4111 a) Vinklarna i en triangel förhåller sig som 4 till 5 till 6.

Hur många grader är den minsta vinkeln?

b) I en triangel är den minsta vinkeln 20°. De två övriga vinklarna förhåller sig som 2 till 3.

Bestäm triangelns största vinkel.

4111. a) $4x + 5x + 6x = 180° \Rightarrow x = \frac{180°}{15} = 12°$

Minsta vinkeln $= 4x = 48°$

b) $2x + 3x = 180° - 20° \Rightarrow x = \frac{160°}{5} = 32°$

Största vinkeln $= 3x = 96°$

4112 Hur stor är minsta vinkeln mellan timvisaren och minutvisaren på en analog klocka som är

a) 16.00 b) 16.30 c) 16.45?

4112. a) $\frac{4}{12} \cdot 360° = 120°$

b) $\frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$

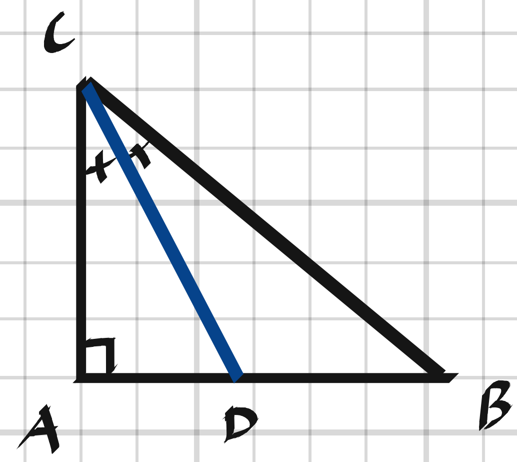
c) $\left(\frac{5}{12} - \frac{\frac{3}{4}}{12}\right) \cdot 360° = \frac{17}{48} \cdot 360° = 127.5°$

4113 I $\triangle ABC$ är $\angle A$ rät och $\angle B = 38°$.

En bisektris till $\angle C$ träffar sträckan AB i punkten D.

a) Beräkna $\angle ACD$.

b) Är det sant att $\angle BDC$ är mer än dubbelt så stor som $\angle ADC$? Motivera ditt svar.



4113.

a) $\angle C = 90° - 38° = 52°$

$\angle ACD = \angle C/2 = 26°$

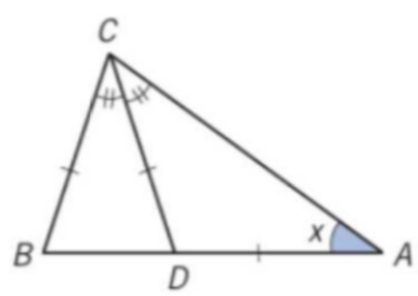
b) $\angle ADC = 90° - 26° = 64°$

$\angle BDC = 180° - 64° = 116°$

$\frac{\angle BDC}{\angle ADC} = \frac{116°}{64} < 2 \Rightarrow$ Nej, det är inte sant.

4114 I figuren är lika långa sidor och lika stora vinklar markerade.

Bestäm vinkeln x.



4114.

$\angle BCD = \angle ACD = x \Rightarrow \angle C = 2x$

$\angle B = \frac{180° - x}{2}$

$\angle A + \angle C + \angle B = 180° \Rightarrow$

$x + 2x + \frac{180° - x}{2} = 180° \Rightarrow x = 36°$

4115 I en triangel är en vinkel x grader och en annan vinkel är 12 grader mindre.

Vilka värden är möjliga för triangelns vinklar om vinklarna har heltalsvärden?

4115.

$\angle A = x$, $\angle B = x - 12°$, $\angle C = C \Rightarrow$

$x + x - 12° + C = 180°$

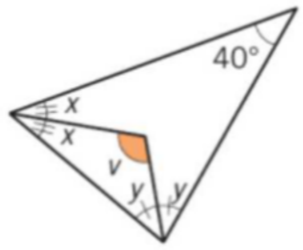
$C = 192° - 2x$

$C > 0° \Rightarrow x < 96°$

$\angle B > 0° \Rightarrow x > 12°$

A	B	C
13°	1°	166°
14°	2°	164°
⋮	⋮	⋮
95°	83°	2°

4127 Visa att vinkeln $v = 110°$.



4127.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 40° = 180° & (1) \\ x + y + v = 180° & (2) \end{cases}$$

(1): $x + y = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$

(2): $v = 180° - (x+y) = 180° - 70° = \underline{110°}$ #

4128 Bevisa att $w = u + v$ (yttervinkelsatsen).

4128. $u + v + (180° - w) = 180° \Rightarrow$

$\underline{w = u + v}$ #

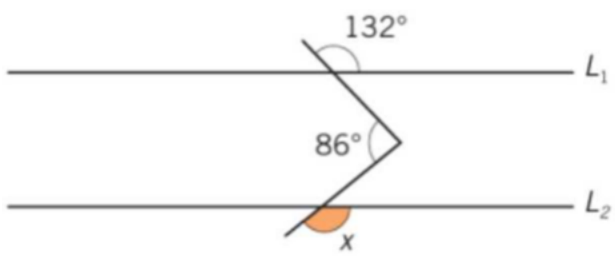
4129 Hur stor är en vinkel i en regelbunden

a) 10-hörning b) n-hörning?

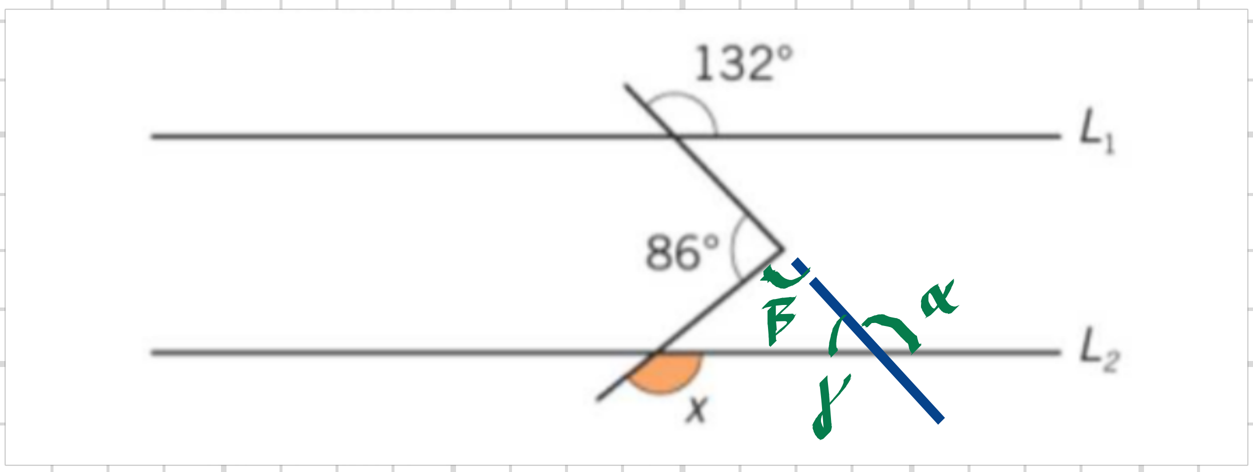
4129. a) $\dfrac{\text{Vinkelsumman}}{n} = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = \dfrac{8\cdot 180^\circ}{10} = \underline{144^\circ}$

b) $\underline{\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}}$

4130 Visa att om linjerna L_1 och L_2 är parallella, så är vinkeln $x = 142°$.



4130.



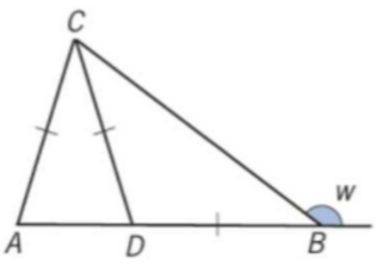
$\alpha = 132^\circ$

$\beta = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$

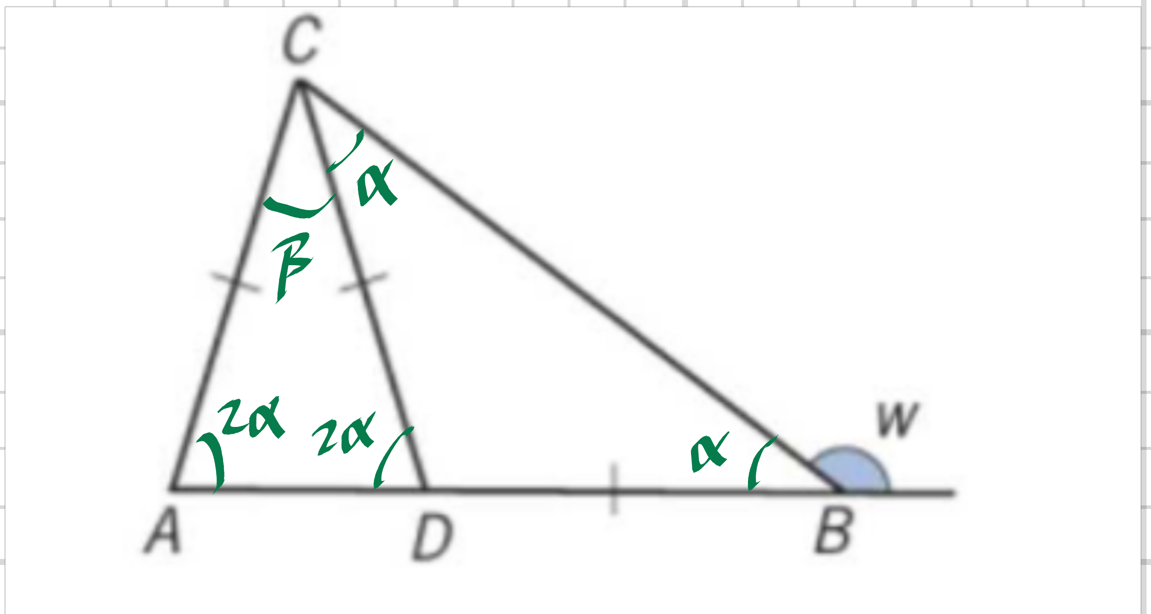
$\gamma = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

$x = \beta + \gamma = 94^\circ + 48^\circ = \underline{142^\circ}$ #

4131 I figuren är $AB = BC$ och $AC = CD = BD$.
Visa att vinkeln $w = 144°$.



4131.



$(1):\quad \alpha = 180° - w$

$(2):\quad \beta = 180° - 4\alpha$

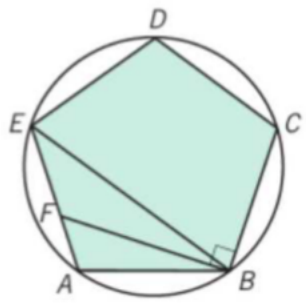
$(3):\quad \beta + \alpha = 2\alpha$

$(2+3):\quad 180° - 4\alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{5} = 36°$

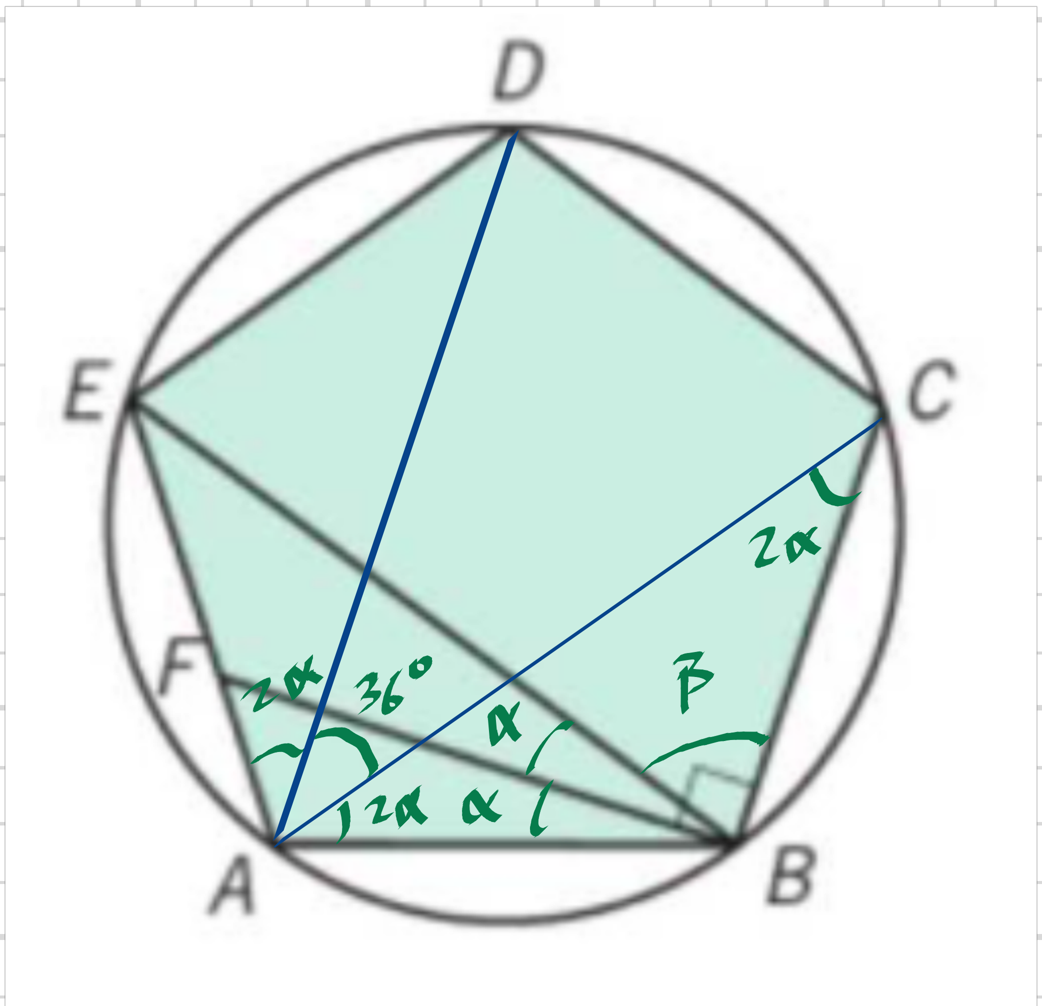
$(1+2+3):\quad w = 180° - 36° = \underline{144°}$ #

4132 *ABCDE* är en regelbunden femhörning. *BF* är en bisektris till vinkeln *ABE*.

Visa att vinkeln *CBF* är rät.



4132.



ΔACD : Gyllene triangeln med spetsvinkeln $36°$

ΔABC : $2\alpha + 2\alpha + 2\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 6\alpha$

$\angle A$: $36° + 4\alpha = 108°$ $\left(\text{hörnvinkeln} = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}\right)$

$$\alpha = \frac{108° - 36°}{4} = 18°$$

$$\alpha + \beta = 18° + 180° - 6\cdot 18° = \underline{90°} \quad \#$$

4138 Ge exempel på ett påstående som kan stå efter pilen.

a) $3x + 5 = 17 \Leftrightarrow$

b) Vinkeln $v = 100° \Rightarrow$

c) *ABCD* är en rektangel. $\Rightarrow$

d) $x^2 = 25 \Leftrightarrow$

e) Vinkelsumman i en månghörning är 540°. $\Leftrightarrow$

f) $x < 0 \Leftrightarrow$

g) Djuret är en fisk. $\Rightarrow$

4138.
a) $x = 4$

b) v är trubbig (>90°)

c) ABCD har 4 hörn

d) $x = \pm 5$

e) Femhörning

f) x är negativ

g) Djuret lever i vatten.

4139 Vad ska stå i rutorna?
Välj mellan $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ och $\Leftrightarrow$.
Motivera dina val.

a) $x > -6$ ☐ $x > -3$

b) $x^2 = 1$ ☐ $x = 1$ eller $x = -1$

c) $x \geq 0$ ☐ $x^2 \geq 0$

d) $x \geq 0$ ☐ $x^3 \geq 0$

4139.

a) $\Leftarrow$ att $x > -6$ behöver inte medföra att $x > -3$

b) $\Leftrightarrow$ om $x = \pm 1$ gäller att $x^2 = 1$ och vice versa

c) $\Rightarrow$ att $x^2 > 0$ behöver inte medföra att $x \geq 0$

d) $\Leftrightarrow$ om $x^3 \geq 0$ gäller att $x \geq 0$ och vice versa.

4140 För påståendena $P_1 - P_5$ gäller

P_1: $x > 1$ P_2: $x < 1$ P_3: $-1 < x < 1$
P_4: $x^2 > 1$ P_5: $0 \leq x^2 < 1$

Vad ska stå i rutorna?
Välj mellan $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ och $\Leftrightarrow$.
Motivera dina svar.

P_1 ☐ P_4 P_2 ☐ P_5 P_3 ☐ P_5

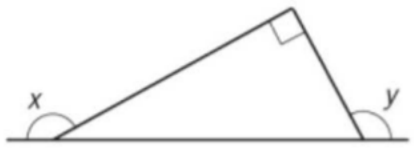
4140.

$P_1 \Rightarrow P_4$

$P_2 \Leftarrow P_5$

$P_3 \Leftrightarrow P_5$

4212 Ställ upp en formel för hur y beror av x.

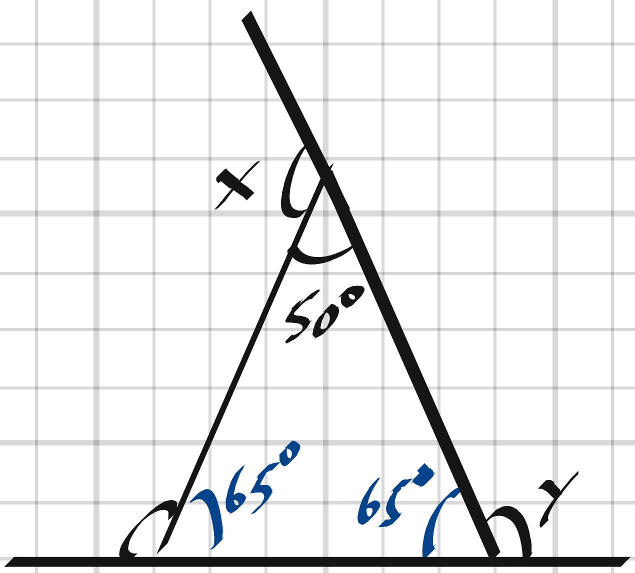


4212.

$y = 90° + 180° - x = \underline{270° - x}$

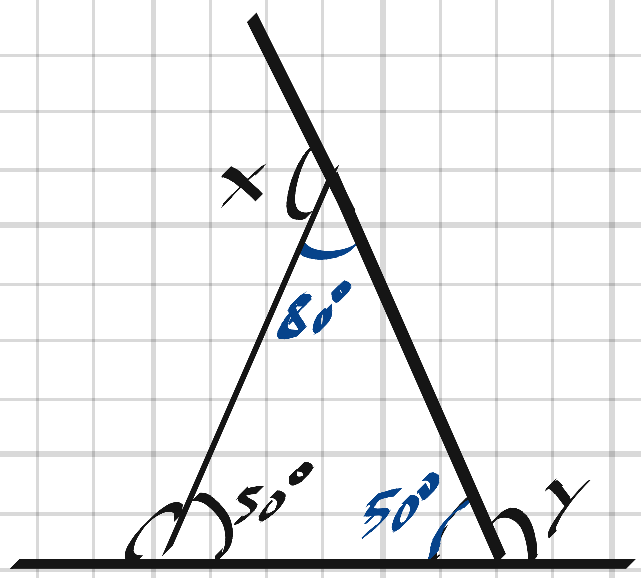
4213 En likbent triangel har en vinkel som är 50°. Undersök vilka värden som är möjliga för yttervinklarna?

4213.



$x = 180° - 50° = \underline{130°}$

$y = 180° - 65° = \underline{115°}$

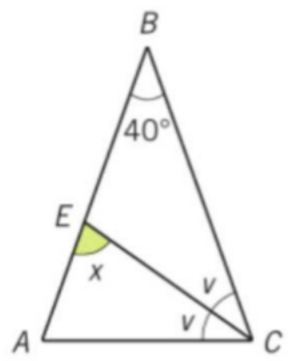


$x = 180° - 80° = \underline{100°}$

$y = 180° - 50° = \underline{130°}$

4214 I triangeln ABC är $AB = BC$.

Bestäm vinkeln x.

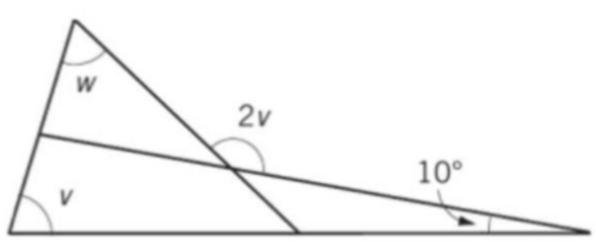


4214. $\triangle ABC$: $2v = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$

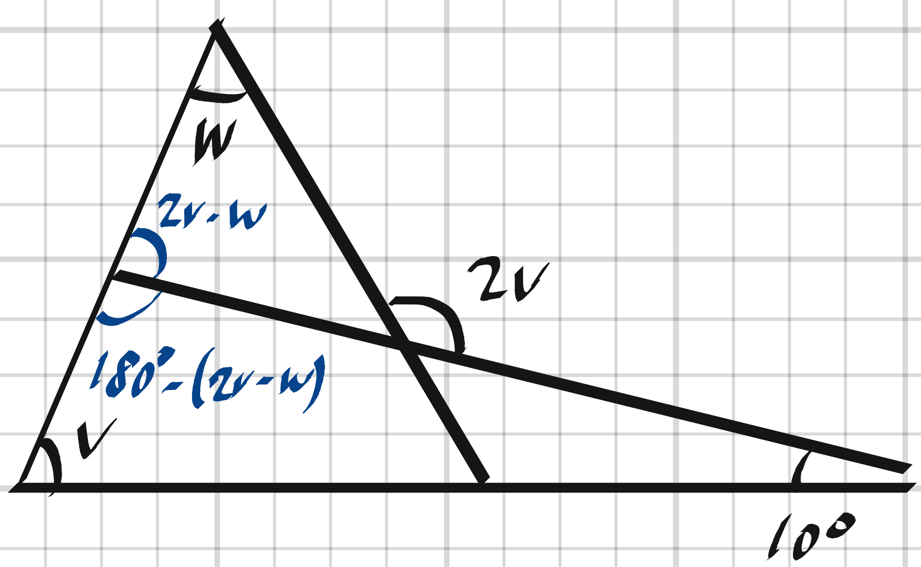
$v = 35°$

$\triangle ACE$: $x = 180° - 2v - v = 180° - 3 \cdot 35° = \underline{75°}$

4215 Bestäm ett samband mellan vinklarna w och v.



4215.

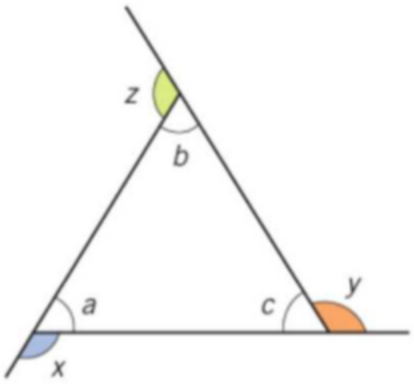


$v + 180° - (2v - w) + 10° = 180°$

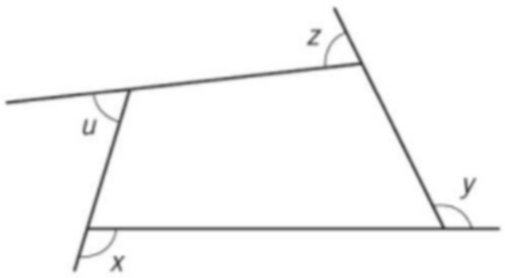
$v + 180° - 2v + w + 10° = 180°$

$\underline{w = v - 10°}$

4216 a) Bevisa med hjälp av yttervinkelsatsen att summan av yttervinklarna i en triangel är $x + y + z = 360°$.



b) Bevisa att summan av yttervinklarna till en fyrhörning är 360°.



c) Bevisa att summan av yttervinklarna till en *n*-hörning är 360°.

4216.

a) $$\begin{cases} x = b + c \\ y = a + b \\ z = a + c \\ a + b + c = 180° \end{cases}$$

$$x + y + z = (180° - a) + (180° - c) + (180° - b) =$$

$$= 540° - (a + b + c) = 540° - 180° = 360° \quad \#$$

b) Vinkelsumman = 360°

$$(180° - x) + (180° - y) + (180° - u) + (180° - z) = 360°$$

$$720° - (x + y + u + z) = 360° \Rightarrow$$

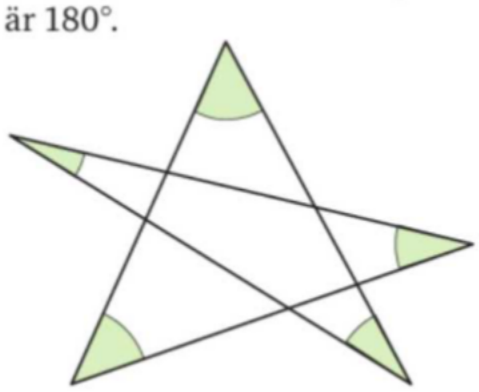
$$x + y + u + z = 360° \quad \#$$

c) Vinkelsumman, $q = (n-2)\cdot 180^\circ$

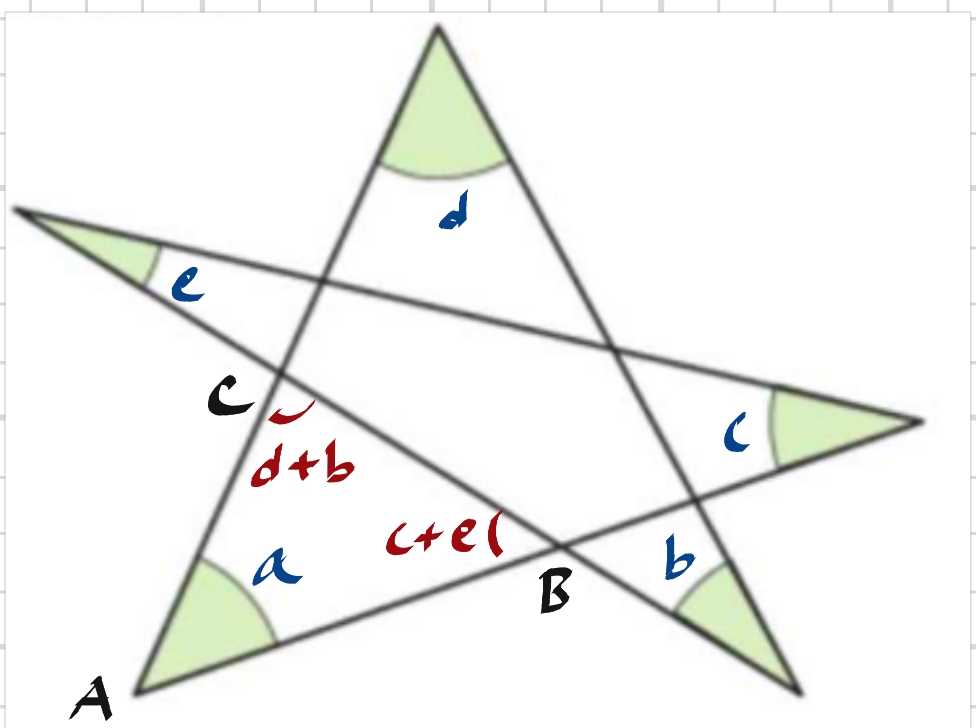
$$n\cdot 180^\circ - q = n\cdot 180^\circ - (n-2)\cdot 180^\circ = 2\cdot 180^\circ = 360^\circ$$

#

4217 Visa att summan av de färgade vinklarna är 180°.



4217.



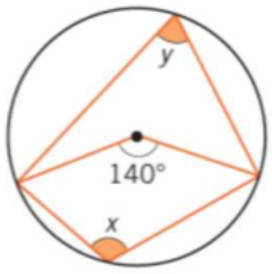
ΔABC: $a + (d+b) + (c+e) = 180^\circ$

$$a+b+c+d+e = 180^\circ$$

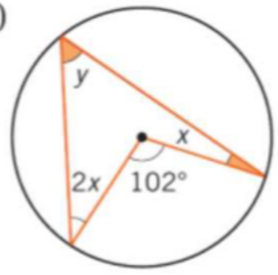
#

4227 Bestäm x och y.

a)



b)



4227.

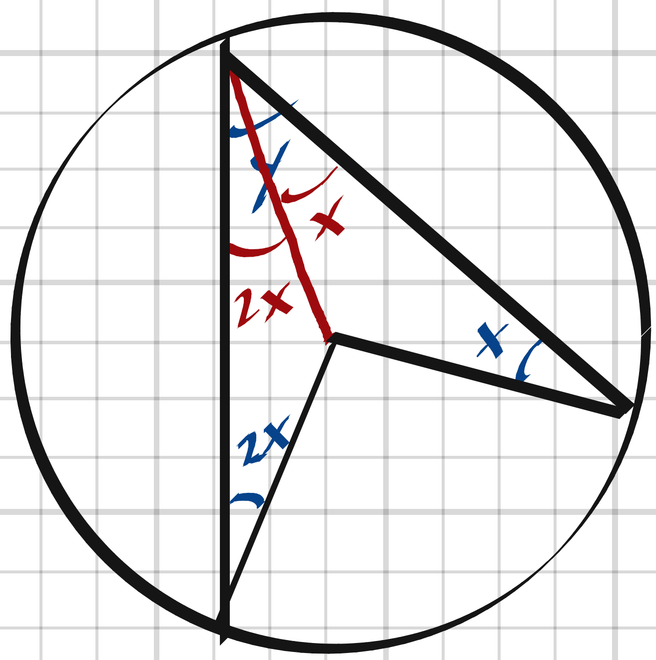
a) $y = \frac{140°}{2} = 70°$

$x + y = 180° \Rightarrow x = 180° - 70° = 110°$

b) $y = \frac{102°}{2} = 51°$

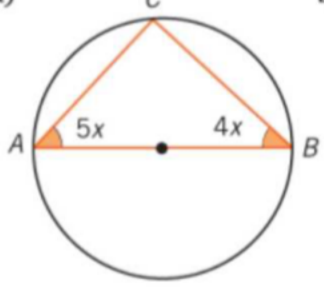
$y = 2x + x \Rightarrow$

$x = \frac{51°}{3} = 17°$

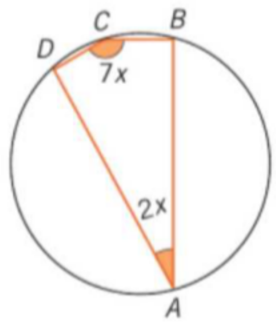


4228 Bestäm de färgade vinklarna.

a)



b)



4228. a) $5x + 4x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{90^\circ}{9} = 10^\circ$

$\underline{\angle A = 5 \cdot 10^\circ = 50^\circ}$

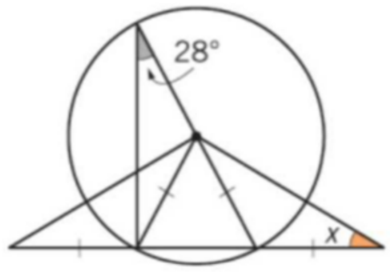
$\underline{\angle B = 4 \cdot 10^\circ = 40^\circ}$

b) $7x + 2x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$

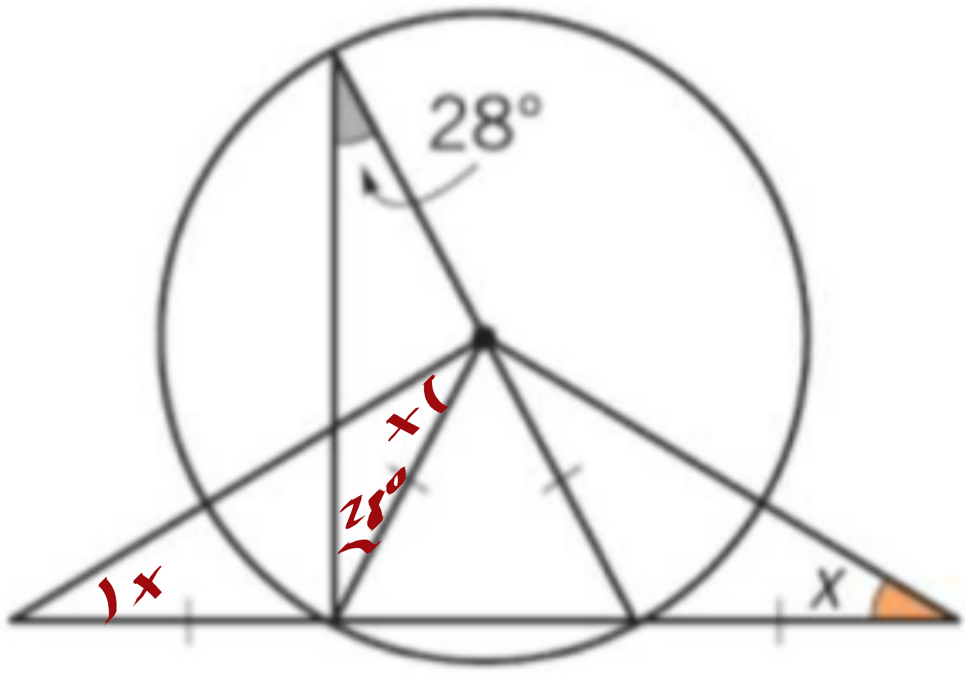
$\underline{\angle A = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ}$

$\underline{\angle C = 7 \cdot 20^\circ = 140^\circ}$

4229 Visa att $x = 31°$.



4229.

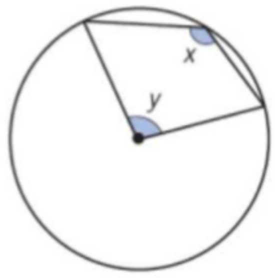


$$2x + 90° + 28° = 180° \Rightarrow$$

$$x = \frac{62°}{2} = 31°$$

#

4230 Bestäm hur vinkeln y beror av x.

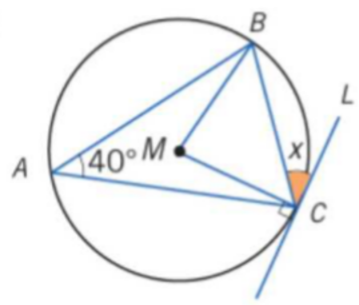


4230. $360° - y = 2 \cdot x \Rightarrow y = 360° - 2x$

4231 Linjen L är en tangent till cirkeln. Den är vinkelrät mot radien.

a) Bestäm vinkeln x och förklara varje steg i din lösning.

b) Resultatet i a) är ett specialfall av en allmän sats som formulerar ett förhållande mellan vinkeln x och randvinkeln. Formulera satsen.



4231. a) $M = 2A = 80°$

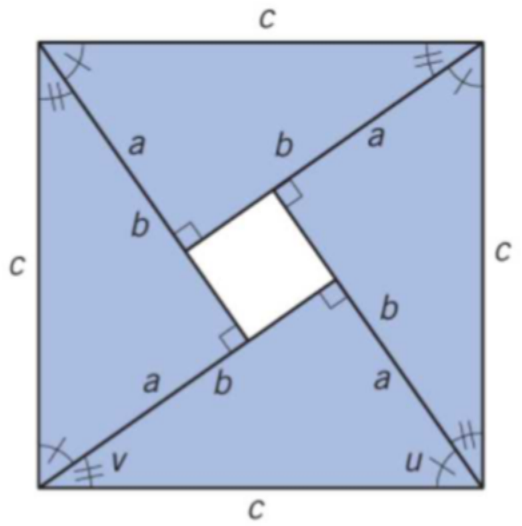
ΔBCM likbent $\Rightarrow$

$$\angle MCB = \frac{180° - M}{2} = 50°$$

$$x = 90° - \angle MCB = 90° - 50° = 40°$$

b) Vinkeln x mellan tangent och korda är lika med randvinkeln till bågen BC

4241 Fyra identiska rätvinkliga trianglar placeras som i figuren. Eftersom $u + v$ är 90° är fyrhörningen en kvadrat med sidan c.



a) Skriv ett uttryck för arean av en triangel i figuren.

b) Skriv ett uttryck för längden av den vita kvadraten sida.

c) Skriv ett uttryck för den vita kvadratens area.

d) Bevisa Pythagoras sats genom att skriva arean för den stora kvadraten på två olika sätt och sätta uttrycken lika.

4241. a) $A = \dfrac{ab}{2}$

b) $b - a$

c) $(b-a)^2$

d) $c^2 = 4 \cdot \dfrac{ab}{2} + (b-a)^2$

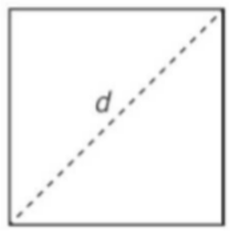
$c^2 = \cancel{2ab} + b^2 - \cancel{2ab} + a^2$

$c^2 = a^2 + b^2$ #

4242 Längden av diagonalen i kvadraten är d.

Visa att kvadratens area A kan skrivas

$$A = \frac{d^2}{2}$$



4242.

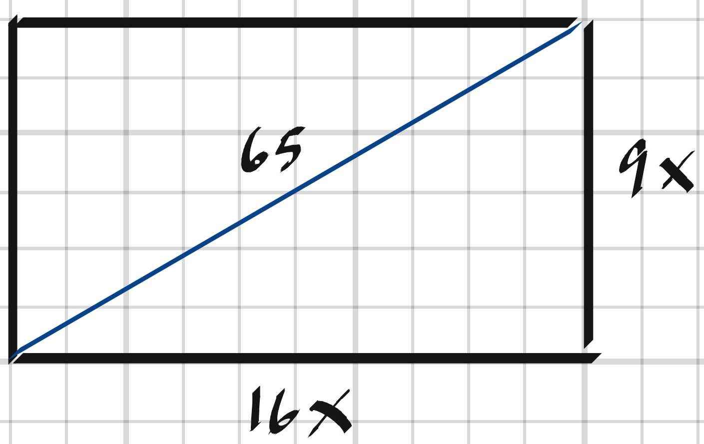
$$s = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = s^2 = \frac{d^2}{2} \quad \#$$

4243 En 65″ (65 tum) bildskärm har formatet 16:9. Det betyder att bredden förhåller sig till höjden som 16 till 9.

65″ innebär att den rektangulära bildrutans diagonal är 65 tum (1 tum = 2,54 cm).

Beräkna bildrutans bredd och höjd.

4243.



$$(16x)^2 + (9x)^2 = 65^2$$

$$256x^2 + 81x^2 = 4225$$

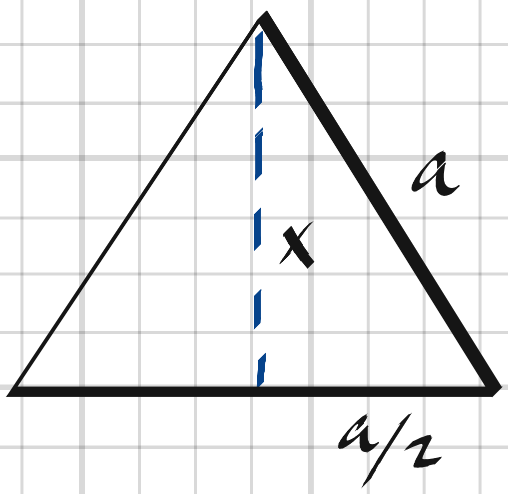
$$x = \underset{(-)}{+}\sqrt{12{,}53} = 3{,}54$$

$$\underline{\text{Bredden} = 16 \cdot 3{,}54 = 56{,}6''}$$

$$\underline{\text{Höjden} = 9 \cdot 3{,}54 = 31{,}9''}$$

4244 Visa att höjden i en liksidig triangel med sidan a är $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

4244.



$$x = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

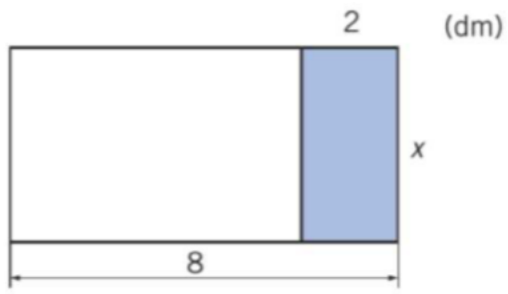
#

4307 Den blå rektangeln är likformig med den stora rektangeln med sidan 8 dm.

a) Beräkna sträckan x.

b) Bestäm längdskalan.

c) Bestäm areaskalan.



4307.

a) $\frac{x}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \underline{4 \text{ dm}}$

b) $4:8 \Rightarrow \underline{1:2}$

c) $8:32 \Rightarrow \underline{1:4}$

4308 I en rätvinklig triangel är längden på kateterna 65 cm och 72 cm. Triangeln är likformig med en större rätvinklig triangel. I den större triangeln är hypotenusans längd 291 cm.

Bestäm förhållandet mellan de två trianglarnas areor.

4308.

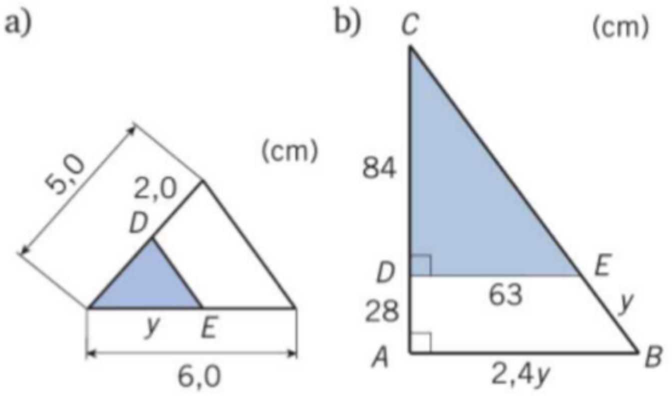
$c = \sqrt{65^2 + 72^2} = 97$

$291^2 : 97^2$

$\underline{9 : 1}$

4317 Sträckan DE är en parallelltransversal.
Beräkna sträckan y.

a) b)



4317. a)

$$\frac{y}{6-y} = \frac{5-2}{2}$$

$$2y = 3(6-y)$$

$$2y = 18 - 3y$$

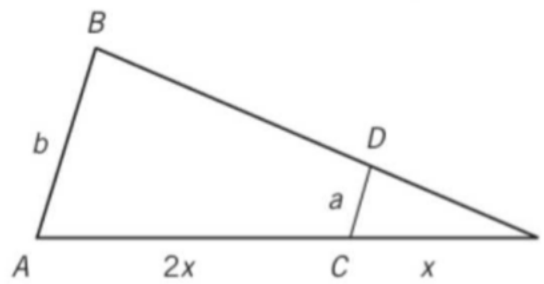
$$y = \frac{18}{5} = \underline{3.6 \text{ cm}}$$

b)

$$\frac{2,4y}{28+84} = \frac{63}{84}$$

$$y = \frac{63(28+84)}{2,4 \cdot 84} = \underline{35 \text{ cm}}$$

4318 Sträckorna AB och CD är parallella.



Vilket påstående är sant?

I b är dubbelt så lång som a.

II a är en tredjedel så lång som b.

III Det finns inget enkelt samband mellan a och b.

Motivera ditt svar.

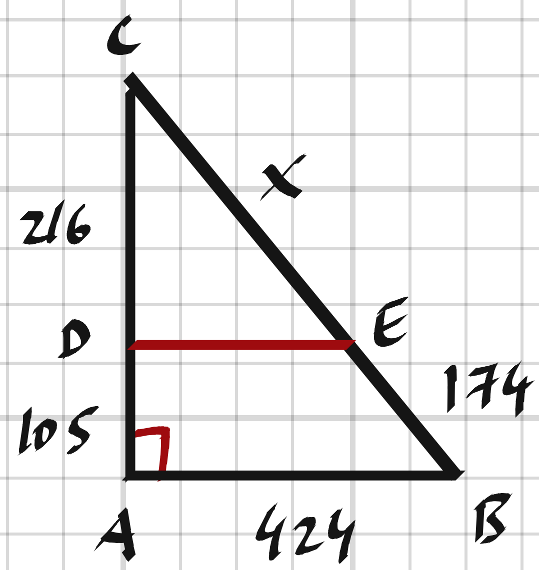
4318. $\frac{a}{x} = \frac{b}{3x} \Rightarrow a = \frac{b}{3} \Rightarrow$ Alternativ II

4319 I triangeln ABC är sträckan DE parallell med AB och $\angle BAC = 90°$.

$AD = 105$ dm, $CD = 216$ dm,
$AB = 424$ dm och $BE = 174$ dm.

Beräkna sträckan CE med hjälp av

a) transversalsatsen
b) topptriangelsatsen
c) Pythagoras sats.



4319.

a) $\dfrac{x}{174} = \dfrac{216}{105} \Rightarrow x = \dfrac{216 \cdot 174}{105} \approx \underline{358 \text{ dm}}$

b) $\dfrac{x}{216} = \dfrac{x + 174}{105 + 216}$

$321x = 216x + 37584$

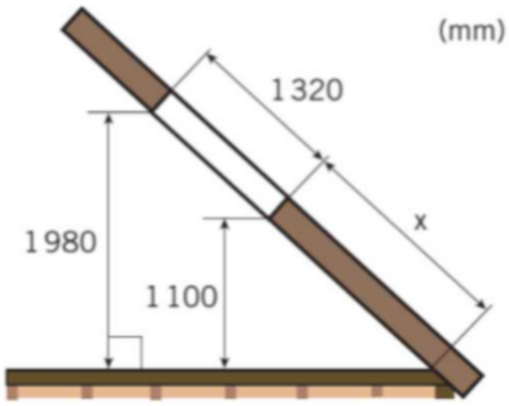
$105x = 37584$

$\underline{x = 358 \text{ dm}}$

c) $(x + 174)^2 = (216 + 105)^2 + 424^2$

$x = \pm 532 - 174 \approx \underline{358 \text{ dm}}$

4320 Ett takfönster sätts in i en byggnad. Beräkna det utelämnade måttet x.



4320.

$$\frac{x}{1100} = \frac{x+1320}{1980}$$

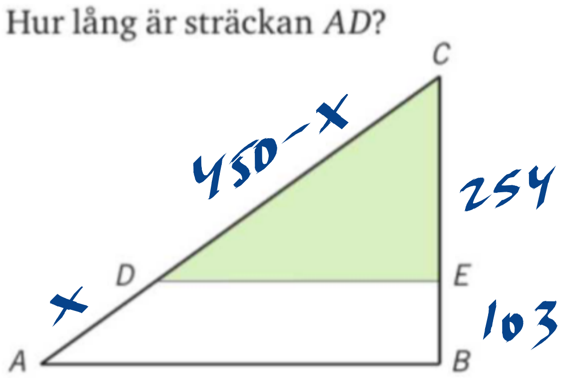
$$1980x = 1100(x+1320)$$

$$1980x = 1100x + 1452\,000$$

$$880x = 1452000$$

$$\underline{x = 1650 \text{ mm}}$$

4321 I triangeln är DE och AB parallella och $AC = 450$ m, $CE = 254$ m och $BE = 103$ m.
Hur lång är sträckan AD?



4321.

$$\frac{x}{450-x} = \frac{103}{254}$$

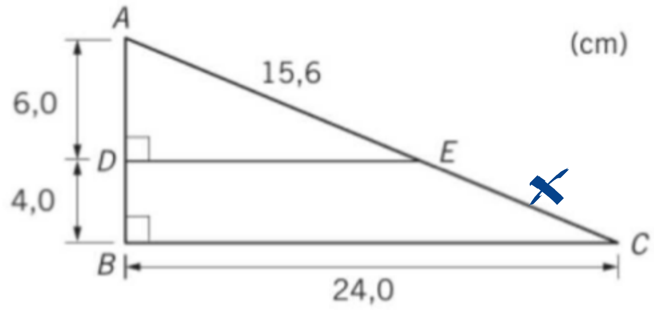
$$254x = 103(450-x)$$

$$357x = 46350$$

$$\underline{x \approx 130 \text{ m}}$$

4322 I triangeln ABC är sidan DE parallell med sidan BC.

Beräkna längden av sträckan EC på tre olika sätt.



$EC = x$

4322.

Transversalsatsen:

$$\frac{x}{15,6} = \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 15,6}{6} = \underline{10,4 \text{ cm}}$$

Topptriangelsatsen:

$$\frac{x + 15,6}{4+6} = \frac{15,6}{6} \Rightarrow x = \frac{15,6 \cdot 10}{6} - 15,6 = \underline{10,4 \text{ cm}}$$

Pythagoras sats:

$$(x + 15,6)^2 = (6+4)^2 + 24^2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{10^2 + 24^2} - 15,6 = \underline{10,4 \text{ cm}}$$

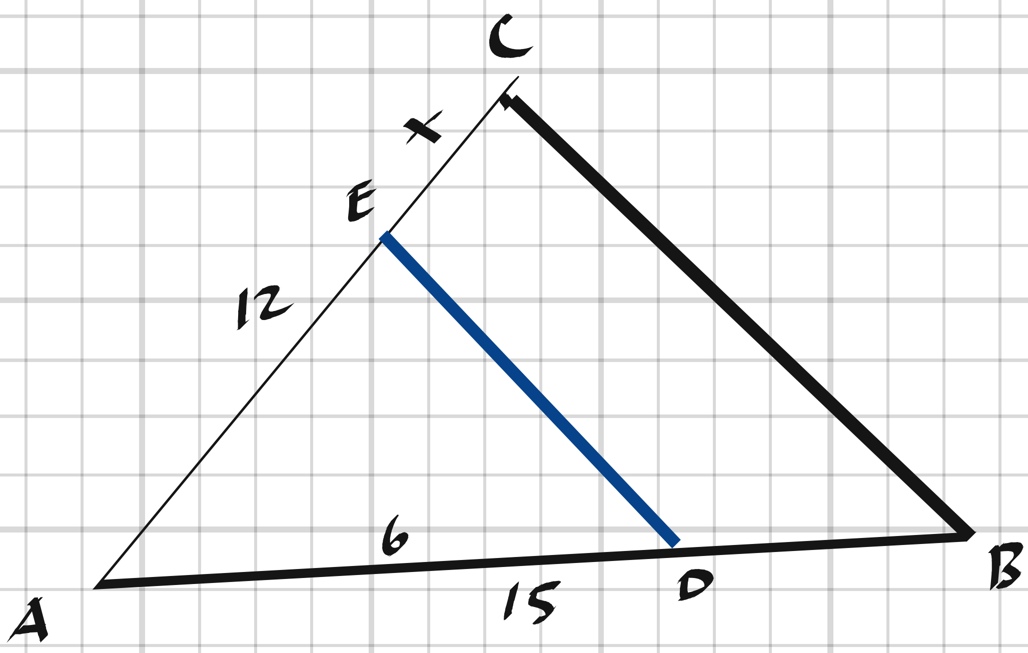
4323 I triangeln ABC är $AB =$ 15,0 cm och $AC =$ 12,0 cm. En rät linje parallell med BC träffar AB i D och AC i E.

Man vet att $AD =$ 6,0 cm.

Bestäm CE.

$CE = x$

4323.



$$\frac{x}{12-x} = \frac{15-6}{6}$$

$$6x = 9(12-x)$$

$$15x = 108$$

$$x = 7{,}2 \text{ cm}$$

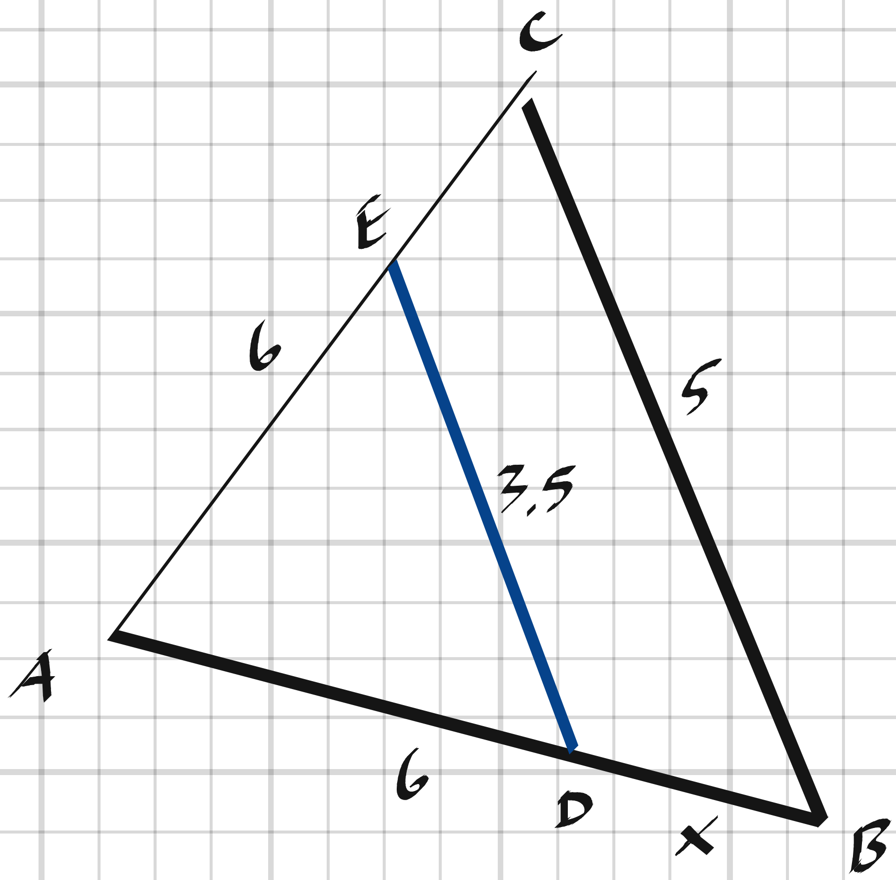
4324 I triangeln ABC är $AB = 6{,}0$ cm, $AC = 6{,}0$ cm och $BC = 5{,}0$ cm.

En rät linje parallell med BC skär AB i D och AC i E, så att $DE = 3{,}5$ cm.

Beräkna sträckan BD.

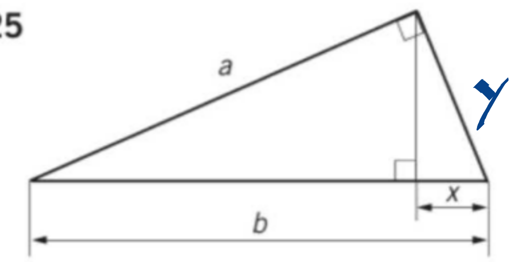
$BD = x$

4324.



$$\frac{6-x}{3{,}5} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = 6 - \frac{6 \cdot 3{,}5}{5} = \underline{1{,}8 \text{ cm}}$$

4325



Visa att $x = \dfrac{b^2 - a^2}{b}$

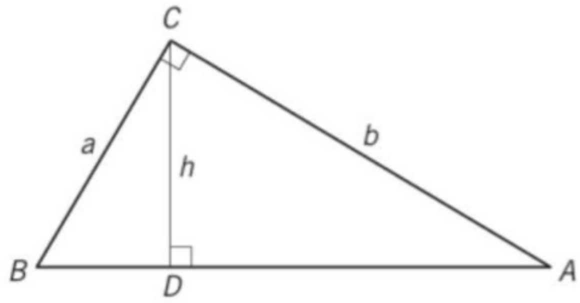
$$y^2 = b^2 - a^2$$

4325.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

$$x = \frac{y^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b} \quad \#$$

4330



a) Motivera varför $\triangle ABC$ och $\triangle BCD$ är likformiga.

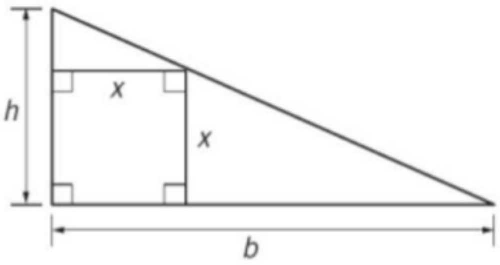
b) Likformigheten ger $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BC}{AB}$

Använd detta och visa att $h = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

4330. a) De delar en vinkel $\angle A$ och har bägge en annan vinkel $90°$

b) $\dfrac{h}{b} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow h = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4331



a) Motivera varför $\frac{x}{b} = \frac{h-x}{h}$

b) Visa att likheten i a) ger att $x = \frac{bh}{b+h}$

4331. a) Topptriangeln är likformig med den stora triangeln.

b) $$\frac{x}{b} = \frac{h-x}{h}$$

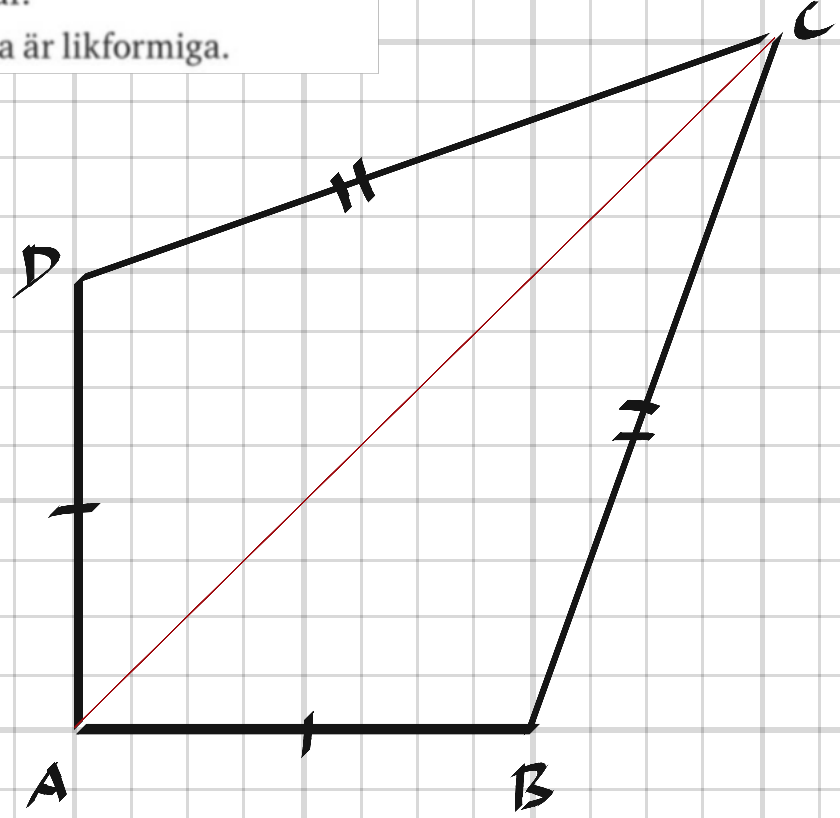
$$hx = b(h-x)$$

$$(h+b)x = bh$$

$$x = \frac{bh}{b+h} \quad \#$$

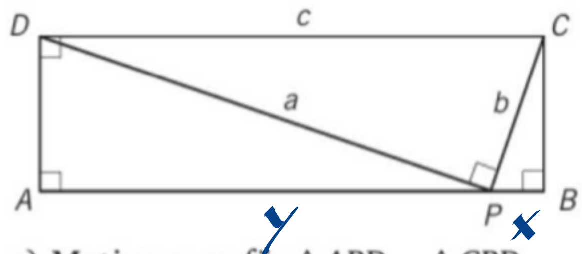
4332 I en fyrhörning $ABCD$ är $AB = AD$ och $BC = CD$. Diagonalen AC delar fyrhörningen i två trianglar.
Förklara varför trianglarna är likformiga.

4332.



$\triangle ABC \sim \triangle ACD$ då motsvarande sidor och vinklar är lika.

4333



a) Motivera varför $\triangle APD \sim \triangle CPD$.

b) Låt $AP = y$ och $BP = x$.
Skriv ett uttryck för y som innehåller a och c och ett uttryck för x som innehåller b och c.

c) Använd uttrycken i b) för att bevisa Pythagoras sats.

4333. a) De har samma vinklar:
90° samt $\angle PDC = \angle APD$ (alternatvinklar)

b) $\dfrac{y}{a} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow y = \dfrac{a^2}{c}$

$\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow x = \dfrac{b^2}{c}$

c) $c = x + y = \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{a^2}{c} \Rightarrow$

$c^2 = a^2 + b^2$

4334 För två likformiga månghörningar med arean A_1 och A_2 där motsvarande sträckor är a_1 och a_2 gäller att $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$

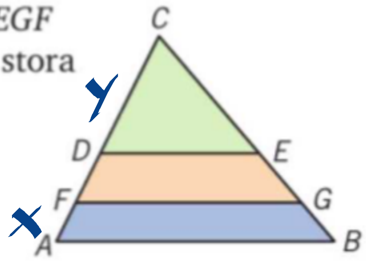
Detta kan skrivas

Areaskalan = (Längdskalan)^2

I triangeln ABC är DE och FG parallelltransversaler. Områdena CDE, $DEGF$ och $FGBA$ har lika stora areor.

Visa att

$$\frac{FA}{CD} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$



$FA = x$

$CD = y$

4334.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{y} = \sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{y+z}{y} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$(\sqrt{3}-1)y - x = (\sqrt{2}-1)y$$

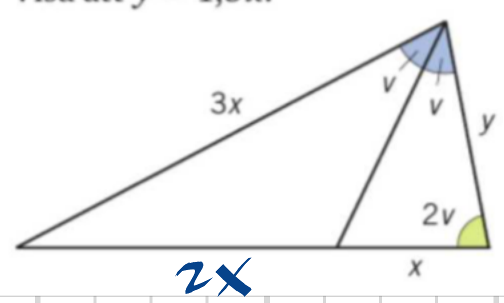
$$\frac{(\sqrt{3}-1)y - x}{y} = \frac{(\sqrt{2}-1)y}{y}$$

$$\sqrt{3} - 1 - \frac{x}{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

#

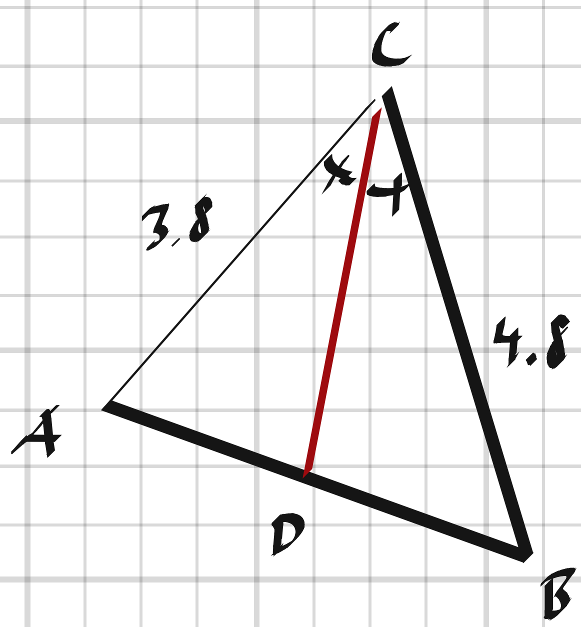
4339 Visa att $y = 1{,}5x$.



4339. Stora triangeln är likbent =>

$$\frac{y}{x} = \frac{3x}{2x} \Rightarrow y = 1{,}5x \qquad \#$$

4340 I $\triangle ABC$ ligger punkten D på AB så att CD är en bisektris. $BC = 4{,}8$ cm och $AC = 3{,}8$ cm. Visa att BD är ungefär 25 % längre än AD.



4340.

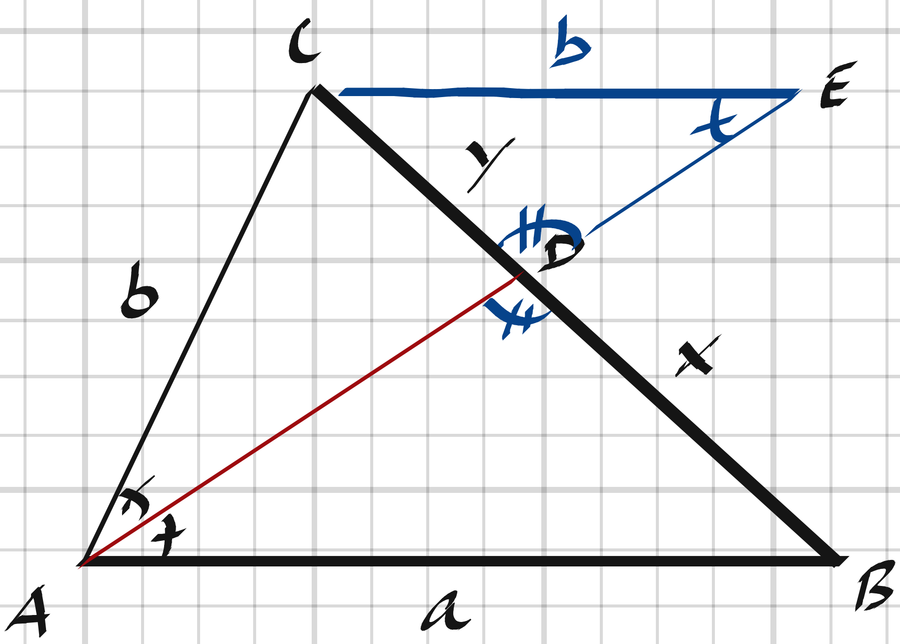
$$\frac{BD}{4{,}8} = \frac{AD}{3{,}8} \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{4{,}8}{3{,}8} \approx 1{,}25 \qquad \#$$

4341 Läs igenom beviset för bisektrissatsen.

Rita sedan en figur och genomför beviset på egen hand. Kom ihåg att motivera varje steg.

4341.



$\angle DAB = \angle AEC$ (alternatvinklar) $\Rightarrow$

$\angle CDE = \angle ADB$ (vertikalvinklar)

$\Delta CDE \sim \Delta ABD$

ΔACE likbent $\Rightarrow$ $CE = AC = b$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad \#$$

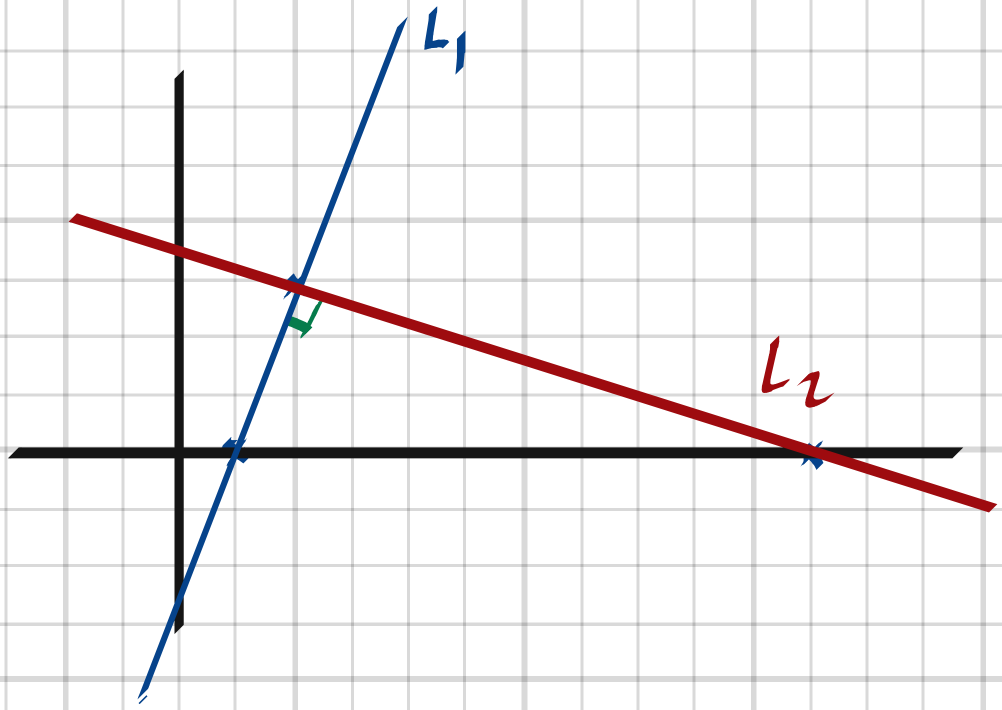
4408 Linjen L_1 går genom punkterna (1, 0) och (2, 3).

Linjen L_2 går genom punkterna (2, 3) och (11, 0).

Linjerna bildar tillsammans med x-axeln en triangel.

Visa att triangeln är rätvinklig utan att använda Pythagoras sats.

4408.



$k_{L1} = 3$, $k_{L2} = -\frac{1}{3}$

$k_{L1} \cdot k_{L2} = -1 \Rightarrow$ vinkelräta

4409 Undersök om triangeln är rätvinklig, om hörnen ligger i punkterna

a) (–4, –2), (–1, 4) och (3, 2)

b) (–1, 7), (0, –3) och (4, 0)

4409.

a) $d_1^2 = (-4+1)^2 + (-2-4)^2 = 9 + 36 = 45$

$d_2^2 = (-1-3)^2 + (4-2)^2 = 16 + 4 = 20$

$d_3^2 = (-4-3)^2 + (-2-2)^2 = 49 + 16 = 65$

$d_1^2 + d_2^2 = 45 + 20 = 65 = d_3^2 \Rightarrow$ Vinkelrät

b) $d_1^2 = (-1-0)^2 + (7+3)^2 = 1 + 100 = 101$

$d_2^2 = (0-4)^2 + (-3-0)^2 = 16 + 9 = 25$

$d_3^2 = (-1-4)^2 + (7-0)^2 = 25 + 49 = 74$

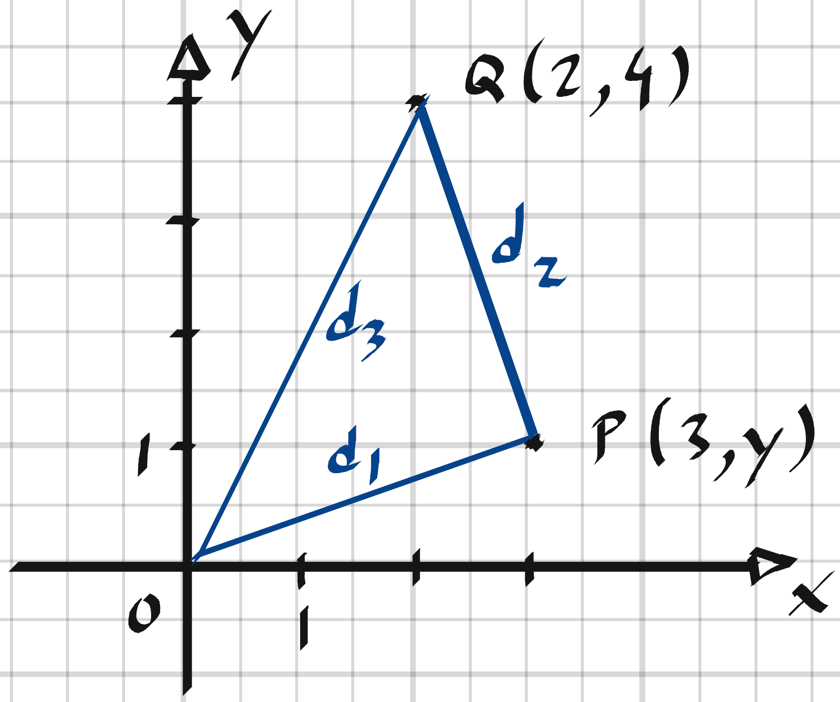
$d_3^2 + d_2^2 = 74 + 25 = 99 \neq d_1^2 \Rightarrow$ Ej vinkelrät.

4410 Punkten $P(3, y)$ ligger lika långt från origo, O, som från punkten $Q(2,4)$.

a) Bestäm y.

b) Visa att sträckan OP är vinkelrät mot sträckan PQ.

4410.



a) $d_1^2 = 3^2 + y^2$

$d_2^2 = (3-2)^2 + (y-4)^2$

$d_1 = d_2 \Rightarrow d_1^2 = d_2^2 \Rightarrow$

$9 + y^2 = 1 + y^2 - 8y + 16$

$y = \dfrac{1+16-9}{8} = \underline{1}$

b) $d_3^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$d_1^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

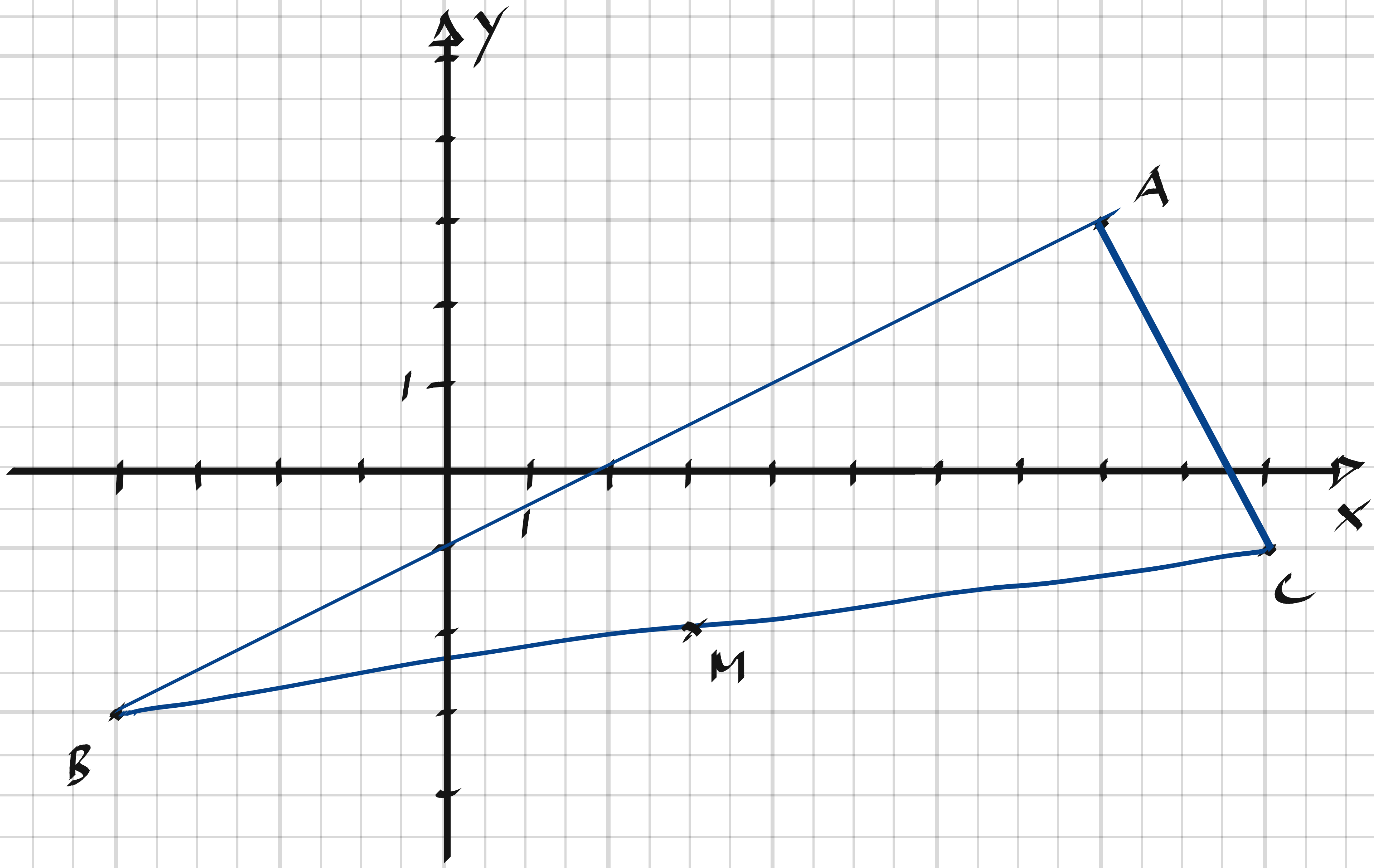
$d_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

$d_1^2 + d_2^2 = d_3^2 \Rightarrow$ vinkelrät #

4411 $A(8, 3)$, $B(-4, -3)$ och $C(10, -1)$ är hörn i en triangel.

Visa att mittpunkten M på sidan BC ligger lika långt från triangelns alla hörn.

4411.



$$M = \left(\frac{-4+10}{2}, \frac{-3+(-1)}{2}\right) = (3, -2)$$

$$BM = \sqrt{(-4-3)^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{50}$$

$$MC = \sqrt{(3-10)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{50}$$

$$MA = \sqrt{(8-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{50}$$

#

4412 Punkten (x, 0) ligger 10 längdenheter från punkten (2, 6). Bestäm x.

4412.

$$(x-2)^2+(0-6)^2=10^2$$

$$x^2-4x+4+36=100$$

$$x^2-4x-60=0$$

$$(x-10)(x+6)=0$$

$$x_1=10, \quad x_2=-6$$

4413 $M(2{,}5; -4{,}5)$ är mittpunkt på sträckan AB. Koordinaterna för punkten A är (–3, 2). Bestäm koordinaterna för punkten B.

4413.

$$\frac{-3+x_B}{2}=2{,}5 \implies x_B=5+3=8$$

$$\frac{2+y_B}{2}=-4{,}5 \implies y_B=-9-2=-11$$

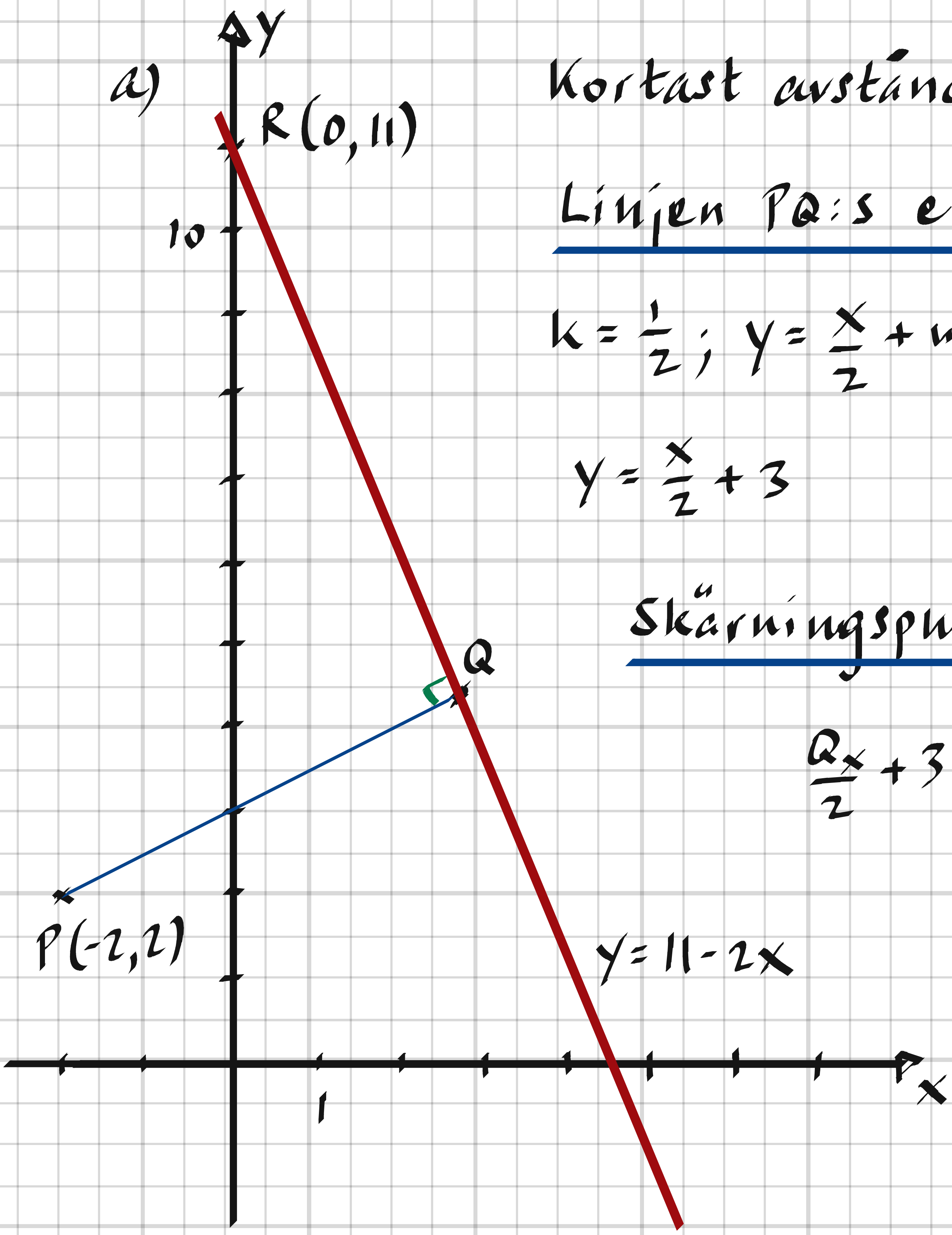
$$B=(x_B, y_B)=(8,-11)$$

4414 Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten $(-2, 2)$ och linjen $2x + y = 11$.

a) Svara exakt.

b) Svara med ett närmevärde.

a)



Kortast avstånd då $PQ \perp QR \Rightarrow$

Linjen PQ:s ekvation:

$k = \frac{1}{2}$; $y = \frac{x}{2} + m$; $2 = \frac{-2}{2} + m \Rightarrow m = 3$

$y = \frac{x}{2} + 3$

Skärningspunkt Q:

$\frac{Q_x}{2} + 3 = 11 - 2Q_x$

$\frac{5Q_x}{2} = 8$

$Q_x = \frac{16}{5}$, $Q_y = \frac{23}{5}$

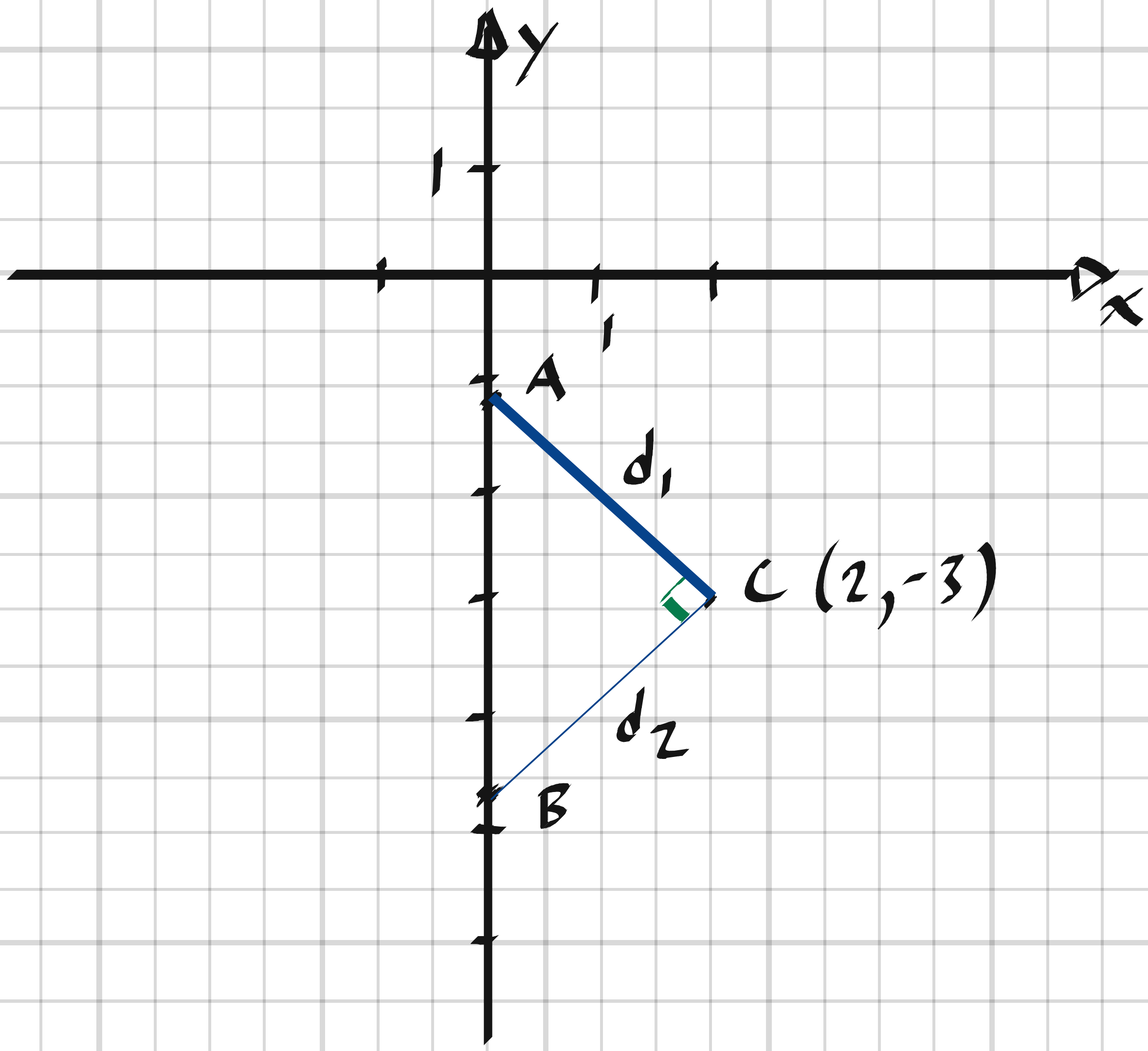
a) Avståndet $PQ = \sqrt{\left(-2-\frac{16}{5}\right)^2 + \left(2-\frac{23}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2}$ l.e.

b) 5,81 l.e.

4415 För den rätvinkliga triangeln ABC gäller att hypotenusan AB är 5 längdenheter och ligger på y-axeln. Hörnet C ligger i punkten $(2, -3)$.

Bestäm möjliga koordinater för punkt A och B.

4415.



$$d_1^2 = (0-2)^2 + (A_y+3)^2 = A_y^2 + 6A_y + 13$$

$$d_2^2 = (0-2)^2 + (B_y+3)^2 = B_y^2 + 6B_y + 13$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_y^2 + 6A_y + B_y^2 + 6B_y + 26 = 25 \\ B_y = A_y - 5 \end{cases}$$

$$A_y^2 + 6A_y + (A_y-5)^2 + 6(A_y-5) + 1 = 0$$

$$A_y^2 + 6A_y + A_y^2 - 10A_y + 25 + 6A_y - 30 + 1 = 0$$

$$2A_y^2 + 2A_y - 4 = 0$$

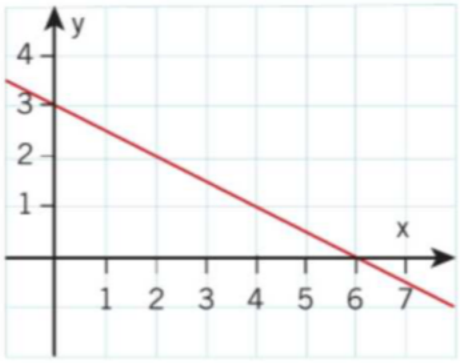
$$A_y^2 + A_y - 2 = 0$$

$$(A_y - 1)(A_y + 2) = 0$$

$$A_{y_1} = 1 \quad , \quad B_{y_1} = -4$$

$$A_{y_2} = -2 \quad , \quad B_{y_2} = -7$$

4424 Figuren visar grafen till $y = 3 - 0{,}5x$.



a) Bestäm ekvationen till en rät linje som är vinkelrät mot $y = 3 - 0{,}5x$ och som går genom origo.

[b] Bestäm det kortaste avståndet mellan linjen $y = 3 - 0{,}5x$ och origo.

4424.

a) $k = 2$

$y = 2x + m$

$(0,0) \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \underline{y = 2x}$

b) Skärningspunkt:

$2x = 3 - 0{,}5x$

$\frac{5x}{2} = 3$

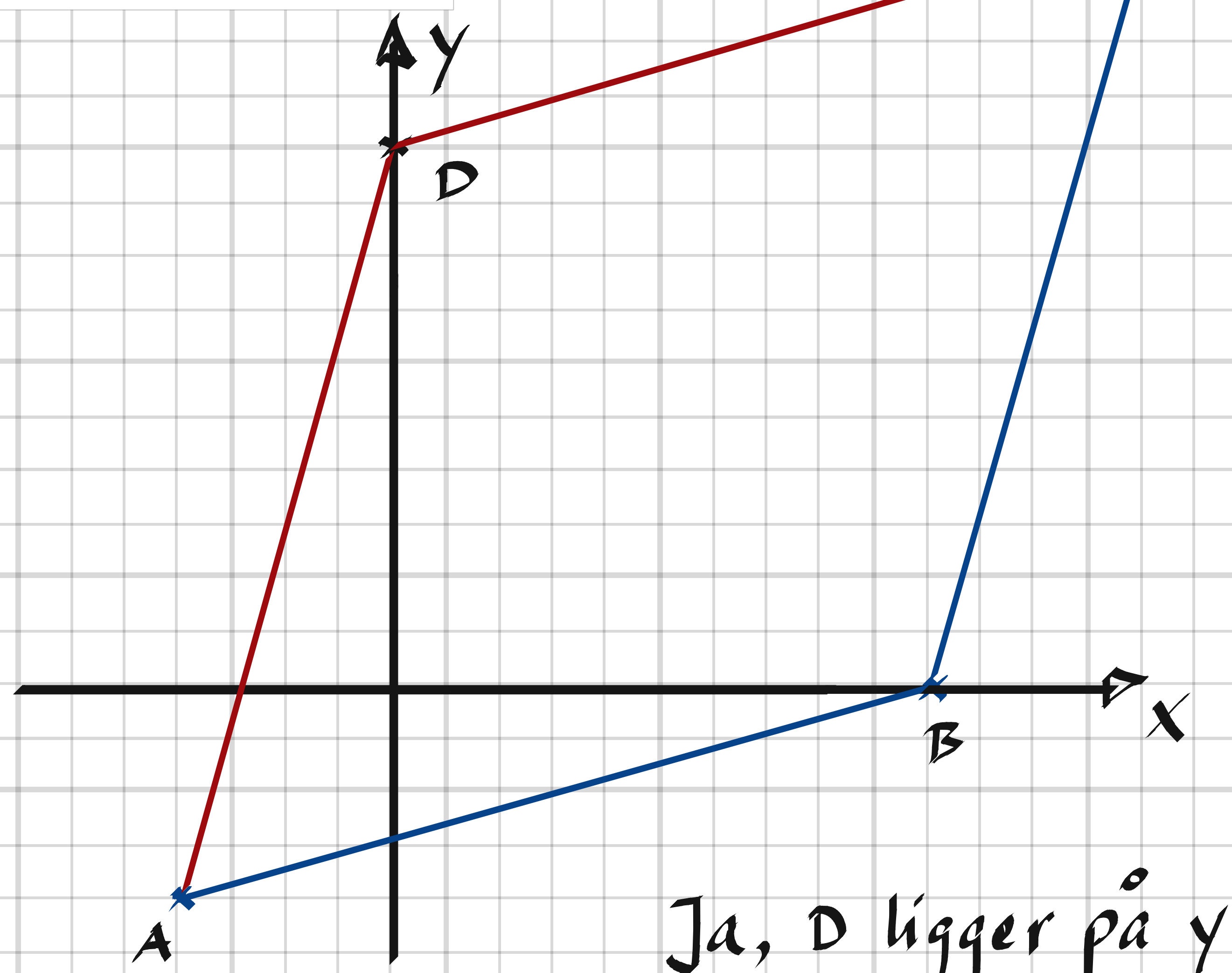
$x = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{12}{5}$

Avståndet $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{36+144}{25}} = \frac{\sqrt{180}}{5} \approx \underline{2{,}7 \text{ l.e.}}$

4425 En romb är en fyrhörning där alla sidor är lika långa.

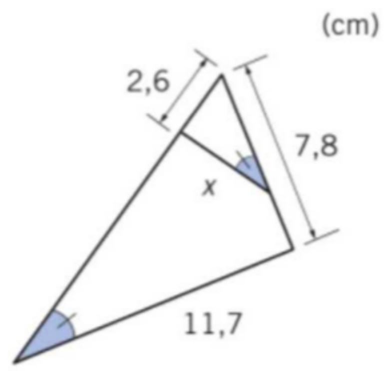
Rita en figur och undersök om romben $ABCD$ där $A = (-2, -2)$, $B = (5, 0)$ och $C = (7, 7)$ har hörnet D på y-axeln.

4425.



Ja, D ligger på y-axeln.

4426 Bestäm sträckan x.



4426.

$$\frac{x}{2,6} = \frac{11,7}{7,8}$$

$$x = \frac{2,6 \cdot 11,7}{7,8} = \underline{3,9 \text{ cm}}$$

4427 En mittpunktsnormal till en sträcka AB är en linje som är vinkelrät mot AB och delar AB mitt itu.

Bestäm ekvationen för mittpunktsnormalen till sträckan AB om $A = (-2, 2)$ och $B = (6, 6)$.

4427.

Linjen AB:

$$k = \frac{6-2}{6-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$(6,6) \Rightarrow \frac{6}{2} + m = 6 \Rightarrow m = 3$$

$$y_{AB} = \frac{x}{2} + 3$$

Mittpunkt: $\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2,4)$

Mittpunktsnormalen:

$$k = -2$$

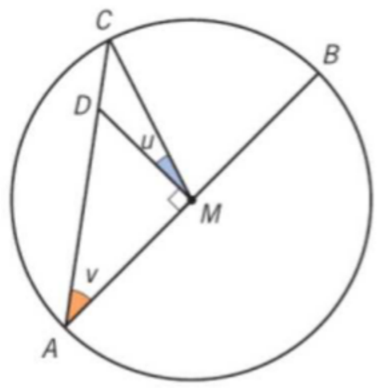
$$(2,4) \Rightarrow -2 \cdot 2 + m = 4 \Rightarrow m = 8$$

$$y = -2x + 8$$

4428 Triangeln ACM är inskriven i en cirkel med medelpunkten M och punkterna A och C på cirkelns rand.

Punkten D ligger på sträckan AC så att vinkeln AMD är rät.

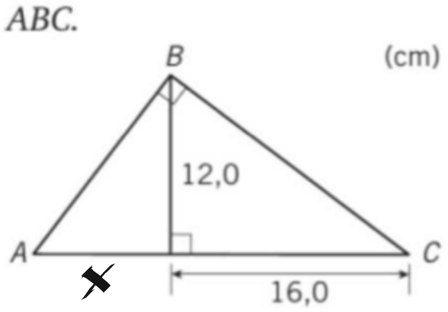
Visa att $u = 90° - 2v$



4428. $\angle CMB = 2v$ (medelpunktsvinkel till v)

$\angle AMD$ rät $\Leftrightarrow$ $\angle DMB$ rät $\Rightarrow$ $u = 90° - 2v$ #

4429 Bestäm arean av den rätvinkliga triangeln ABC.



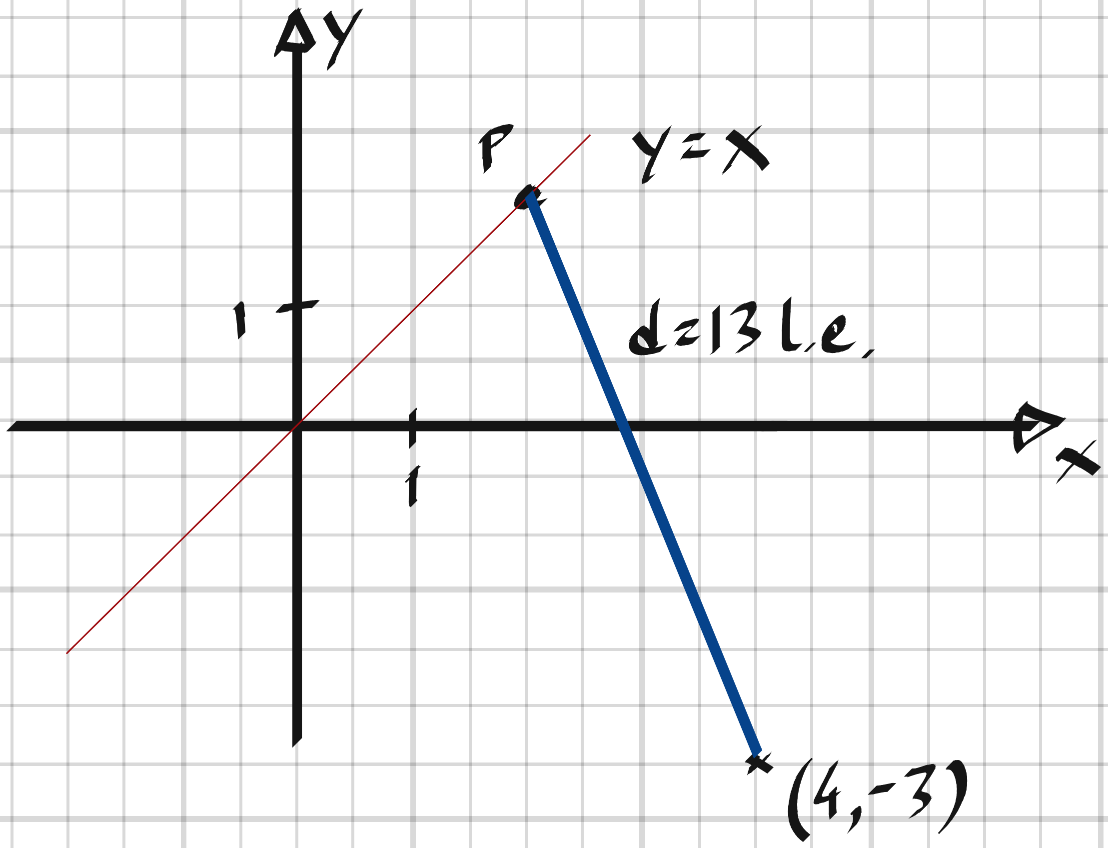
4429. $\frac{x}{12} = \frac{12}{16} \Rightarrow x = \frac{144}{16}$

$$A = \frac{(16+x)\cdot 12}{2} = \left(16 + \frac{144}{16}\right)\cdot 6 = \underline{150 \text{ cm}^2}$$

4430 Punkten P ligger på linjen $y = x$. Avståndet från punkten P till punkten (4, –3) är 13 l.e.

Bestäm x-koordinaten för punkten P om $x > 0$.

4430.



$$\begin{cases} (P_x-4)^2+(P_y+3)^2 = d^2 \\ P_y = P_x \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_x^2 - 8P_x + 16 + P_x^2 + 6P_x + 9 = 13^2$$

$$2P_x^2 - 2P_x - 144 = 0$$

$$P_x^2 - P_x - 72 = 0$$

$$P_x = \frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{1+72\cdot 4}{4}} = \frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{17}{2} = \underline{9}$$

4431 Linjerna $y = 3x - 4$ och $y = kx + 4$ skär varandra i en punkt P så att avståndet från P till origo är $\sqrt{8}$ längdenheter. Bestäm k.

4431.

Skärningspunkt:

$$3x - 4 = kx + 4$$

$$x = \frac{8}{3-k} \quad , \quad y = \frac{3 \cdot 8}{3-k} - 4 = \frac{12 + 4k}{3-k}$$

Avstånd:

$$x^2 + y^2 = 8 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{64}{(3-k)^2} + \frac{(12+4k)^2}{(3-k)^2} = 8$$

$$64 + (12+4k)^2 = 8(3-k)^2$$

$$64 + 144 + 96k + 16k^2 = 72 - 48k + 8k^2$$

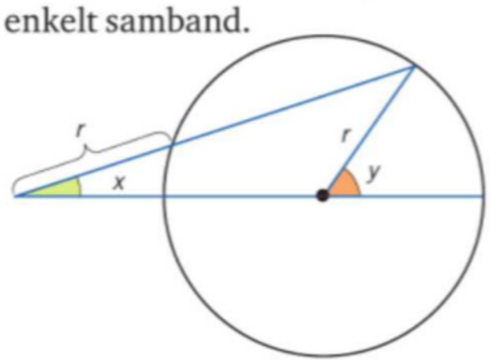
$$8k^2 + 144k + 136 = 0$$

$$k^2 + 18k + 17 = 0$$

$$k = -9 \pm \sqrt{81 - 17} = -9 \pm 8$$

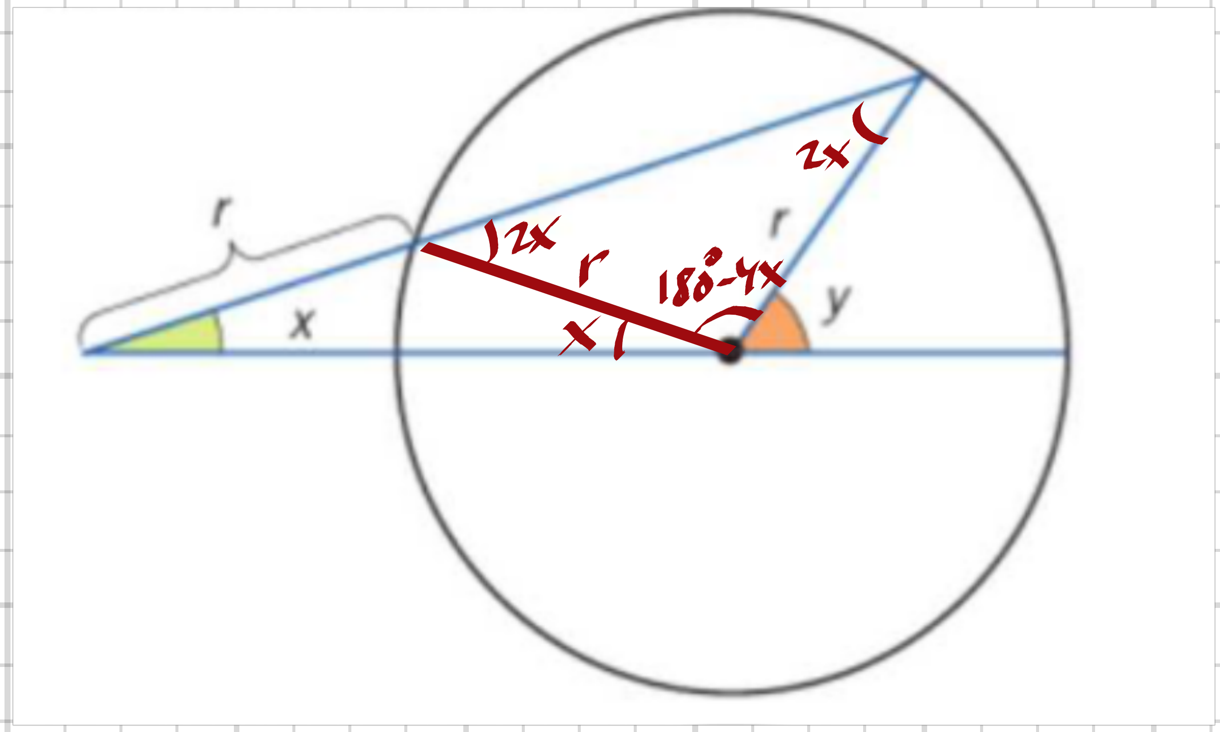
$$k_1 = -17 \quad , \quad k_2 = -1$$

4432 Mellan vinklarna x och y finns ett enkelt samband.



Bestäm detta samband.

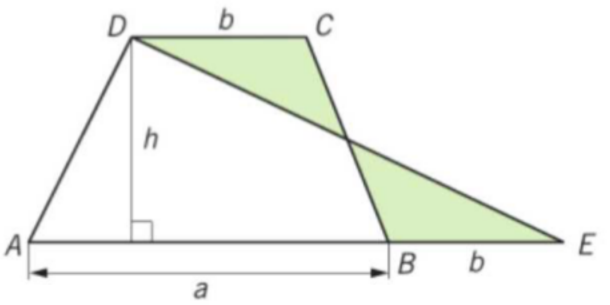
4432.



$$(180° - 4x) + x + y = 180° \Rightarrow$$

$$\underline{y = 3x}$$

4433 Fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets. De två färgade trianglarna i figuren har samma form och storlek.
Använd triangeln ADE och visa formeln för parallelltrapetsets area.



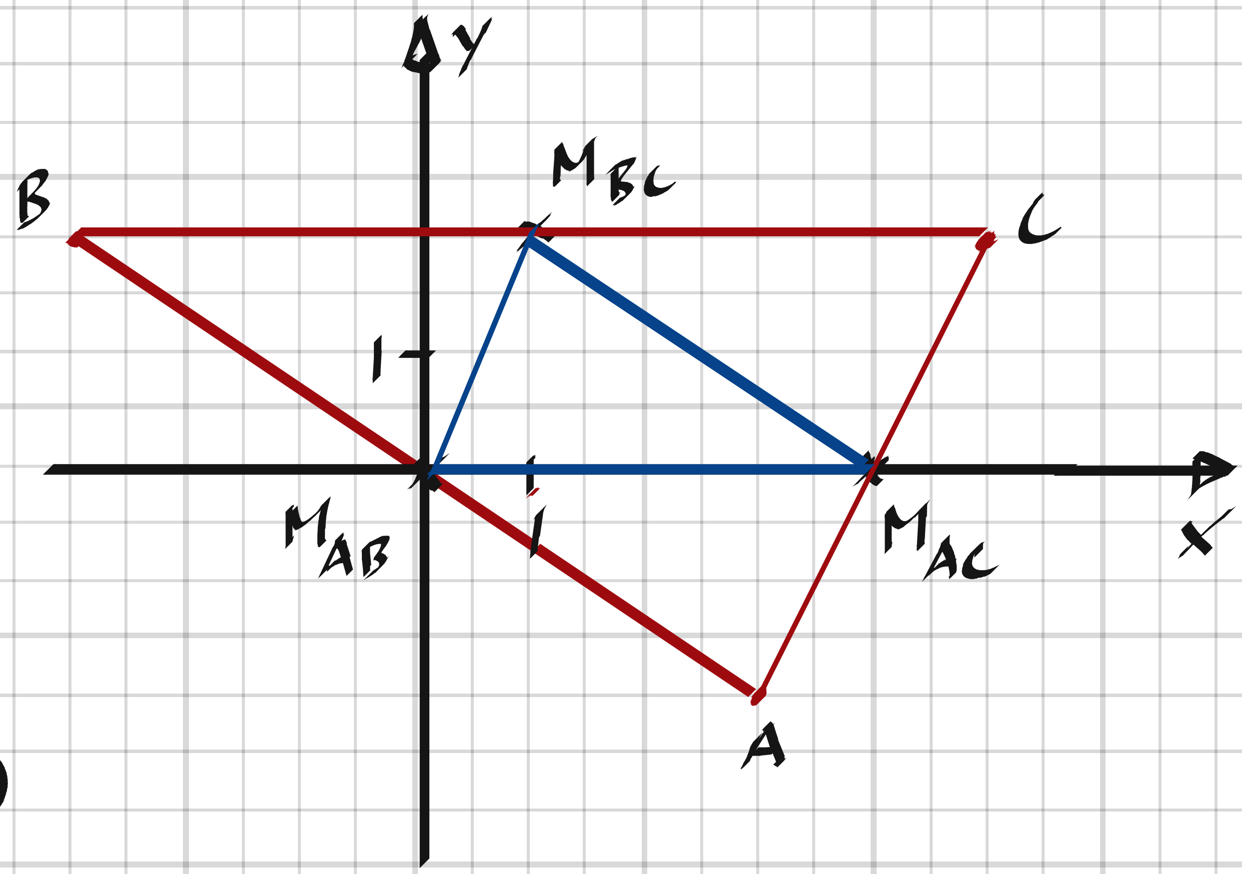
4433.

Arean av ΔADE = Arean av parallelltrapetsen

$$\frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

#

4434 En triangels hörn är $A(3, -2)$, $B(-3, 2)$ och $C(5, 2)$.
Bestäm arean av den triangel som har sina hörn i mittpunkterna på triangeln ABC:s sidor.



$$M_{BC} = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1, 2)$$

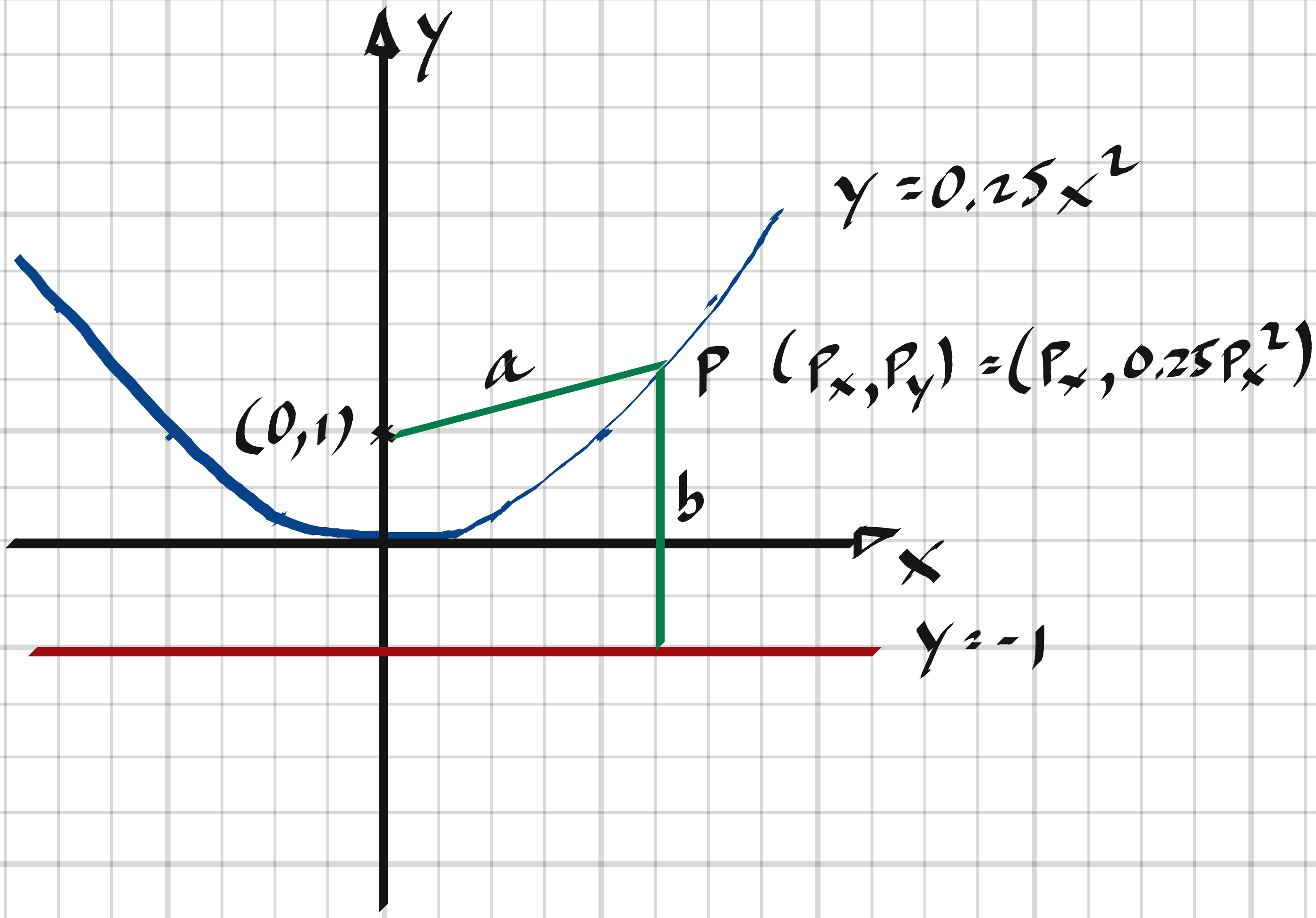
$$M_{AB} = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (0, 0)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (4, 0)$$

$$\text{Arean} = \frac{4\cdot 2}{2} = \underline{4 \text{ a.e.}}$$

4435 Visa att alla punkter på parabeln $y = 0{,}25x^2$ har samma avstånd till punkten (0, 1) som till linjen $y = -1$.

4435,



$$\begin{cases} a^2 = P_x^2 + (P_y - 1)^2 \\ b = P_y + 1 = 0{,}25P_x^2 + 1 \end{cases}$$

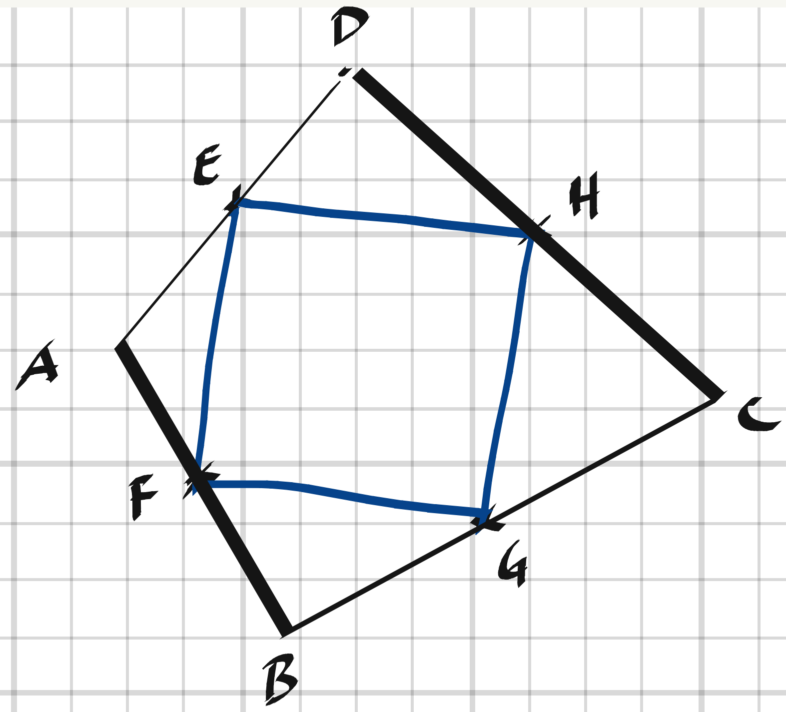
$$a^2 = P_x^2 + (0{,}25P_x^2 - 1)^2$$

$$a^2 = P_x^2 + 0{,}0625P_x^4 - 0{,}5P_x^2 + 1$$

$$a^2 = 0{,}0625P_x^4 + 0{,}5P_x^2 + 1 = (0{,}25P_x^2 + 1)^2 \Rightarrow$$

$$a = 0{,}25P_x^2 + 1 = b \quad \#$$

4436 *ABCD* är en fyrhörning. *E*, *F*, *G* och *H* är mittpunkter på fyrhörningens sidor.
Visa att fyrhörningen *EFGH* alltid är en parallellogram.



4436

$$E = \left(\frac{A_x + D_x}{2}, \frac{A_y + D_y}{2}\right)$$

$$F = \left(\frac{A_x + B_x}{2}, \frac{A_y + B_y}{2}\right)$$

$$G = \left(\frac{B_x + C_x}{2}, \frac{B_y + C_y}{2}\right)$$

$$H = \left(\frac{C_x + D_x}{2}, \frac{C_y + D_y}{2}\right)$$

$$k_{EF} = \frac{\frac{A_y + B_y}{2} - \frac{A_y + D_y}{2}}{\frac{A_x + B_x}{2} - \frac{A_x + D_x}{2}} = \frac{B_y - D_y}{B_x - D_x}$$

$$k_{GH} = \frac{\frac{C_y + D_y}{2} - \frac{B_y + C_y}{2}}{\frac{C_x + D_x}{2} - \frac{B_x + C_x}{2}} = \frac{D_y - B_y}{D_x - B_x} = k_{EF}$$

EF och GH är alltså parallella.

Samma gäller för FG och EH. #