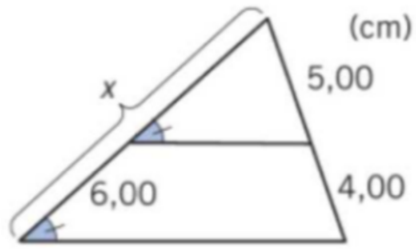
17 Beräkna längden av sträckan x.



17. $$\frac{x-6}{6} = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \cdot 5}{4} + 6 = 13.5 \text{ cm}$$

---

18 a) Det finns oändligt många andragradsekvationer som har två negativa rötter. Ge ett exempel på en sådan ekvation.

b) Det finns oändligt många andragradsfunktioner som har två negativa nollställen och en graf med en maximipunkt. Ge ett exempel på en sådan funktion.

18. a) $f(x) = (x+1)(x+2) = \underline{x^2 + 3x + 2}$

b) $g(x) = -(x+1)(x+2) = \underline{-x^2 - 3x - 2}$

---

19 Lös ekvationerna.

a) $(2x + 1)^2 = 4x + 37$

b) $2x = 10^{\lg 2} \cdot 10^{\lg 4}$

c) $10^x = 50 \cdot \lg 100$

19.

a) $4x^2 + 4x + 1 = 4x + 37$

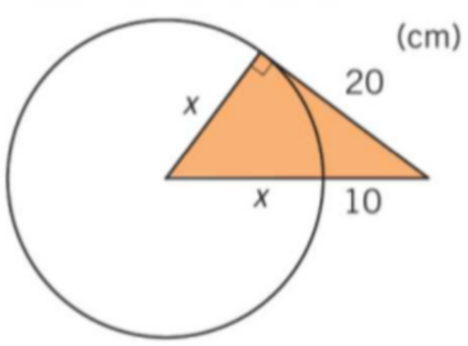
$4x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 3$

b) $2x = 2 \cdot 4 \Rightarrow x = 4$

c) $x = \lg(50 \cdot \lg 100) = \lg 100 = 2$

---

20 Bestäm cirkelns radie.



20.

$(x + 10)^2 = x^2 + 20^2$

$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 400$

$20x = 300$

$x = 15$ cm

---

21 Funktionen f är en andragradsfunktion.
Bestäm $f(10)$ om $f(0) = -5$, $f(1) = 0$ och $f(3) = 22$.

21. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = -5 \Rightarrow c = -5$

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b - 5 = 0$

$f(3) = 22 \Rightarrow 9a + 3b - 5 = 22$

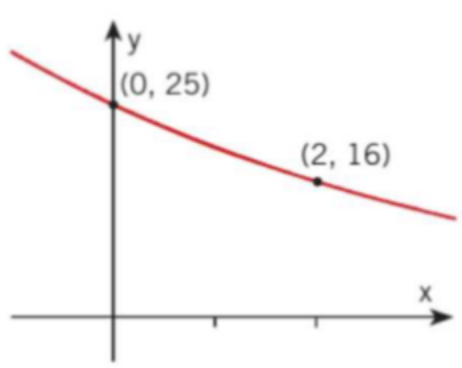
$$-\begin{cases} 9a + 9b = 45 \\ 9a + 3b = 27 \end{cases}$$

$6b = 18$

$b = 3$, $a = 2$ $\Rightarrow$ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

---

22 Bestäm ekvationen för den exponentialfunktion vars graf visas i diagrammet.



22. $y = c \cdot a^x$

$(0, 25) \Rightarrow c = 25$

$(2, 16) \Rightarrow 25 \cdot a^2 = 16 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x$

---

23 Beräkna avståndet mellan punkterna

$\left(0, \frac{1}{3}\right)$ och $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$

23.

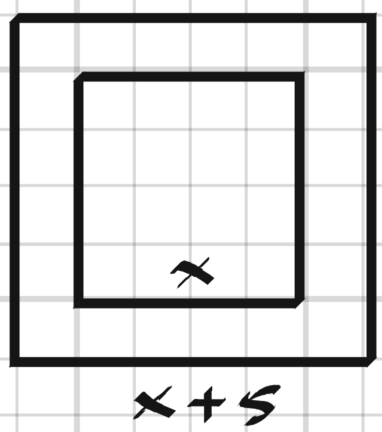
$$d = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{9}{36}} = \frac{5}{6}$$

---

24 Martin har en kvadratisk uteplats. Han planerar att förlänga varje sida på uteplatsen med 5 meter. Den nya blir då 100 m^2 större än den gamla.

Vilka mått har uteplatsen i dag?

24.



$$(x+5)^2 = x^2 + 100$$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 100$$

$$x = 7.5$$

Uteplatsen har måtten 7.5 × 7.5 m

---

25 Vilken information ger grafen till andragradsfunktionen $y = (x-2)^2 + 5$ om lösningen till ekvationen $(x-2)^2 + 5 = 0$?

Förklara.

25. Kurvan (parabeln) har sitt minimum i punkten (2,5) och ekvationen saknar reella lösningar.

---

26 En rät linje går genom punkterna (0, –2) och (18, a) och saknar skärningspunkt med linjen $y = \frac{x}{2} + 7$

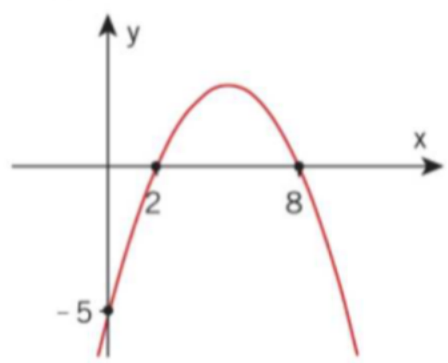
Bestäm talet a.

26. Saknar skärningspunkt $\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$$\frac{a-(-2)}{18-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 7$$

---

27 Grafen till en andragradsfunktion visas i diagrammet.



Undersök om grafen kan gå genom punkten (18, –48). Motivera ditt svar.

27. $y = a(x-2)(x-8)$

$$y(0) = -5 \Rightarrow a\cdot(-2)\cdot(-8) = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{16}$$

$$y = -\frac{5}{16}(x-2)(x-8)$$

$$y(18) = -\frac{5}{6}(18-2)(18-8) = -\frac{5}{6}\cdot 16\cdot 10 = -\frac{400}{3} \neq -48$$

$y(18) \neq -48 \Rightarrow$ Nej, grafen går ej genom punkten

---

28 Albert påstår följande:

”Om differensen mellan två positiva tal är 2, är differensen mellan det större talets kvadrat och det mindre talets kvadrat dubbelt så stor som talens summa.”

Visa att Albert har rätt.

28.

$$a - b = 2$$

$$a^2 - b^2 = 2(a+b)$$

$$VL = a^2 - (a-2)^2 = a^2 - a^2 + 4a - 4 = 4a - 4$$

$$HL = 2(a + a - 2) = 4a - 4 = VL \quad \#$$

---

29 a) Lös ekvationen

$x^2 - 2kx + 36 = 0$ då $k = 10$.

b) För vilka värden på talet k har ekvationen $x^2 - 2kx + 36 = 0$ precis en rot (dubbelrot)?

c) För vilka värden på talet k saknar ekvationen $x^2 - 2kx + 2k = 0$ reella rötter?

29. a)

$$x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$x = 10 \pm \sqrt{100 - 36} = 10 \pm 8$$

b)

$$k^2 - 36 = 0 \Rightarrow k = \pm 6$$

c)

$$k^2 - 36 < 0 \Rightarrow -6 < k < 6$$

---

30 För en andragradsfunktion f gäller att $f(x) = ax^2 + b$ där a och b är konstanter.

a) För vilka värden på a och b saknar ekvationen $f(x) = 0$ reella lösningar? Motivera ditt svar.

b) Bestäm rötterna till ekvationen $f(x) = 0$ om $f(-1) = -3{,}2$ och $f(2) = -2$.

30. a) $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$

För $a>0, b>0$ och för $a<0, b<0$

b)

$$
-\begin{cases} a + b = -3{,}2 \\ 4a + b = -2 \end{cases}
$$

$3a = 1{,}2 \Rightarrow a = 0{,}4,\ b = -3{,}6$

31 Vi har fått följande information om en datamängd:

MinX = 3.7
Q_1 = 5.6
Q_2 = 6.6
Q_3 = 7.45
MaxX = 8.9

För datamängden gäller att medianen och medelvärdet är samma. Är påståendena sanna eller falska? Motivera.

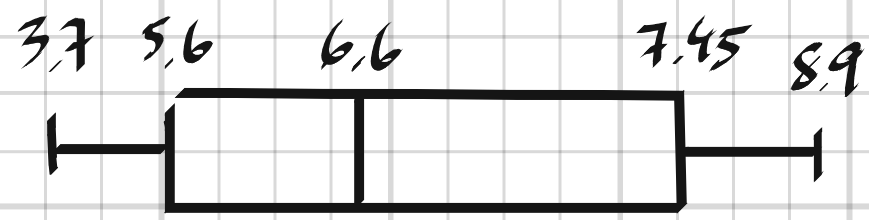
a) Om antal mätvärden, n, är udda vet vi att värdena 3,7; 6,6 och 8,9 finns i datamängden.

b) Om vi lägger till ett värde kommer medianen för datamängden alltid att ändras.

c) Om vi lägger till värdet 3,0 och 9,6 kommer Q_1 och Q_2 att ändras.

d) Om vi lägger till värdet 3,0 och 9,6 kommer datamängdens medelvärde att ändras.

e) Om antal mätvärden, n, är ett jämnt tal vet vi att värdena 5,6 och 7,45 finns i datamängden.



31.

a) Ja, både extremvärdena och medianen måste finnas med i datamängden.

b) Nej, vi kan lägga till värdet 6.6.

c) Ja, Q_1 kommer att minska och Q_2 öka.

d) Ja, medelvärdet kommer att minska $\left(\frac{6.6+3.0+9.6}{3}=6.4\right)$

e) Ja, eftersom då är Q_1 och Q_3 mittvärden i varsin del med udda värden.

32 För en funktion f gäller att $f(x) = 2x + 1$.

För vilket eller vilka x gäller att

a) $f(5x) = f(x) + 12$ b) $f(x^2) = (f(x))^2$?

32.

a) $2 \cdot 5x + 1 = 2x + 1 + 12$

$8x = 12 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $2 \cdot x^2 + 1 = (2x+1)^2$

$2x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1$

$2x^2 + 4x = 0$

$2x(x+2) = 0$

$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -2$

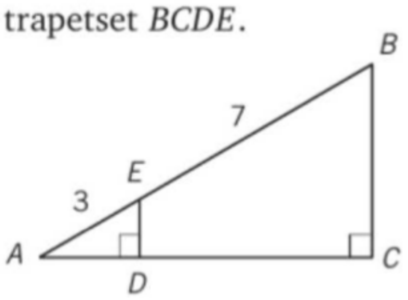
33 För två likformiga månghörningar med areorna A_1 och A_2 där motsvarande sträckor är a_1 och a_2 gäller att

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$$

Detta kan skrivas:

Areaskalan = (Längdskalan)^2

Bestäm förhållandet mellan arean av triangeln ADE och arean av parallelltrapetset $BCDE$.



33. $$\frac{A_{ADE}}{A_{BCDE}} = \frac{A_{ADE}}{A_{ABC} - A_{ADE}} = \left(\frac{A_{ABC}}{A_{ADE}} - 1\right)^{-1} = \left(\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 1\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{100-9}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{91}$$

---

34 Lös ekvationerna.

a) $(x + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(2x + \sqrt{2}) = 4$

b) $x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

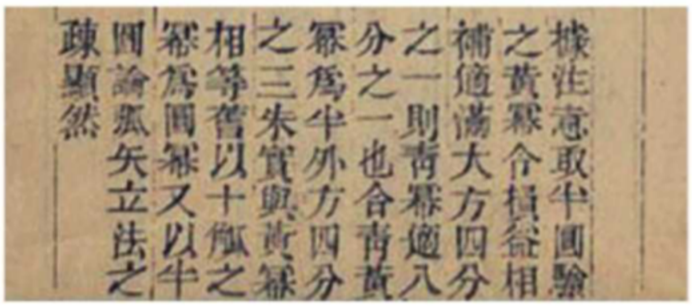
34. a) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 4$

$\underline{x = \pm 2}$

b) $2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$x^{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow \underline{x = 16}$

35

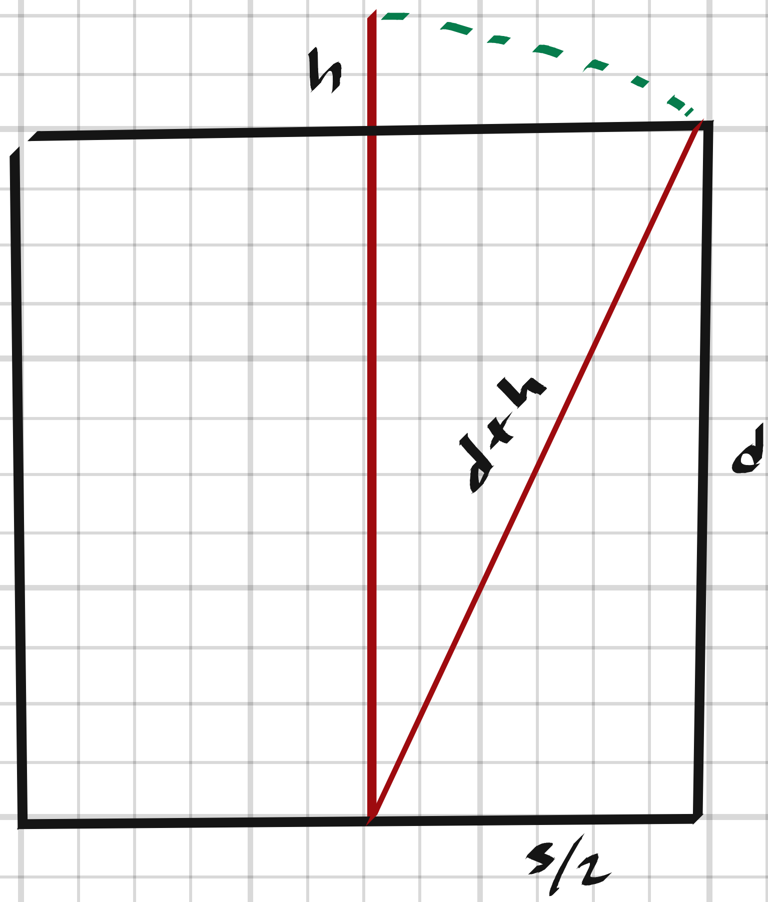


據注意取半圓驗
之黃冪合損益相
補塡滿大方四分
之一則青冪適八
分之一也合青黃
冪爲半外方四分
之三朱實與黃冪
相等舊以十觚之
冪爲圓冪又以半
圓論弧矢立法之
疎顯然

I den 2000 år gamla kinesiska skriften ”Nio kapitel i konsten att räkna” hittar vi följande problem:

”Mitt i en kvadratisk damm med sidan s m växer ett vasstrå som når h m över vattenytan. Om strået dras ut mot dammens kant når det precis upp till ytan. Dammens djup är d m.”

Visa att $d = \frac{s^2}{8h} - \frac{h}{2}$



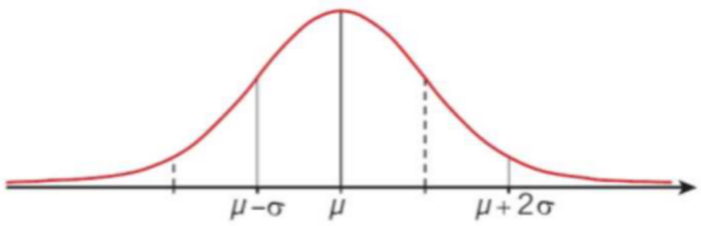
35.

$$(d+h)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + d^2$$

$$d^2 + 2dh + h^2 = \frac{s^2}{4} + d^2$$

$$d = \frac{s^2}{8h} - \frac{h}{2} \quad \#$$

36 Ett normalfördelat material har medelvärdet μ och standardavvikelsen σ.



a) Beräkna medelvärdet om $\mu-\sigma=45$ och $\mu+2\sigma=84$.

b) Skriv ett uttryck för medelvärdet, μ, om $\mu-\sigma=a$ och $\mu+2\sigma=b$.

c) Visa att medelvärdet kan beräknas med uttrycket i b) där a betecknas $\mu-\sigma$ och b betecknas $\mu+2\sigma$.

36. a)

$$-\begin{cases} \mu-\sigma=45 \\ \mu+2\sigma=84 \end{cases}$$

$$3\sigma=39$$

$$\sigma=13\ ,\ \underline{\mu=58}$$

b+c) $3\sigma=b-a$

$$\mu=a-\sigma=a-\frac{b-a}{3}=\frac{3a-(b-a)}{3}=\frac{4a-b}{3}$$

37 Andragradsfunktionen $f(x) = (x - 3a)(x - a)$ har ett minsta värde.
Visa att detta minsta värde är $-a^2$.

37.

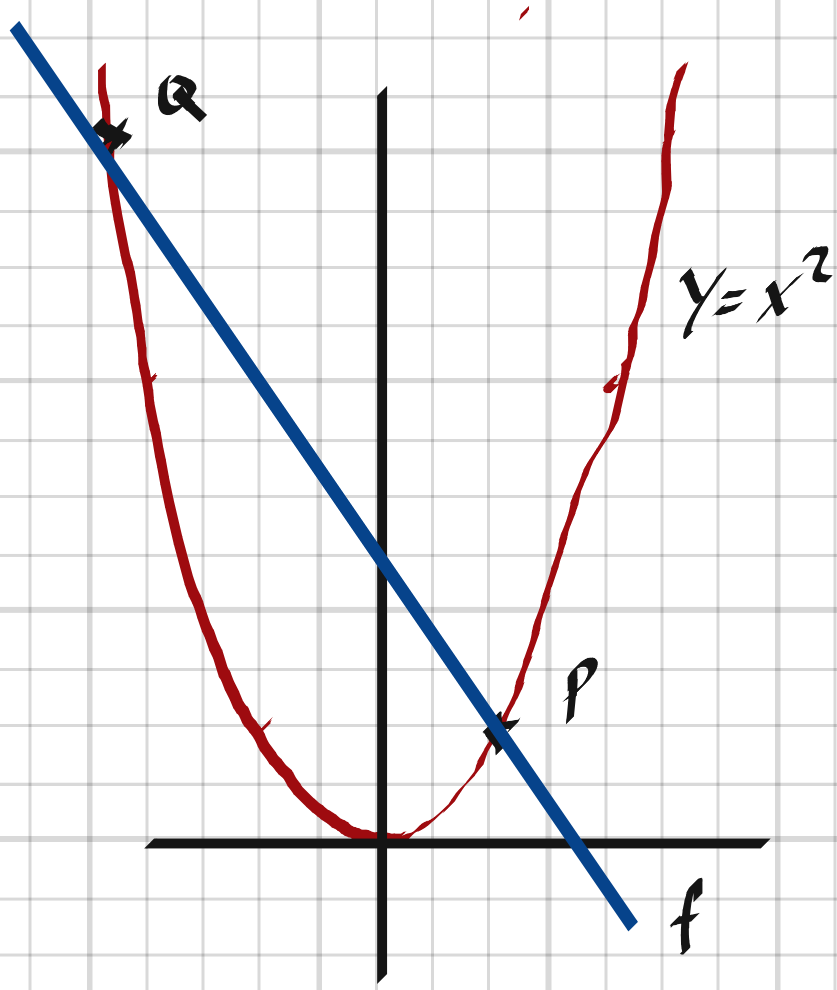
Nollställen: $x_1 = 3a$, $x_2 = a$

Symmetrilinje: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2a$

$f_{min} = f(2a) = (2a - 3a)(2a - a) = -a^2$ #

---

38 Punkten $P = (1, 1)$ och punkten Q ligger båda på grafen till funktionen $y = x^2$.
En rät linje genom P och Q har lutningen -10.
Bestäm koordinaterna för punkten Q.



38.

$k = -10$

$(1,1) \Rightarrow -10 \cdot 1 + m = 1 \Rightarrow m = 11$

$f = -10x + 11$

$f = y \Rightarrow -10x + 11 = x^2$

$x^2 + 10x - 11 = 0$

$x = -5 \pm \sqrt{25 + 11} = -5 \pm 6 = -11$

$Q = (x, f(x)) = \underline{(-11, 121)}$

39 Faktorisera uttrycken så långt som möjligt.

a) $32x^3 - 16x^2 + 2x$ b) $ax + bx - a - b$

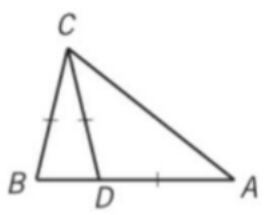
39.

a) $2x(16x^2 - 8x + 1) = \underline{2x(4x-1)^2}$

b) $(a+b)x - (a+b) = \underline{(a+b)(x-1)}$

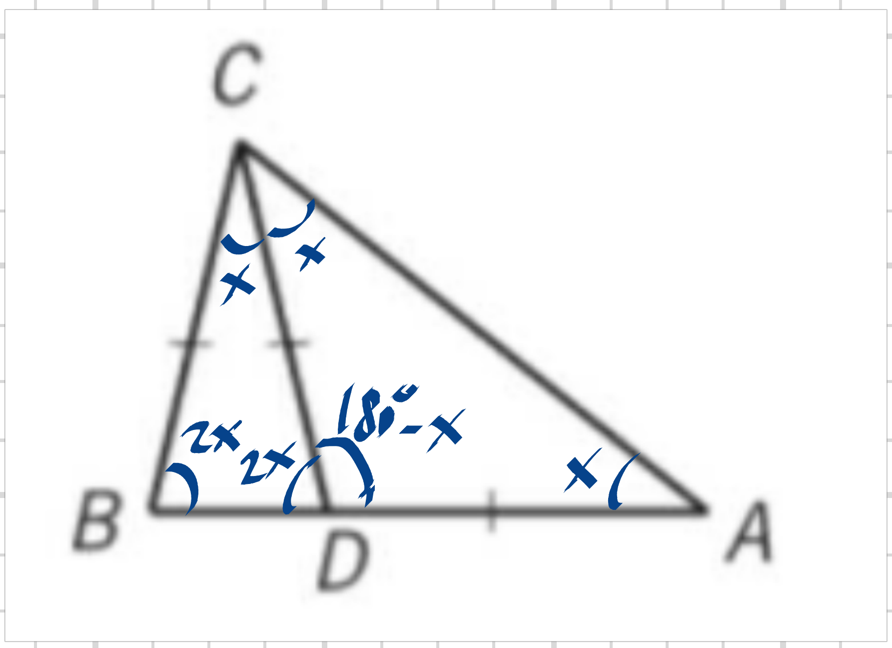
---

40 I $\triangle ABC$ är CD en bisektris och $AD = CD = BC$.



Räcker denna information för att beräkna alla vinklar i figuren? Motivera ditt svar.

40.



$\Delta BCD: \quad 2x + 2x + x = 180° \Rightarrow x = 36°$

<u>Ja, alla vinklar är bestämda.</u>

---

41 a) Bestäm koordinaterna för maximipunkten till funktionen

$f(x) = px^2 + px + r$

då $p = -8$ och $r = -2$.

b) Funktionen $f(x) = px^2 + px + r$ har en maximipunkt på x-axeln.

Vad kan man säga om talet p och talet r?

41.

a) $f(x) = -8x^2 - 8x - 2$

Nollställen:

$-8x^2 - 8x - 2 = 0$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

Symmetrilinje: $x = -\frac{1}{2}$

$f_{max} = f(-\frac{1}{2}) = -8 \cdot \frac{1}{4} + 4 - 2 = 0$

Maximipunkten $= \underline{(-\frac{1}{2}, 0)}$

b) $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{r}{p}}$

Maximipunkt på x-axeln $\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{r}{p} = 0 \Rightarrow \frac{r}{p} = \frac{1}{4}$

$\underline{p = 4r \quad , \; p < 0, \; r < 0}$

48 Antalet personer i åldersgruppen 0–17 år i Sverige var 1,938 miljoner år 2000 och 2,122 miljoner år 2017.

Anta att den årliga procentuella ökningen var lika stor varje år och att detta gäller även efter år 2017.

a) Teckna en funktion som kan användas som modell för att beskriva antalet personer i åldersgruppen 0–17 år, *y* miljoner, *x* år efter år 2000.

b) Hur många personer i åldersgruppen 0–17 år kommer det att finnas i Sverige år 2030 enligt denna modell?

c) När kommer antalet personer i åldersgruppen 0–17 år att vara 2,5 miljoner enligt denna modell?

48.

a) $y = C \cdot a^x$

$(0, 1.938) \Rightarrow C = 1{,}938$

$(17, 2{,}122) \Rightarrow 1.938 \cdot a^{17} = 2{,}122 \Rightarrow a \approx 1{,}0053$

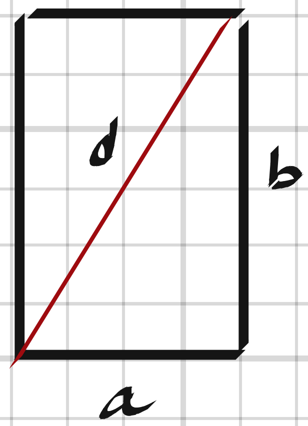
$\underline{y = 1.938 \cdot 1{,}0053^x}$

b) $y(30) = 1.938 \cdot 1{,}0053^{30} \approx \underline{2{,}274 \text{ miljoner}}$

c) $1.938 \cdot 1{,}0053^x = 2.5$

$x = \dfrac{\lg \frac{2{,}5}{1{,}938}}{\lg 1{,}0053} \approx 48 \Rightarrow \underline{\text{År } 2048}$

49 En rektangel har omkretsen 96 cm och arean 432 cm².
Beräkna diagonalens längd.



49.

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 \\ 2a + 2b = 96 \\ ab = 432 \end{cases}$$

$$b = 48 - a$$

$$a(48 - a) = 432$$

$$a^2 - 48a + 432 = 0$$

$$a = 24 \pm \sqrt{576 - 432} = 24 \pm 12$$

$$a_1 = 12 \ , \ a_2 = 36$$

$$b_1 = 36 \ , \ b_2 = 12$$

$$d = \sqrt{12^2 + 36^2} \approx \underline{38 \text{ cm}}$$

50 Andragradsekvationen

$x^2 - ax + 10a + 12 = 0$

har en rot $x = 24$.

Vilken är den andra roten?

Andra roten = q

50. $(x-24)(x-q) = x^2 - ax + 10a + 12$

$x^2 - (q+24)x + 24q = x^2 - ax + 10a + 12 \Rightarrow$

$$\begin{cases} q + 24 = a \\ 24q = 10a + 12 \end{cases}$$

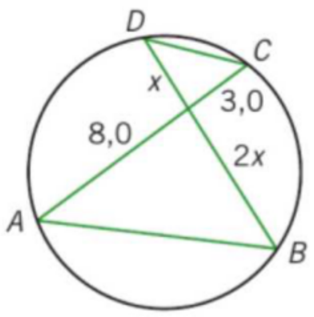
$24(a-24) = 10a + 12$

$24a - 576 = 10a + 12$

$14a = 588$

$a = 42 \Rightarrow q = \underline{18}$

51 Beräkna längden av kordan BD.



51. $x \cdot 2x = 8 \cdot 3 \Rightarrow x = \sqrt{12}$

$BD = 3x = 3\sqrt{12}$ l.e.

---

52 Skelettet av den så kallade Bäckaskogs-kvinnan hittades år 1939 i en grav i nordöstra Skåne. Ett test visade nyligen att halten av kol-14 i skelettet var 34,8 % av den normala halten i levande material.

När ungefär levde hon? Kol-14 sönderfaller med halveringstiden 5 730 år.

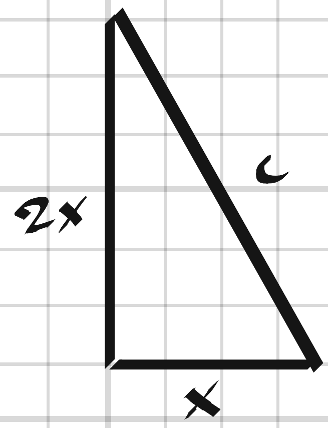
52. $a^{5730} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0{,}999879$

$0.999879^{x} = 0{,}348$

$x = \frac{\lg 0{,}348}{\lg 0{,}999879} \approx 8700$ år sedan

---

53 I en rätvinklig triangel är den ena kateten dubbelt så lång som den andra kateten.
Visa att triangelns area A kan beräknas med uttrycket $A = \frac{c^2}{5}$ där c är längden på hypotenusan.



53.

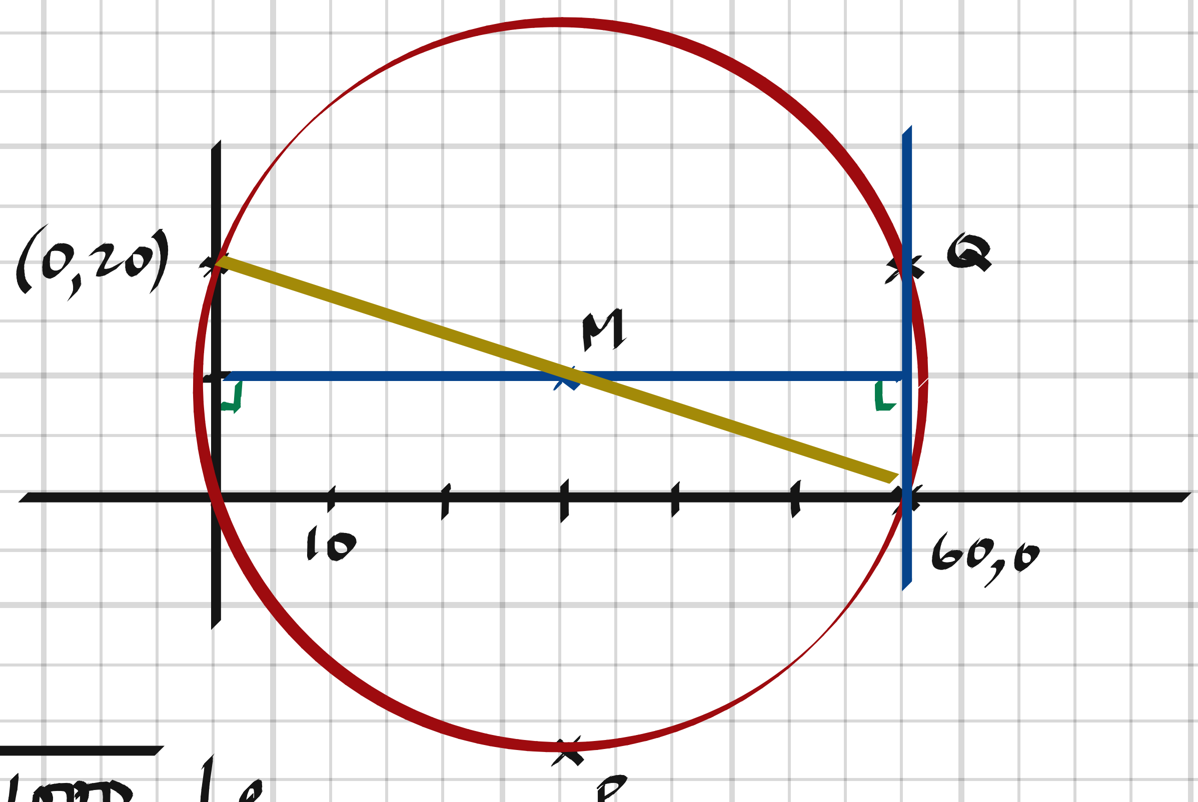
$$(2x)^2 + x^2 = c^2$$

$$x^2 = \frac{c^2}{5}$$

$$A = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2 = \frac{c^2}{5} \quad \#$$

---

54 En cirkels rand går genom origo och punkterna (0, 20) och (60, 0).
Bestäm
a) cirkelns medelpunkt
b) cirkelns radie
c) ytterligare en punkt på cirkeln.



54.

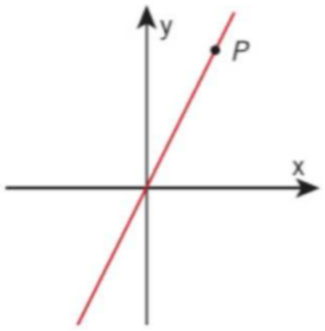
a) $\underline{M = (30, 10)}$

b) $r = \sqrt{30^2 + 10^2} = \underline{\sqrt{1000} \text{ l.e.}}$

c) $\underline{Q = (60, 20)}$

55 På linjen $y = 2x$ finns en punkt P vars avstånd till origo är 24 längdenheter.

Beräkna punkten P:s x-koordinat, $x > 0$.



(*NP*)

55.

$$P = (x, 2x)$$

$$x^2 + (2x)^2 = 24^2$$

$$x^2 = \frac{24^2}{5}$$

$$x = \frac{24}{\sqrt{5}} \approx 10.7$$

56 I sjukamp beräknar man poäng för resultat med hjälp av olika formler:

Löpgrenar: poäng $= a \cdot (b - M)^c$

Kastgrenar: poäng $= a \cdot (M - b)^c$

Här är a, b, c konstanter och M resultatet i sekunder respektive meter.

a) För löpning 800 m är $a = 0{,}11193$, $b = 254$ och $c = 1{,}88$.

Vilket resultat krävs för att få 1 000 poäng på 800 m?

b) Varför används två olika formler?

56. a) $a \cdot (b-M)^c = p \Rightarrow$

$$M = b - \left(\frac{P}{a}\right)^{1/c} = 254 - \left(\frac{1000}{0{,}11193}\right)^{1/1{,}88} = \underline{127{,}6 \text{ s}}$$

b) I kastgrenarna ska resultatenheten [m] vara så stor som möjligt.
I löpgrenarna är det tvärtom.

---

57 För funktionen f gäller att $f(x) = a + 18x - x^2$

Bestäm talet a så att

a) funktionen får maximivärdet 100

b) $\lg f(2) = 1$

57. a) Symmetrilinjen: $x = 9$

$$f_{max} = f(9) = 100 \Rightarrow a + 18 \cdot 9 - 9^2 = 100 \Rightarrow \underline{a = 19}$$

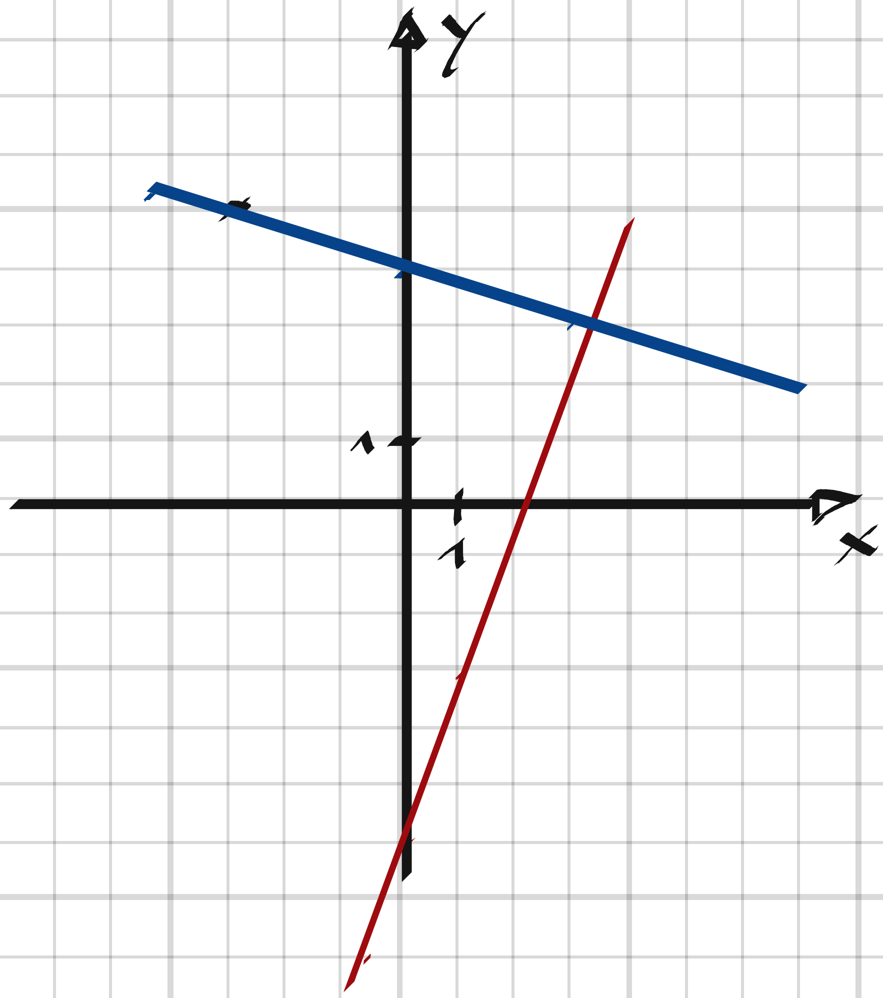
b) $f(2) = a + 18 \cdot 2 - 2^2 = a + 32$

$$\lg f(2) = \lg(a+32) = 1 \Rightarrow a = 10 - 32 = \underline{-22}$$

58 Diagonalerna i en kvadrat ligger på linjerna $3x - y - 6 = 0$ och $x + 3y - 12 = 0$.
Ett av hörnen har koordinaterna $(-3, 5)$.
Visa att kvadratens sida är $4\sqrt{5}$ l.e.

58.

$$\begin{cases} y_1 = 3x - 6 \\ y_2 = -\frac{x}{3} + 4 \end{cases}$$



Skärningspunkt:

$$3x - 6 = -\frac{x}{3} + 4$$

$$9x - 18 = -x + 12$$

$$10x = 30$$

$$x = 3 \;,\; y = 3$$

Diagonalen $d = 2 \cdot \sqrt{(3-(-3))^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{40}$

Kvadratens sida $= \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{40}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{20} = 2\sqrt{4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ l.e.

#

59 En bank räknar ofta med månadsränta eller dag för dag-ränta, där ett bankår har 360 dagar.

a) Vilken dag för dag-ränta motsvarar en årsränta på 2,0%?

b) Hur många gånger större måste månadsräntan vara än dagsräntan för att de ska ge samma ränta i kronor?

59.

a) $1.02^{\frac{1}{360}} = 1{,}00006 \Rightarrow$ räntan $= 0{,}06$ ‰

b) $(1+y)^{12} = (1+x)^{360}$

$$y = (1+x)^{\frac{360}{12}} - 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{(1+x)^{\frac{360}{12}} - 1}{x}$$

Förhållandet beror på dagsräntans storlek men är minst 30 ggr.

Beräknat i Geogebra: