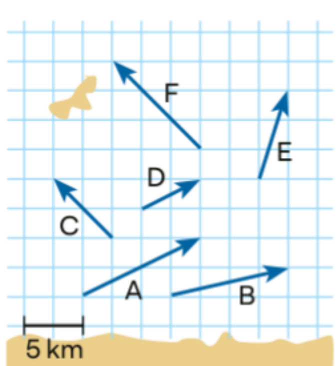
6214. De är lika långa och motåtriktade.

6215 Är det möjligt att rita fyra vektorer som uppfyller följande villkor samtidigt? Motivera ditt svar.

A Alla vektorer är parallella
B Tre av vektorerna är lika långa
C Endast två av vektorerna är lika
D Det finns inga motsatta vektorer

6215. Nej, om både A, B och D ska vara uppfyllda uppfylls inte villkor C.

6216 Figuren visar hur läget hos sex fartyg på Skagerrak har ändrats den senaste timmen.



a) Bestäm storleken på medelhastigheten hos fartyg F.

b) Vilka fartyg har färdats i samma riktning?

c) Vilket fartyg har färdats snabbast under den senaste timmen?

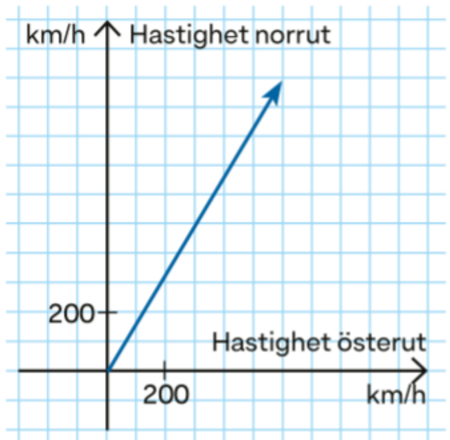
6216.

a) $v_m = \frac{|\bar{F}|}{t} = \frac{7{,}5 \cdot \sqrt{2}}{1} \approx 11$ km/h

b) A och D samt C och F

c) Fartyg A

6217 Ett flygplan på väg rakt norrut påverkas plötsligt av en kraftig västlig vind och ändrar färdriktning. Vektorn i figuren beskriver hastigheten hos flygplanet i den kraftiga vinden.



a) Beräkna flygplanets fart med hjälp av figuren.

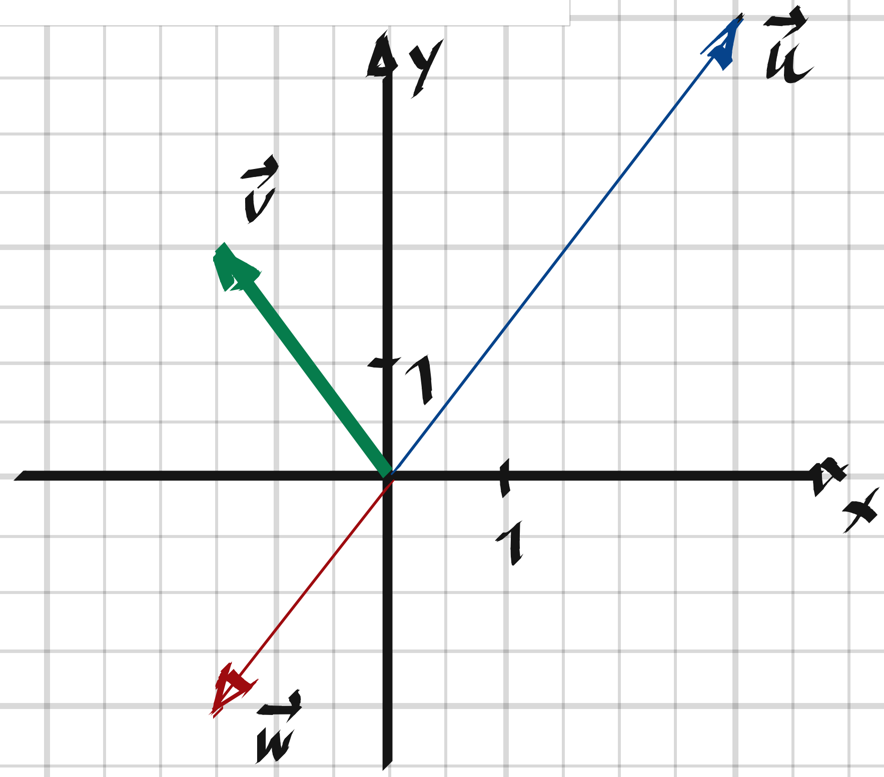
b) Koordinatsystemets y-axel pekar rakt norrut. Beräkna vinkeln mellan planets färdriktning och nordlig riktning.

6217. a) Farten $= \sqrt{600^2 + 1000^2} \approx 1200$ km/h

b) Vinkeln $= \arctan \frac{600}{1000} \approx 31°$

6218 Vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ utgår från origo i ett rätvinkligt koordinatsystem. Slutpunkten av $\vec{u}$ är punkten (3, 4), slutpunkten av $\vec{v}$ är (−3, 4) och slutpunkten av $\vec{w}$ är (−3, −4). Är några av vektorerna lika? Motivera ditt svar.

6218.

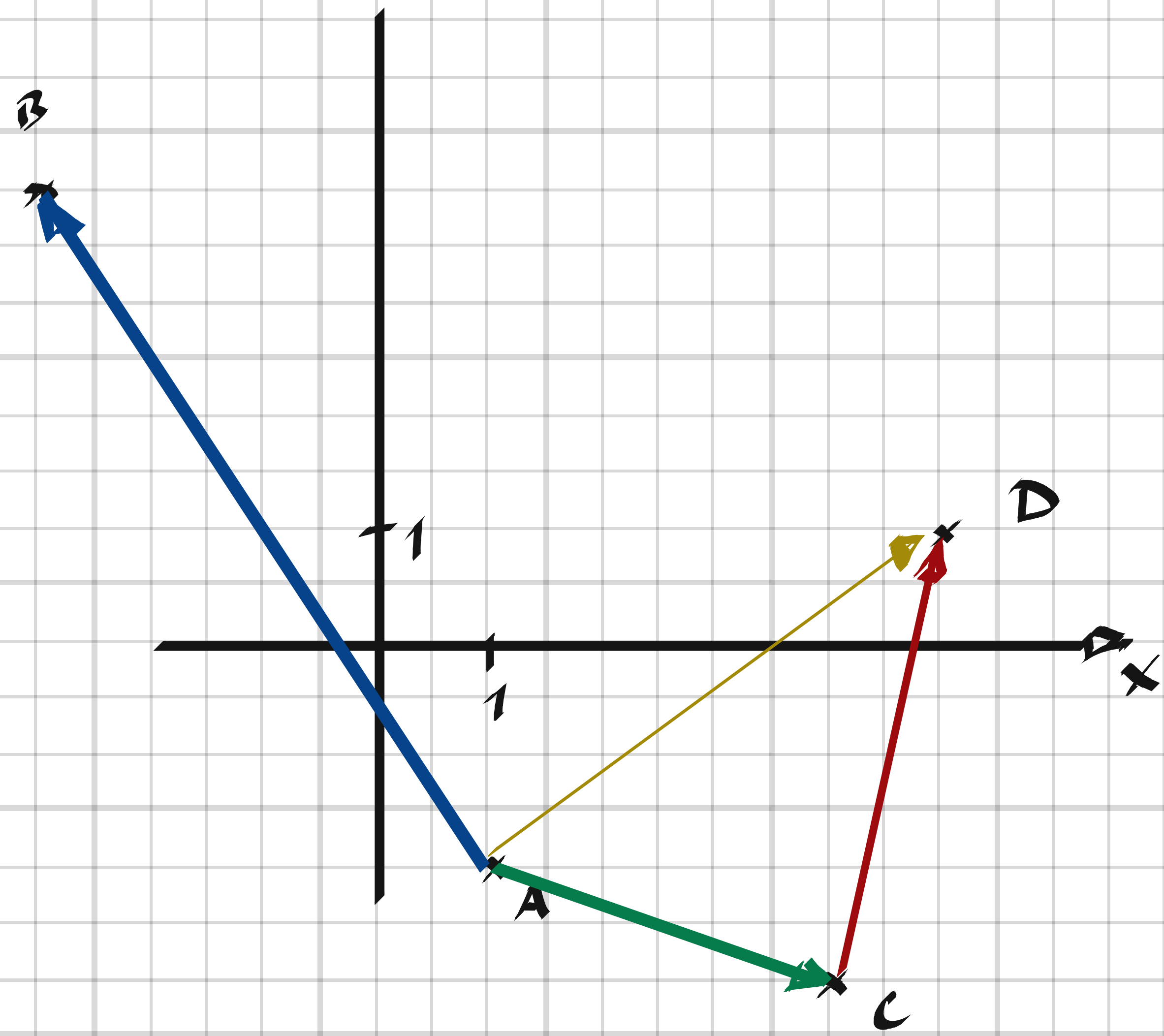


$\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika långa, men har olika riktning

---

6219 Mellan punkterna $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$, $C(4, -3)$ och $D(5, 1)$ i ett koordinatsystem, ritar vi fyra vektorer: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ respektive $\overrightarrow{AD}$. Bestäm längden på den kortaste respektive längsta vektorn av dessa. Svara exakt.

6219.



$$|\overrightarrow{AB}| = |B - A| = |(-3, 4) - (1, -2)| = |(-4, 6)| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \text{ l.e.}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |C - A| = |(4, -3) - (1, -2)| = |3, -1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ l.e.}$$

6220 Punkterna *A*, *B*, *C* och *D* utgör hörn i rektangeln *ABCD*. Vilka av vektorerna

A $\overrightarrow{AB}$

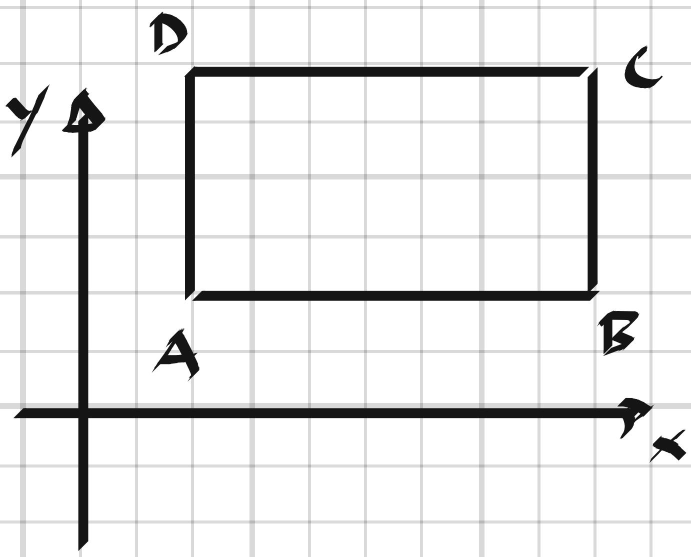
B $\overrightarrow{CA}$

C $\overrightarrow{CD}$

D $\overrightarrow{AD}$

a) kan ha samma längd

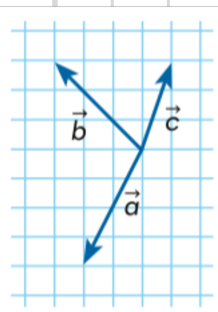
b) kan vara lika



6220. a) Alla utom B (om rektangeln är en kvadrat)

b) Ja, om $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (A och B omkastade jmf med figuren)

6227 Utför räkneoperationen $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ och visa resultatet med hjälp av vektorerna i figuren.

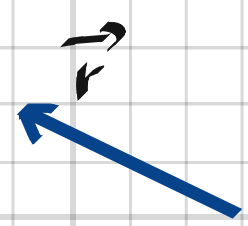


6227. $\vec{a} = (-2,-4)$

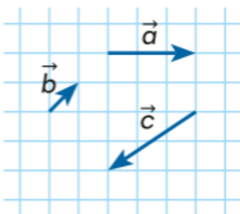
$\vec{b} = (-3,3)$

$\vec{c} = (1,3)$

$\vec{r} = (-2,-4) + (-3,3) + (1,3) = (-4,2) \Rightarrow$

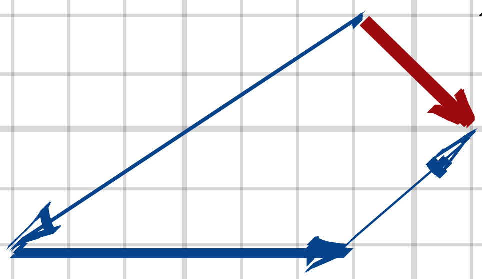


6228 Rita vektorn $\vec{r}$ där $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



$\vec{r} = (3,0) + (1,1) + (-3,-2) = (1,-1)$

6228.



$\vec{r} = (1,-1)$

6229 Rita två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som uppfyller villkoret $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, dvs. att längden av $\vec{u} + \vec{v}$ är lika med längden av $\vec{u}$ plus längden av $\vec{v}$.

6229.

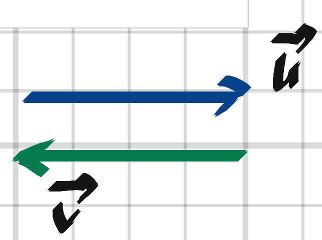
6230 Rita tre vektorer $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ som uppfyllller följande villkor

a) $|\vec{u} + \vec{v}| = 0$

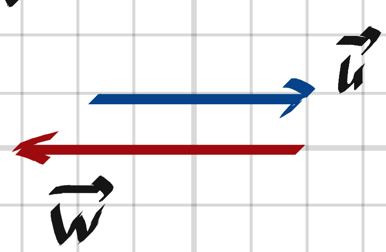
b) $|\vec{u} + \vec{w}| < |\vec{u}|$

6230.

a)



b)



6231 Längden av $\vec{u}$ är 3 och längden av $\vec{v}$ är 4. Är det möjligt att längden av $\vec{u} + \vec{v}$ blir lika med 8? Motivera ditt svar.

6231. Nej, längden av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ kan som högst bli 7 l.e.

6232 Vilka ord eller beteckningar saknas i nedanstående text?

a) ”Varje vektor kan delas upp i minst … komposanter.”

b) ”Vektorn $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ pekar från … av … mot spetsen av …”

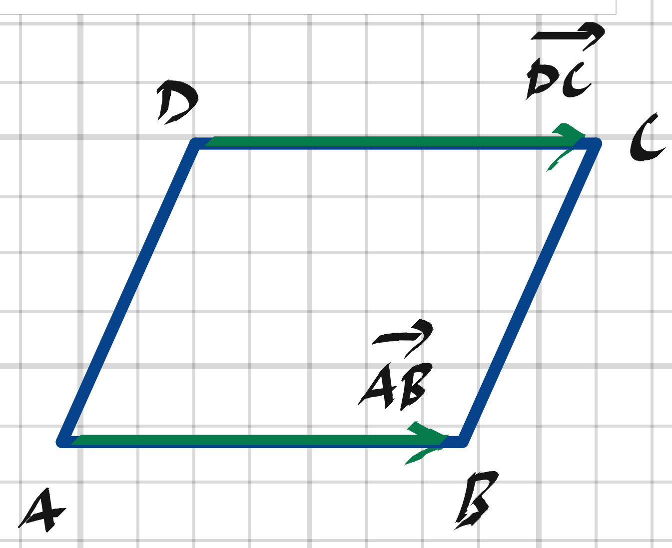
6232.

a) Varje vektor kan delas upp i minst två komposanter.

b) Vektor $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ pekar från roten av $\vec{a}$ mot spetsen av $\vec{b}$.

6233 Visa att om $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i fyrhörningen $ABCD$, så är $ABCD$ en parallellogram.

6233.



6234 Visa att om I betecknar mitten av sträckan AB och M är en godtycklig punkt i planet, så gäller likheten $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

6234.

$$A = (x_A, y_A) \quad , \quad B = (x_B, y_B) \quad , \quad M = (x, y)$$

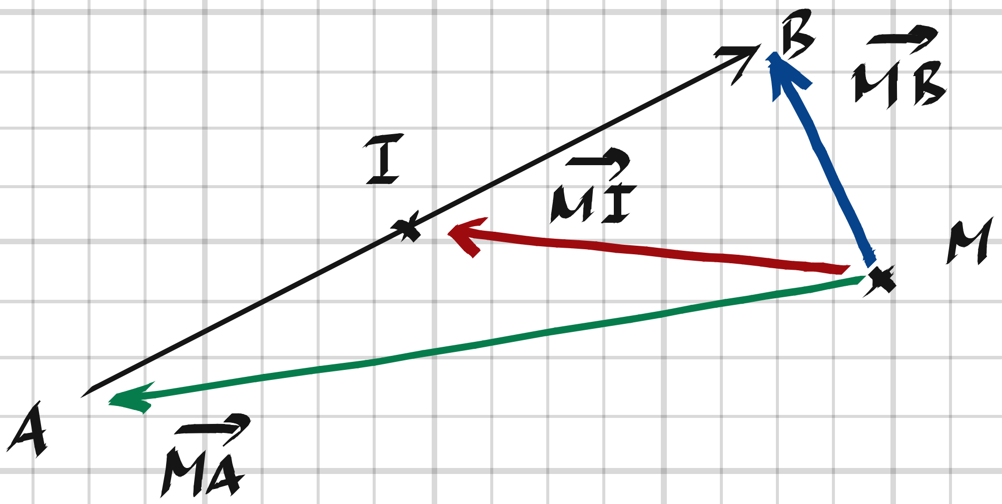
$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

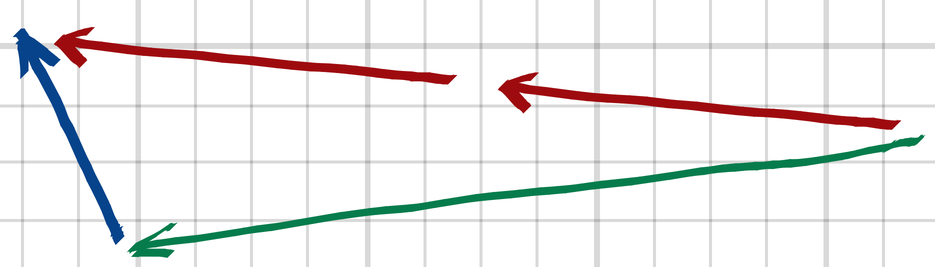
$$VL = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (x_A - x, y_A - y) + (x_B - x, y_B - y) =$$

$$= (x_A + x_B - 2x, y_A + y_B - 2y)$$

$$HL = 2\overrightarrow{MI} = 2 \cdot \left(\frac{x_A + x_B}{2} - x, \frac{y_A + y_B}{2} - y\right) =$$

$$(x_A + x_B - 2x, y_A + y_B - 2y) = VL \qquad \#$$





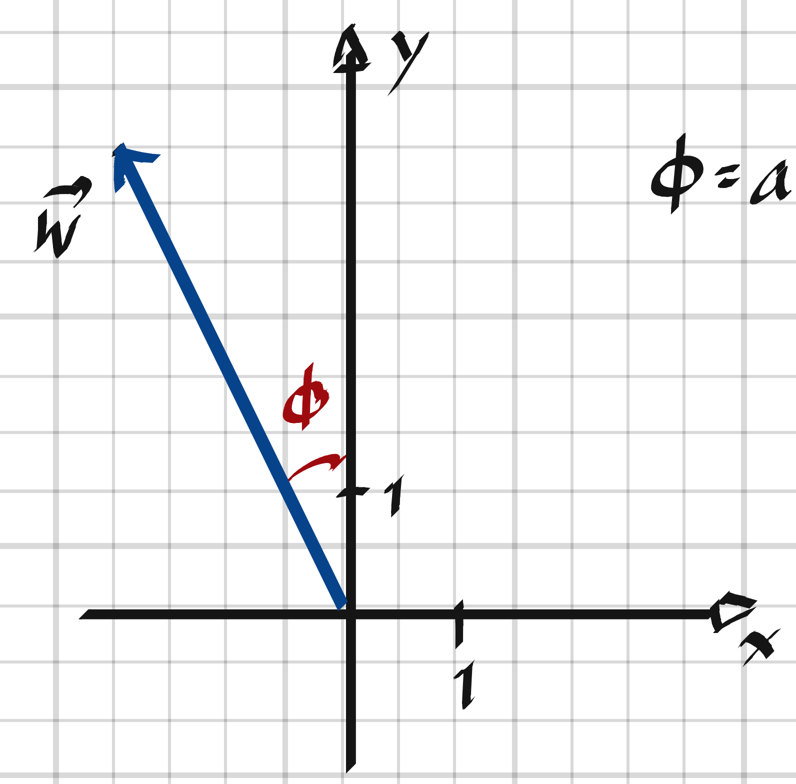
6240 Vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ utgår från punkten (2, 3) i det rätvinkliga koordinatsystemet. Slutpunkten av $\vec{u}$ är i punkten (5, 3) medan slutpunkten av $\vec{v}$ är i (3, 7). Vektorn $\vec{w}$ representerar subtraktionen $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$. Beräkna vinkeln mellan $\vec{w}$ och y-axeln.

6240.

$$\vec{u} = (5-2, 3-3) = (3, 0)$$

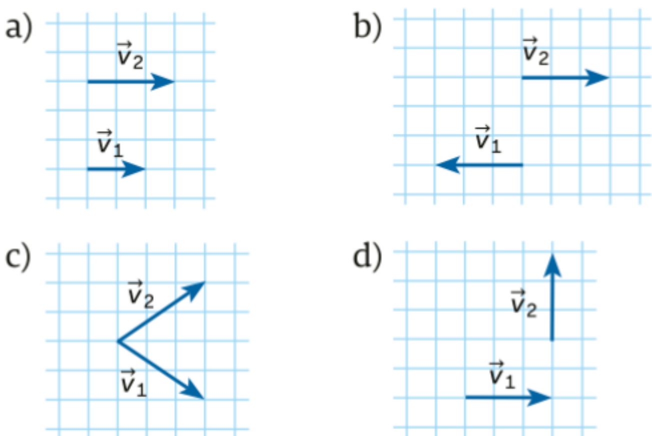
$$\vec{v} = (3-2, 7-3) = (1, 4)$$

$$\vec{w} = (1,4) - (3,0) = (-2, 4)$$



$$\phi = \arctan \frac{2}{4} \approx \underline{26.6^\circ}$$

6241 Differensen mellan två vektorer $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_1$ kallas ofta för $\Delta\vec{v}$. Rita $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ i följande fall.



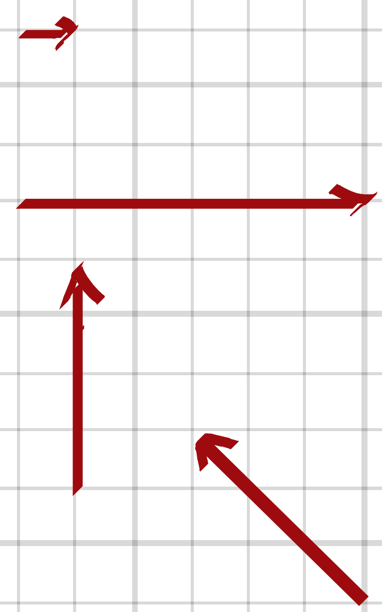
6241.

a) $\Delta\vec{v} = (3,0) - (2,0) = (1,0)$

b) $\Delta\vec{v} = (3,0) - (-3,0) = (6,0)$

c) $\Delta\vec{v} = (3,2) - (3,-2) = (0,4)$

d) $\Delta\vec{v} = (0,3) - (3,0) = (-3,3)$



6242 Hefi och Anna har fått i uppgift att beräkna differensen av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i koordinatsystemet. Vektorn $\vec{a}$ har sin startpunkt i origo och slutpunkt i (−3, 2), medan $\vec{b}$ har sin startpunkt i (0, −3) och slutpunkt i (5, 11). De får två olika vektorer som resultat, men kontrollräkningen visar att de inte har gjort några räknefel. Ge en tänkbar förklaring till att deras resultat är olika.

6242.

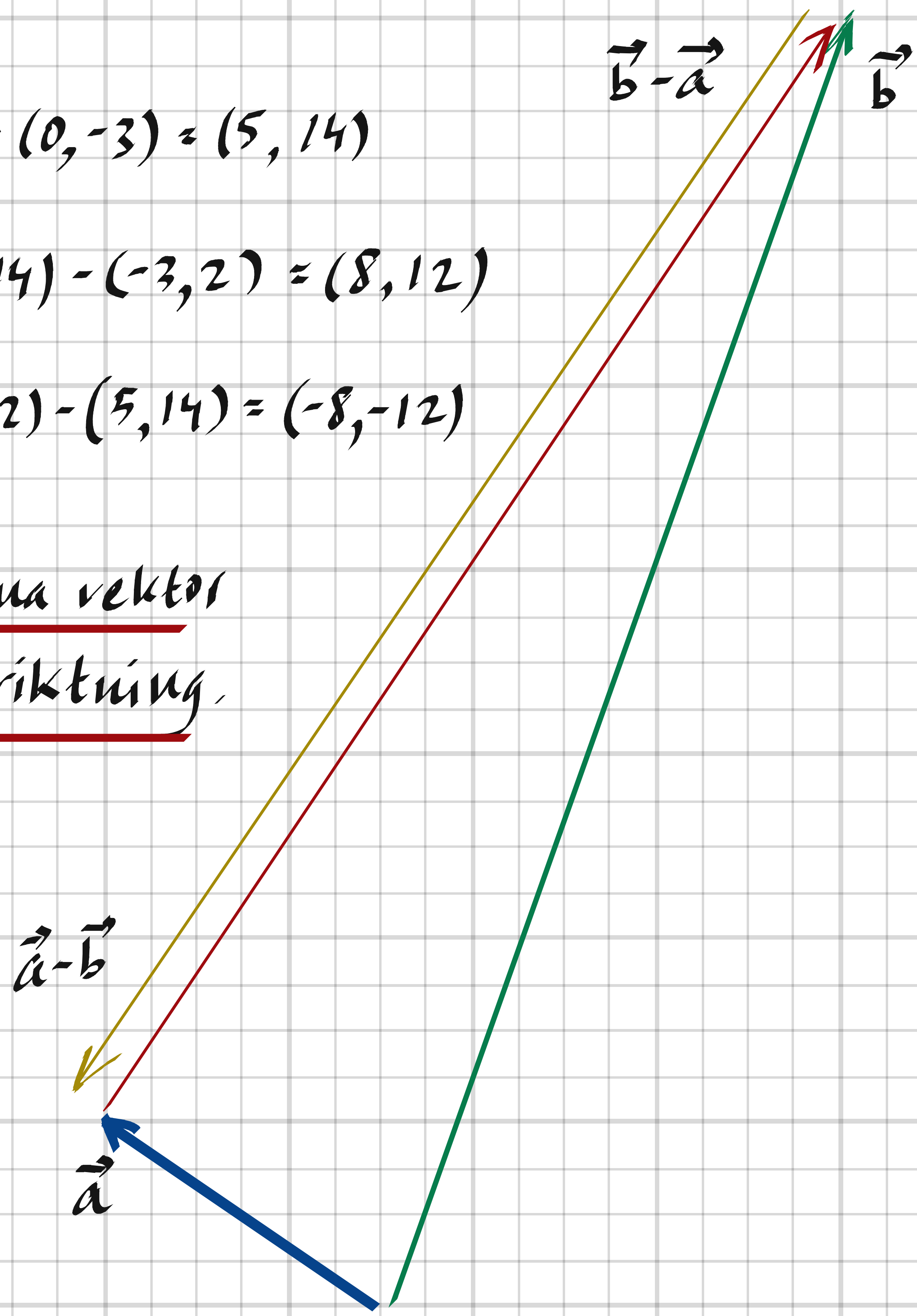
$\vec{a} = (-3, 2)$

$\vec{b} = (5, 11) - (0, -3) = (5, 14)$

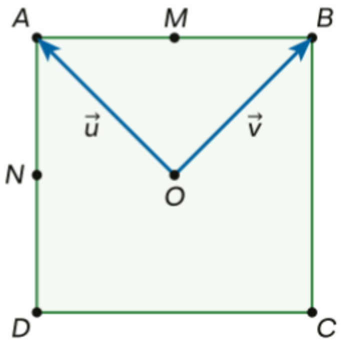
$\vec{b} - \vec{a} = (5, 14) - (-3, 2) = (8, 12)$

$\vec{a} - \vec{b} = (-3, 2) - (5, 14) = (-8, -12)$

De kan ha fått samma vektor fast med omvänd riktning.



6243 I figuren är $ABCD$ en kvadrat och vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ utgår från kvadratens mittpunkt O. Punkterna M och N är mittpunkter på sidorna AB respektive AD.



Bestäm följande vektorer med hjälp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

a) $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{OM}$

d) $\overrightarrow{ON}$

6243.

a) $\overrightarrow{AC} = \underline{-2\vec{u}}$

b) $\overrightarrow{AB} = \underline{\vec{v} - \vec{u}}$

c) $\overrightarrow{OM} = \underline{\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})}$

d) $\overrightarrow{ON} = \underline{\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})}$

6253 Komposanterna $\vec{v}_x$ och $\vec{v}_y$ är vinkelräta mot varandra, $|\vec{v}_x| = 8$ l.e. och $|\vec{v}_y| = 3$ l.e. Beräkna längden av $\vec{v}$ om $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.

6253. $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 \Rightarrow$

$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \underline{\sqrt{73} \text{ l.e.}}$

6254 Vektorerna $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ och $\vec{w} = (-3, -4)$ befinner sig i ett rätvinkligt koordinatsystem. Är några av vektorerna lika? Motivera ditt svar.

6254. Alla tre är lika långa men har olika riktning.

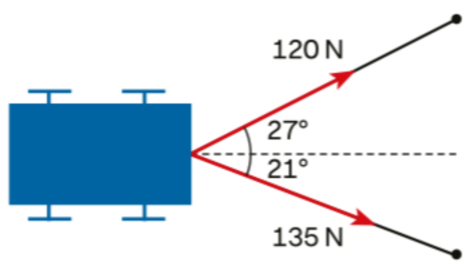
6255 Bestäm vinkeln mellan x-axeln och vektorn

a) $\vec{u} = (3, 7)$ b) $\vec{v} = (12, 3)$

6255. a) $\phi = \arctan \frac{7}{3} \approx \underline{66.8^\circ}$

b) $\phi = \arctan \frac{3}{12} \approx \underline{14.0^\circ}$

6256 Ylva och Axel drar vagnen med var sitt rep och med olika kraft. Hur stor kraft kommer att verka rakt fram?

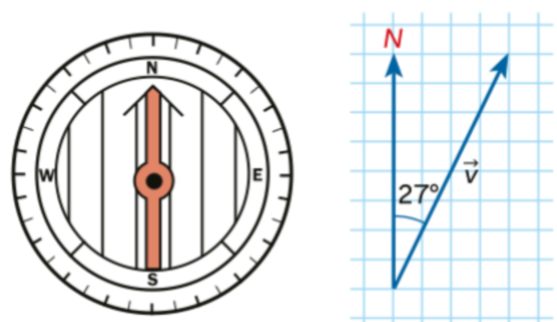


6256. $F_x = 120 \cdot \cos 27^\circ + 135 \cdot \cos 21^\circ \approx \underline{230 \text{ N}}$

6257 Konstruera en uppgift till dina kamrater som handlar om subtraktion mellan två vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ som är angivna i koordinatform. I uppgiftens lösning ska de beräkna differensen samt ange differensens riktning med avseende på $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

6257. Beräkna differensen mellan vektorerna $\vec{u} = (-7,2)$ och $\vec{v} = (4,5)$ både algebraiskt och grafiskt.

6258 Ett flygplans hastighet kan beskrivas med vektorn $\vec{v}$ med storleken 720 km/h.



a) Bestäm storleken av komposanten som pekar i nordlig riktning.

b) Hur ändras hastighetsvektorn om komposanten i ostlig riktning halveras medan den i nordlig riktning är oförändrad?

6258. $|\vec{v}| = 720$ km/h

a) $|\vec{v_y}| = |\vec{v}| \cdot \cos 27° = \underline{640 \text{ km/h}}$

b) $v_{2x} = \frac{1}{2} \cdot 720 \cdot \sin 27° = 163$

$v_{2y} = 720 \cdot \cos 27° = 642$

$\phi = \arctan \frac{163}{642} = 14°$

$|\vec{v_2}| = \sqrt{163^2 + 642^2} = \underline{660 \text{ km/h}}$

6259 Om $k \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{u}$ (där k och m är skalärer), så betyder det att vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{u}$ parallella. Vilken eller vilka av följande vektorer är parallella med $\vec{v} = (12, 4)$?

A $\vec{a} = (12, -4)$ **B** $\vec{b} = (3, 1)$
C $\vec{c} = (16, 8)$ **D** $\vec{d} = (-3, -1)$

6259. $k \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = p \cdot \vec{u}$, där $p = \frac{m}{k}$

B $\left(p = \frac{1}{4}\right)$

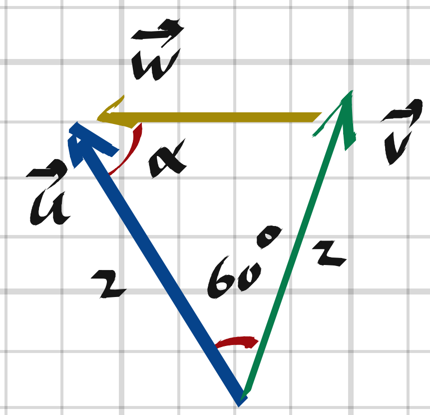
D $\left(p = -\frac{1}{4}\right)$

6260 Vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ har samma utgångspunkt och har båda längden 2 l.e. Vinkeln mellan vektorerna är 60°. Beräkna

a) längden av $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

b) vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{w}$

c) längden av $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

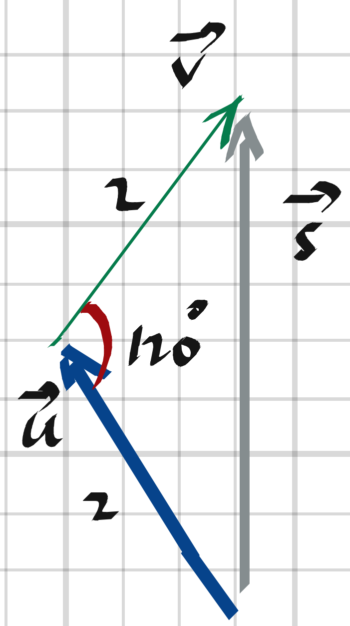


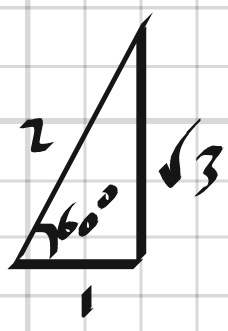
6260.

a) $|\vec{w}| = 2$ l.e. (bildar en liksidig triangel)

b) $\alpha = 60°$

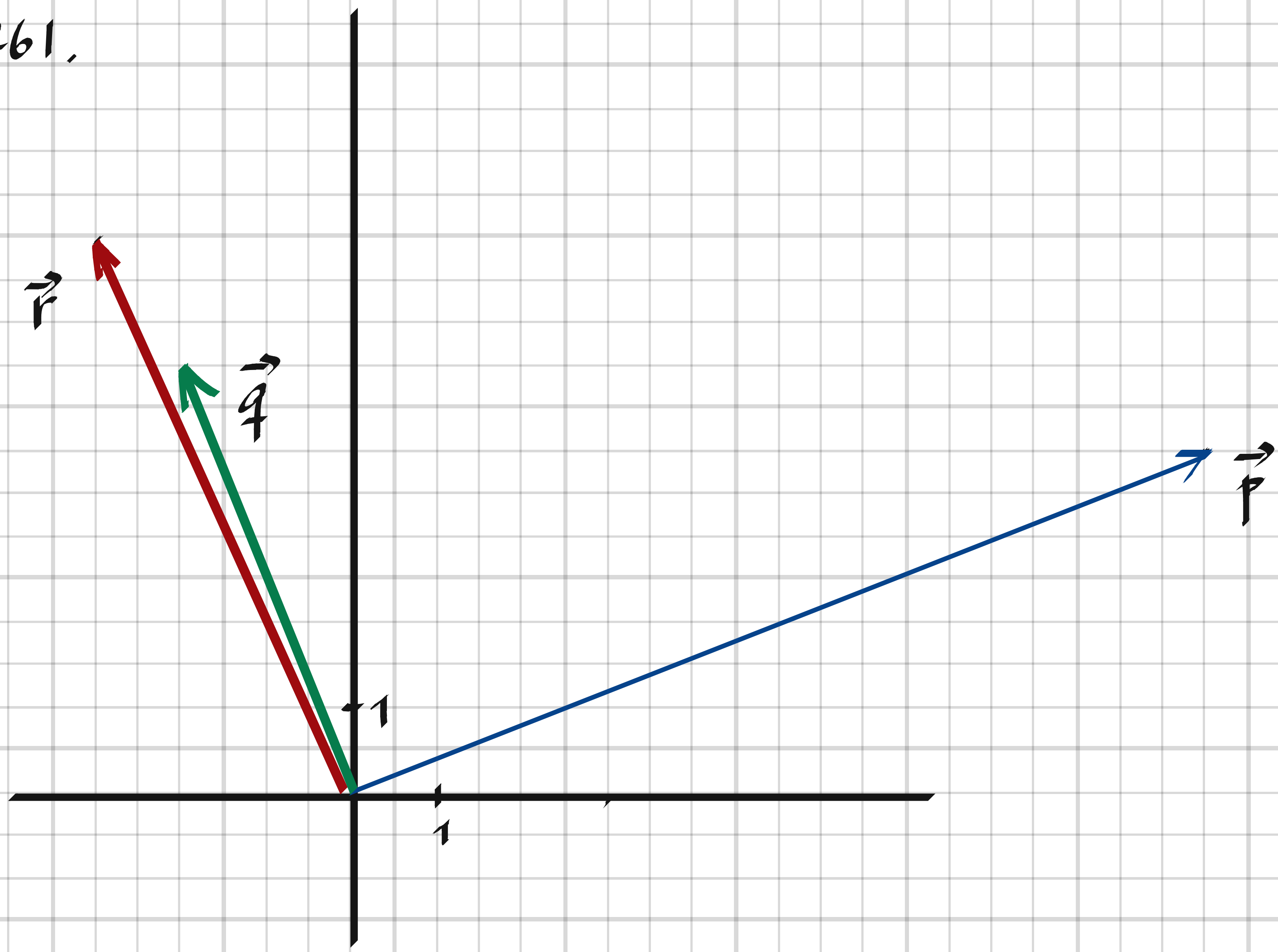
c) $|\vec{s}| = 2\sqrt{3}$ l.e.





6261 Avgör om vektorn $\vec{p} = (10, 4)$ är vinkelrät mot någon av vektorerna $\vec{q} = (-2, 5)$ och $\vec{r} = (-3, 7)$.

6261.



Om $\frac{p_y}{p_x} = -\frac{q_x}{q_y} \Rightarrow \vec{p}$ och $\vec{q}$ vinkelräta.

$\frac{4}{10} = -\frac{-2}{5} \Rightarrow$ Ja, $\vec{p}$ och $\vec{q}$ är vinkelräta

Om $\frac{p_y}{p_x} = -\frac{r_x}{r_y} \Rightarrow \vec{p}$ och $\vec{r}$ vinkelräta.

$\frac{4}{10} \neq -\frac{-3}{7} \Rightarrow$ Nej, $\vec{p}$ och $\vec{r}$ är ej vinkelräta

Not: Kan också kontrolleras m h a skalärprodukten som definieras som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Om skalärprodukten $= 0$ så är vektorerna vinkelräta.

ex. $\vec{p} \cdot \vec{q} = (10,4) \cdot (-2,5) = 10 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 0$

6262 Låt A, B, C och D beteckna fyra punkter. Visa att om $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, så är $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

6262.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$\overrightarrow{DC} = (x_C - x_D, y_C - y_D)$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A)$$

$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_B - x_A = x_C - x_D \Rightarrow x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_B - y_A = y_C - y_D \Rightarrow y_D - y_A = y_C - y_B \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

#

6263 a) Ge exempel på två vektorer med olika placeringar i koordinatsystemet som kan skrivas som summan $3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$, där $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$ är basvektorer med längden 1, parallella med koordinataxlarna.

b) Kan det finnas två olika vektorer som har summan $3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$ i det rätvinkliga koordinatsystemet? Motivera ditt svar.

6263. a+b)

Det finns bara en vektor $3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y = (3,5)$ oavsett var den är placerad i koordinatsystemet

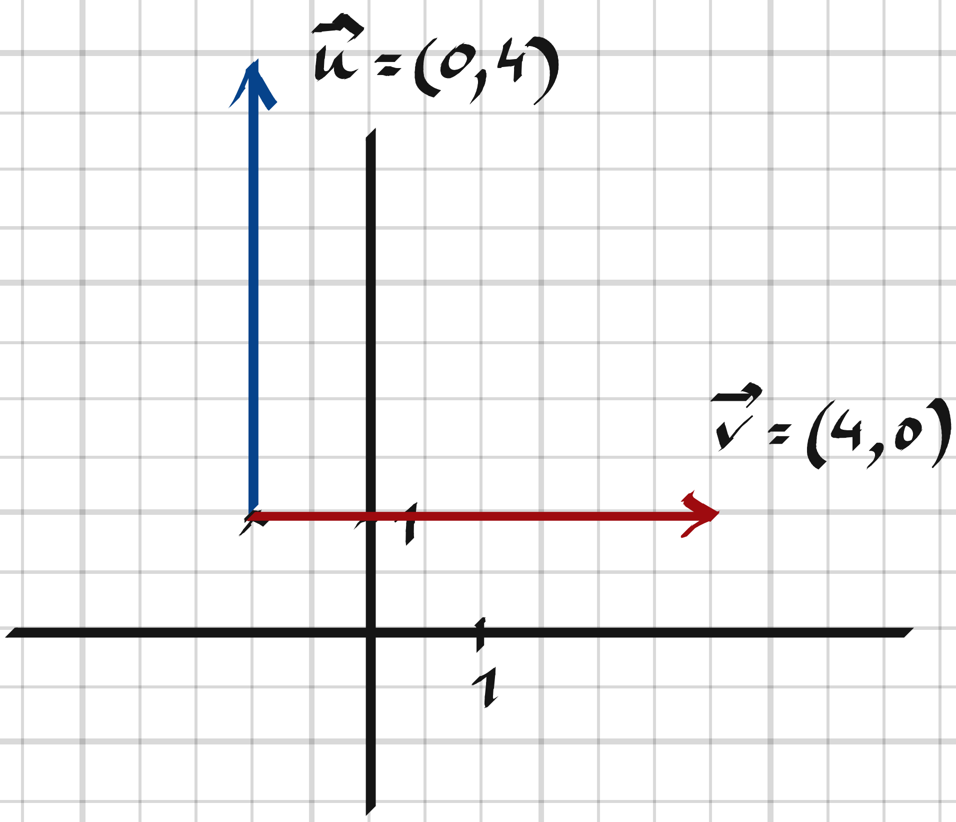
---

6270 Låt $\vec{v} = (x, y)$ vara en godtycklig vektor. Förklara varför $|\vec{v}| \geq 0$ utifrån formeln $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

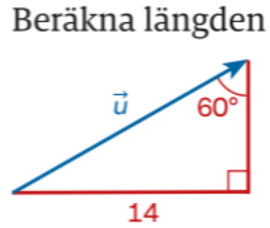
6270. $|\vec{v}|$ representerar längden av vektorn oberoende av riktning.

6271 Rita två olika vektorer i ett koordinatsystem som har längden 4 l.e. och är vinkelräta mot varandra. Båda vektorernas startpunkt ska vara punkten (–1, 1).

6271.



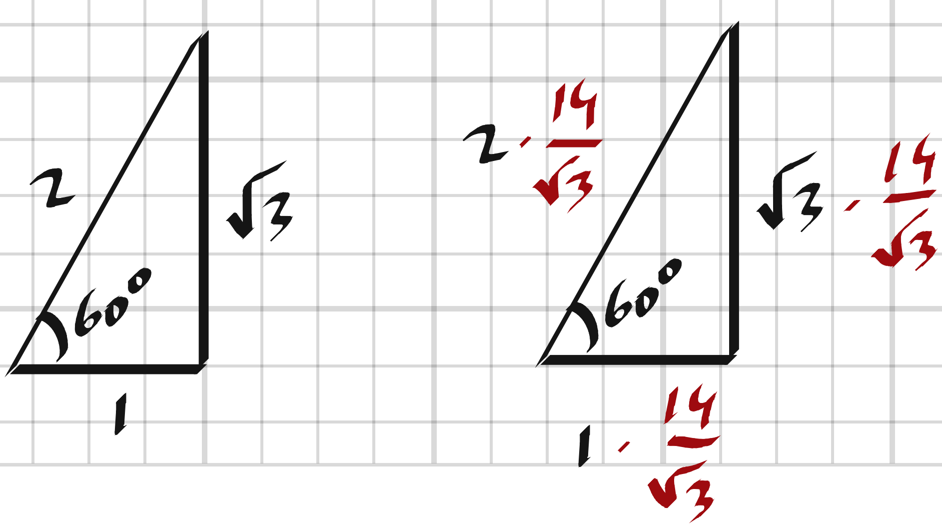
6272 Beräkna längden av vektorn $\vec{u}$ i figuren.



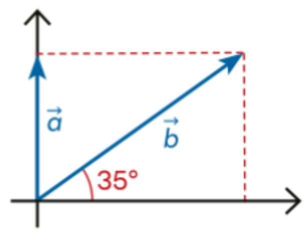
6272.

Exakt värde: $|\vec{u}| = \dfrac{14 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{28}{\sqrt{3}}$ l.e.

Närmevärde: $|\vec{u}| = \dfrac{14}{\sin 60^\circ} \approx 16$ l.e.



6273 I figuren är $|\vec{a}| = 5$. Beräkna $|\vec{b}|$.

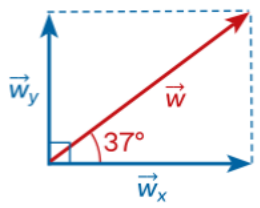


6273. $|\vec{b}| = \dfrac{|\vec{a}|}{\sin 35^\circ} = \dfrac{5}{\sin 35^\circ} \approx 9$ l.e.

6274 Paul och John diskuterar storlek av vektorer. Paul menar att en vektors storlek är beroende av dess längd och av dess riktning, medan John påstår att en vektors storlek endast är beroende av dess längd. Vem har rätt? Motivera ditt svar.

6274. John har rätt.
Storlek och längd motsvarar samma sak.

6275 I figuren här nedanför är $|\vec{w}_y| = 9$. Beräkna längden av vektorn $\vec{w}$.



6275. $|\vec{w}| = \dfrac{|\vec{w}_y|}{\sin 37^\circ} = \dfrac{9}{\sin 37^\circ} \approx 15$ l.e.

6276 Luka har fått i uppgift att i koordinatform ange sju vektorer som har längden 12 l.e. Han får inte använda digitala hjälpmedel och vet inte riktigt hur han ska lösa uppgiften. Visa Luka hur man kan lösa uppgiften utan digitalt hjälpmedel.

6276. En vektor med längden 12 kan skrivas som $12 \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi)$, där φ är vinkeln mot horisontalaxeln.

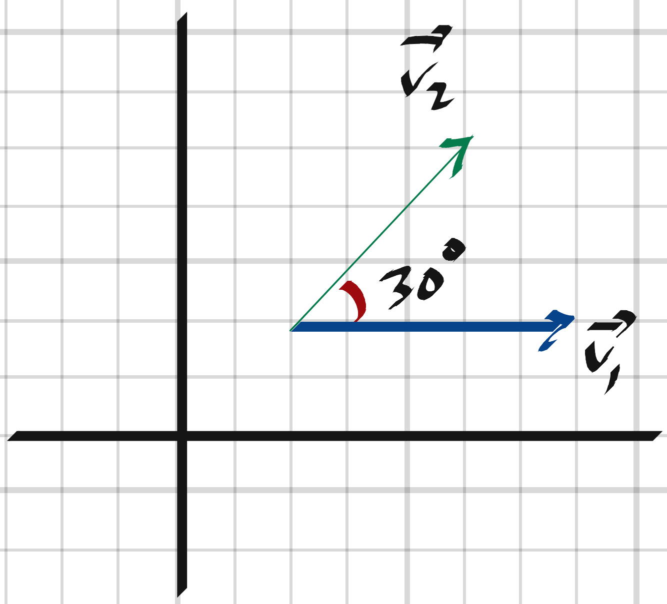
Genom att stoppa in 7 olika värden på φ fås exempelvis vektorerna

$12 \cdot (\cos 1°, \sin 1°)$, $12 \cdot (\cos 2°, \sin 2°)$ osv.

Skrivsättet brukar kallas polär form.

6277 Bestäm i koordinatform två vektorer, $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$, som uppfyller villkoren att $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 8$ och att den spetsiga vinkeln mellan vektorerna är 30°.

6277.



ex. $\vec{v}_1 = (8, 0)$

$\vec{v}_2 = (8 \cdot \cos 30°, 8 \cdot \sin 30°) \approx (6{,}9, 4)$