27 En bagare vill räkna ut vad det kostar att tillverka en chokladboll. I kostnaden räknar bagaren in en arbetskostnad samt kostnaden för ingredienserna. En stor chokladboll som väger 80 g kostar då totalt 8 kr att tillverka.

Många kunder tycker att en sådan chokladboll är för stor. Därför har bagaren även börjat göra små chokladbollar. En liten chokladboll väger 45 g och kostar totalt 6 kr att tillverka.

Bagaren räknar med att det är samma arbetskostnad att tillverka en stor chokladboll som att tillverka en liten chokladboll. Bestäm arbetskostnaden för en chokladboll.

(Np Ma 2c ht 2012)

27. a = arbetskostnaden per chokladboll

x = ingredienskostnaden per stor chokladboll

y = — " — liten —"—

$$\begin{cases} a + x = 8 \\ a + y = 6 \end{cases} \qquad x = \frac{80}{45} \cdot y$$

$$x - y = 2$$

$$\frac{80}{45}y - y = 2$$

$$y = \frac{2}{\frac{80}{45} - 1} \Rightarrow a = 6 - \frac{2}{\frac{80}{45} - 1} \approx \underline{3{,}40 \text{ kr/chokladboll}}$$

28 Vilken eller vilka av informationspunkterna (1) och (2) behöver du för att kunna avgöra om de två vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är lika? Välj bland alternativen A–E.

(1) $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ har samma längd

(2) $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är parallella

A (1) men inte (2)

B (2) men inte (1)

C Både (1) och (2) räcker var för sig

D (1) och (2) tillsammans

E (1) och (2) räcker inte för att lösa uppgiften

28. Alternativ E.

(De kan vara parallella men ha motsatt riktning)

---

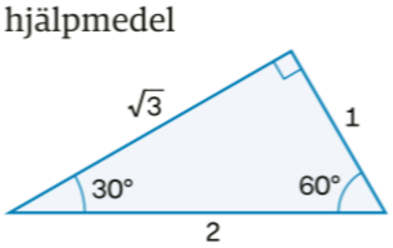
29 Sannolikheten att få en vinstlott i ett lotteri är 1/10. Hur stor är sannolikheten att du får minst en vinstlott om du köper 10 lotter?

29.

$P(\text{minst en vinstlott}) = 1 - P(\text{ingen vinstlott}) = 1 - 0{,}9^{10} = 0{,}651 = 65{,}1\,\%$

---

30 Använd figuren och beräkna utan digitalt hjälpmedel



a) $\sin 30°$ b) $\cos 60°$

c) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

30.

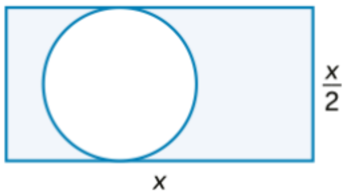
a) $\sin 30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 60° = \frac{1}{2}$

c) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$

d) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$

31 Visa att cirkelns area upptar $\frac{\pi}{8}$ av rektangelns area.



31.

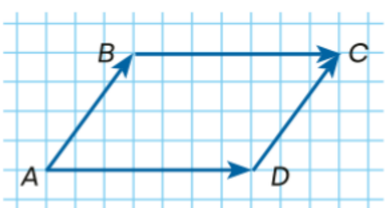
$$A_c = \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi x^2}{16}$$

$$A_R = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{A_c}{A_R} = \frac{\frac{\pi x^2}{16}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\pi}{8} \qquad \#$$

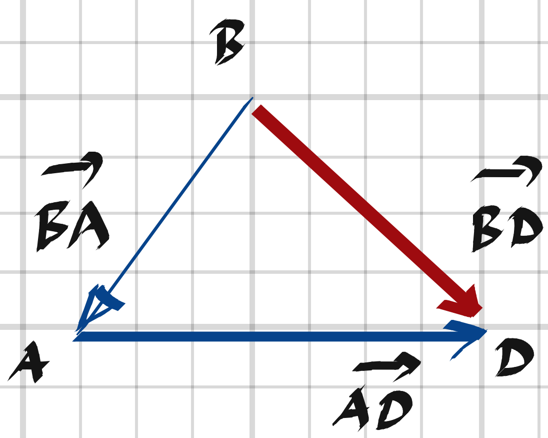
---

32 *ABCD* är en parallellogram där *AB* är parallell med *CD*. Är det sant att $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$? Motivera ditt svar.



32. Ja, det är sant.

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$$



---

33 Vektorerna $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 1)$, $\vec{w} = (1, -2)$ och $\vec{p} = (-1, -2)$ är ritade i ett rätvinkligt koordinatsystem.

a) Vilka av vektorerna är parallella?

b) Vilka av vektorerna har samma längd?

c) Är några av vektorerna lika? Motivera ditt svar.

33. a) $\vec{a}$ och $\vec{b}$ parallella om $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ $\Rightarrow$

$(-1, 2) \neq k \cdot (-2, 1)$

$(-1, 2) = k \cdot (1, -2)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ och $\vec{w}$ parallella

$(-1, 2) \neq k \cdot (-1, -2)$

$(-2, 1) \neq k \cdot (1, -2)$

$(-2, 1) \neq k \cdot (-1, -2)$

$(1, -2) \neq k \cdot (-1, -2)$

b) $\vec{a}$ och $\vec{b}$ har samma längd om $a_x^2 + a_y^2 = b_x^2 + b_y^2$

Alla har samma längd.

c) Inga, ty de har alla olika riktningar.

34 Definitionen av $\tan v$ i rätvinkliga trianglar gäller för spetsiga vinklar. Försök att beräkna tan 90° med hjälp av räknaren.

a) Vilket resultat visar räknaren?

b) Varför gäller inte definitionen för räta vinklar?

34. a) Error.

b) $\tan \alpha = \dfrac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$

Då $\alpha \to 90°$ går $\tan \alpha \to \infty$

---

35 Sanna lånar 45 000 kr för att köpa en cello. Årsräntan på lånet är 8 % och amorteringstiden är 5 år. Amorteringen sker månadsvis.

a) Hur mycket ska Sanna betala vid den första inbetalningen?

b) Hur mycket ska Sanna betala vid den 10:e inbetalningen?

35. a) $45000 \cdot 0{,}0067 + \dfrac{45000}{60} \approx 301 + 750 = 1051 \text{ kr}$

b) $\left(45000 - 9 \cdot \dfrac{45000}{60}\right) \cdot 0{,}0067 + \dfrac{45000}{60} \approx 256 + 750 = 1006 \text{ kr}$

---

36 I tabellen här nedanför visas stödet för ett parti i två opinionsundersökningar.

Undersökning	n	Andel
U1	1 013	5,6 %
U2	1 240	6,3 %

Är ökningen statistiskt säkerställd? Använd formeln som finns i uppgift 5129.

36.

Ökningen = 6.3 − 5.6 = 0.7 procentenheter.

$$\text{Felmarginalen} = 1.96\sqrt{\frac{5.6\cdot 94.4}{1013}+\frac{6.3\cdot 93.7}{1240}} \approx 1.96 \text{ procentenheter}$$

Felmarginalen > ökningen ⇒ ökningen är ej statistiskt säkerställd.

---

37 Visa med hjälp av definitionerna för sinus, cosinus och tangens att

$\frac{\sin v}{\cos v} = \tan v$, där $0° < v < 90°$.

37.

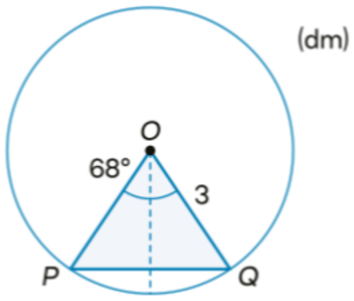
$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$$

$$\cos v = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}, \quad 0° < v < 90°$$

#

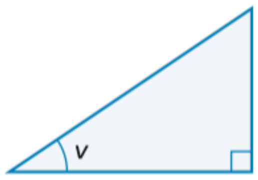
38 Hur lång är sträckan *PQ*?



38. $PQ = 2 \cdot 3 \cdot \sin 34° \approx 3{,}4$ dm

---

39 I en rätvinklig triangel är vinkeln v en av de spetsiga vinklarna. Storleken på vinkel v ökar men hypotenusan har samma längd. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera ditt svar.



A Större vinkel v medför ett högre värde på sin v.

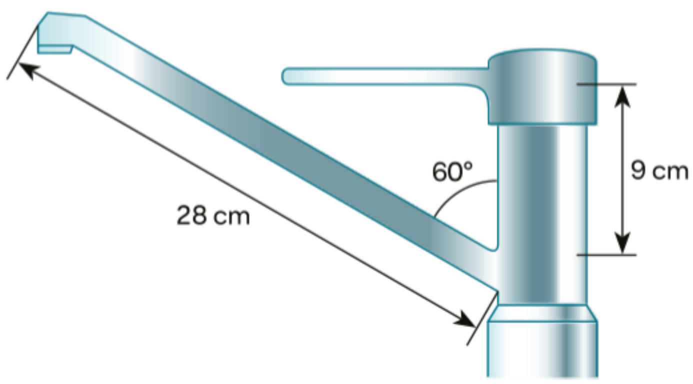
B Större vinkel v medför ett lägre värde på tan v.

39. A är sant, ty motstående katet ökar

B är falskt, ty närliggande katet minskar i motsvarande grad som motstående katet ökar.

---

40 En blandare ska förses med en kran. När kranen, precis som i bilden, bildar en rät vinkel mot röret är vattnet avstängt. Blandaren får inte slå i kranen när vattnet stängs av. Beräkna den största möjliga längden som handtaget på kranen kan ha utan att den slår i blandaren.



40. maxlängden = $9 \cdot \tan 60° \approx 15{,}59$ (avrundas nedåt till 15 cm)

---

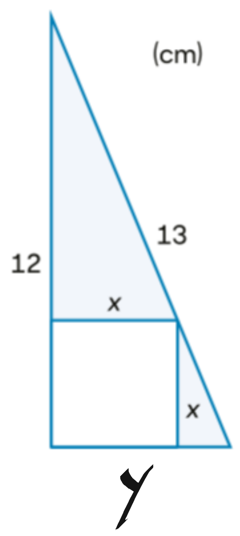
41 Lös ekvationen $2x + 5 = 5 \cdot 2^x$

41. Geogebra:

Solve$(2x+5=5\cdot 2^x) \Rightarrow x_1 \approx -1{,}76,\ x_2 = 0$

---

42 Bestäm arean av kvadraten i den rätvinkliga triangeln.



42.

$$y = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

Likformighet ger: $\dfrac{x}{12-x} = \dfrac{5-x}{x}$

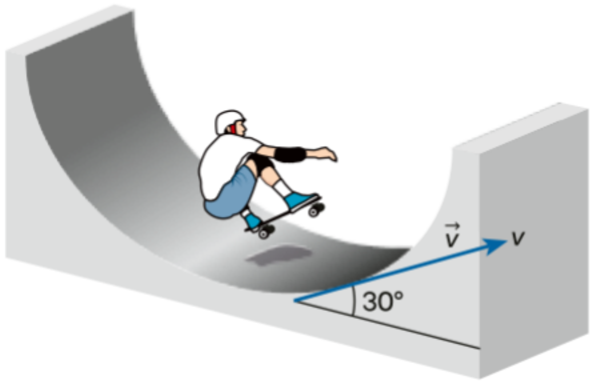
$$x^2 = (12-x)(5-x)$$

$$x^2 = 60 - 17x + x^2$$

$$x = \frac{60}{17}$$

Arean $= x^2 = \dfrac{60^2}{17^2} = \underline{12\text{ cm}^2}$

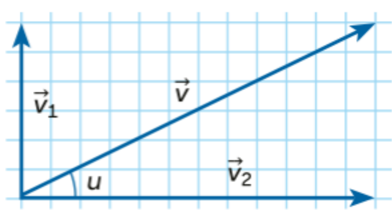
43 Figuren visar hastigheten $\vec{v}$ när Fanny åker skateboard. Beräkna hastigheten i vågrät riktning om vi vet att $|\vec{v}| = 7$ m/s.



43. $v_0 = |\vec{v}| \cdot \cos 30° = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6$ m/s

---

44 I figuren här nedanför visas en hastighetsvektor $\vec{v}$ och de två vinkelräta komposanterna, $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$, till denna vektor. Storleken av vektorn $\vec{v}$ betecknas $|\vec{v}|$.



a) Uttryck storleken av $\vec{v}_1$ med hjälp av $\vec{v}$ och vinkeln u.

b) Uttryck storleken av $\vec{v}_2$ med hjälp av $\vec{v}$ och vinkeln u.

44. a) $|\vec{v}_1| = |\vec{v}| \cdot \sin u$

b) $|\vec{v}_2| = |\vec{v}| \cdot \cos u$

---

45 För en funktion g där $g(x) = kx + m$ gäller att

$g(x - 1) - g(x) = -2$

$g(2) = 2m$

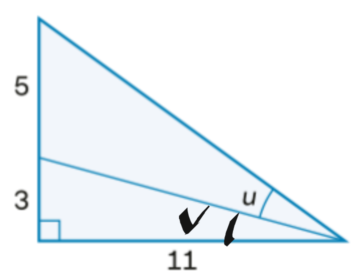
Bestäm funktionen g.

45.
- $k(x-1) + m - (kx + m) = -2 \Rightarrow k = 2$
- $2 \cdot 2 + m = 2m \Rightarrow m = 4$

$$g(x) = \underline{2x + 4}$$

---

46 Hur stor är vinkeln u i figuren?



46.
$$v = \arctan \frac{3}{11}$$

$$u + v = \arctan \frac{8}{11} \Rightarrow$$

$$u = \arctan \frac{8}{11} - \arctan \frac{3}{11} \approx \underline{20{,}8^\circ}$$

---

47 Det finns ett samband mellan antalet hörn i en månghörning och månghörningens vinkelsumma. Finn en formel för att beräkna vinkelsumman i en månghörning. Motivera dina svar.

47.

Triangel: $n=3$ vinkelsumman $=180$

Rektangel: $n=4$ vinkelsumman $=360°$

Pentagon: $n=5$ vinkelsumman $=540°$

Vinkelsumman $=(n-2)\cdot 180°$, $n\geq 3$

---

48 35 personer väljer på måfå ett tal i intervallet 1–200. Hur stor är sannolikheten att minst två personer väljer samma tal?

48.

$$P(\text{minst } 2) = 1 - P(\text{inga}) = 1 - \frac{200\cdot 199\cdot 198\cdot \ldots \cdot 166}{200^{35}} = 0{,}96$$

jmf. $P(\text{minst } 2) = 1 - \frac{\text{perm}(200,35)}{200^{35}} = 0{,}96$ (Ma5)

49 Felmarginalen vid en stickprovsundersökning kan bestämmas med formeln

$$f = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}$$

där n är stickprovets storlek och p är andelen som gav ett visst svar. Ett parti har fått 23 % av rösterna i en opinionsundersökning. Hur stort måste stickprovet vara för att felmarginalen för det resultatet ska understiga 2 procentenheter?

49.

$$n > 1{,}96^2 \cdot \frac{p(100-p)}{f^2} = 1{,}96^2 \cdot \frac{23 \cdot 77}{2^2} = \underline{1701 \text{ st}}$$

---

50 Vid addition av tal gäller den associativa lagen, dvs. $(a + b) + c = a + (b + c)$. Till exempel är $(3 + 2) + 5 = 5 + 5 = 10$ och $3 + (2 + 5) = 3 + 7 = 10$. Den associativa lagen gäller även för addition av vektorer. Visa med ett exempel att detta gäller även för vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

(Np Ma1c ht 2016)

50. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

ex. $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (3,2)$, $\vec{w} = (-2,4)$

$VL = ((2,1) + (3,2)) + (-2,4) = (5,3) + (-2,4) = (3,7)$

$HL = (2,1) + ((3,2) + (-2,4)) = (2,1) + (1,6) = (3,7) = VL$ #

51 Två åttasidiga tärningar kastas.

Om produkten av talen på de båda tärningarna är jämn, hur stor är då sannolikheten att summan av talen på de båda tärningarna också är jämn?

51.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	O	X	O	X	O	X	O	X
2	X	⊗	X	⊗	X	⊗	X	⊗
3	O	X	O	X	O	X	O	X
4	X	⊗	X	⊗	X	⊗	X	⊗
5	O	X	O	X	O	X	O	X
6	X	⊗	X	⊗	X	⊗	X	⊗
7	O	X	O	X	O	X	O	X
8	X	⊗	X	⊗	X	⊗	X	⊗

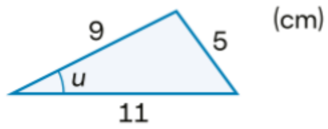
Antal kryss (produkten jämn) $= 4 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 48$

Antal ringar + kryss (produkten och summan jämn) $= 4 \cdot 4 = 16$

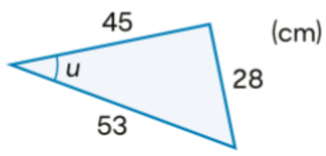
$$P = \frac{16}{48} = \underline{\frac{1}{3}}$$

52 Vilken eller vilka av följande utsagor är sanna? Motivera ditt svar.

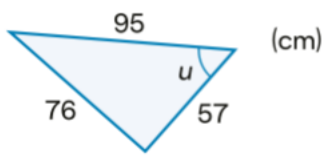
A $\tan u = \frac{5}{9}$



B $\tan u = \frac{28}{45}$



C $\tan u = \frac{76}{57}$



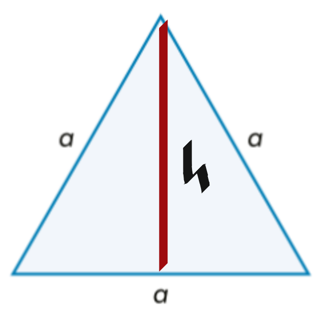
52. A är falsk, ty triangeln är ej vinkelrät

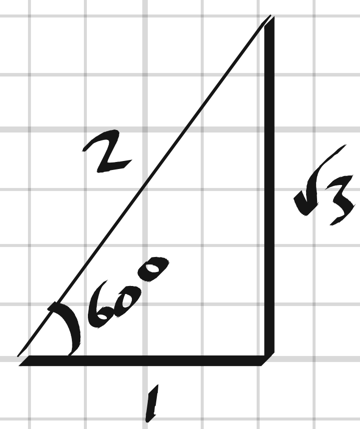
B och C är sanna, ty dessa är vinkelräta.

---

53 Visa att i en liksidig triangel med sidan a gäller

Area $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$



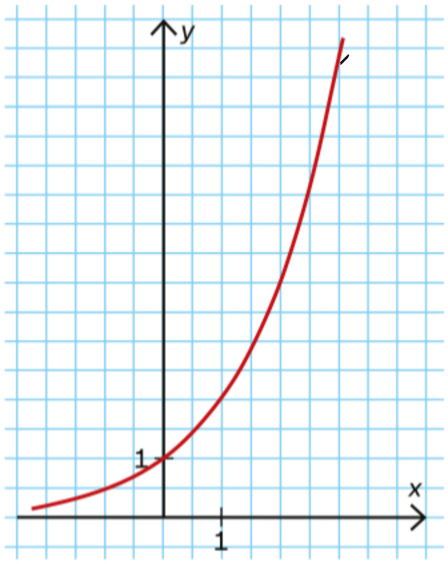


53. $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$ #

---

54 Figuren visar grafen till funktionen g där $y = g(x)$.



a) Använd grafen och bestäm a om $g(a + 1) = 2$.

b) Använd grafen och bestäm b då $g(b - 2) = 8$.

54. a) $g(x) = 2 \Rightarrow x = 1$

$x = a + 1 \Rightarrow \underline{a = 0}$

b) $g(x) = 8 \Rightarrow x = 3$

$x = b - 2 \Rightarrow \underline{b = 5}$

55 Bestäm en ekvation på formen $y = C \cdot a^x$ vars graf går genom punkterna med koordinaterna (1, 6) och (4, 13).

55.

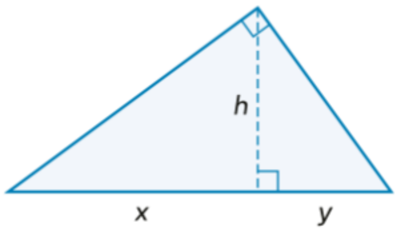
$$\begin{cases} C \cdot a^1 = 6 \\ C \cdot a^4 = 13 \end{cases}$$

$$\frac{a^4}{a} = \frac{13}{6} \Rightarrow a = \left(\frac{13}{6}\right)^{1/3} \approx 1{,}29$$

$$C = \frac{6}{a} = \frac{6 \cdot 6^{1/3}}{13^{1/3}} = \frac{6^{4/3}}{13^{1/3}} \approx 4{,}64$$

$$\underline{y = 4{,}64 \cdot 1{,}29^x}$$

56 Visa att $h^2 = x \cdot y$.



56. Likformighet ger:

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{h} \Rightarrow h^2 = xy \quad \#$$

---

57 Låt A, B och C vara tre punkter som inte befinner sig på samma linje i planet. Visa att det inte finns någon punkt M så att
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

57.

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B), \quad C = (x_C, y_C), \quad M = (x_M, y_M)$$

$$\overrightarrow{MA} = (x_A - x_M, y_A - y_M)$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M, y_B - y_M)$$

$$\overrightarrow{MC} = (x_C - x_M, y_C - y_M)$$

$$VL = (x_A - x_M, y_A - y_M) + (x_B - x_M, y_B - y_M) - (2x_C - 2x_M, 2y_C - 2y_M) =$$

$$= (x_A + x_B - 2x_C, y_A + y_B - 2y_C)$$

Om $x_A + x_B = 2x_C \Rightarrow x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ och

om $y_A + y_B = 2y_C \Rightarrow y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, dvs

$C = (x_C, y_C)$ är en mittpunkt mellan A och B.

Men förutsättningen var att A, B och C

inte fick befinna sig längs en linje.

Således är $VL \neq 0$ #