

Formelsamling för Matematik 5

Aritmetik

Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Potenser

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad a^0 = 1$$

Logaritmer

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy \quad \lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y} \quad \lg x^p = p \lg x$$

Absolutbelopp

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Algebra

Regler

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Andrags- ekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Binomial- satsen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Funktioner

Räta linjen

$$y = kx + m$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

För vinkelräta linjer

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Polynom-funktioner

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 x^{n-n}, \text{ där } n \in \mathbb{Z}^+$$

Potensfunktioner

$$y = Cx^a$$

Exponential-funktioner

$$y = Ca^x \text{ där } a > 0, a \neq 1$$

Differential- och integralkalkyl

Derivatans definition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{a \rightarrow x} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivator

Funktion	Derivata
x^n ($n \in \mathbb{R}$)	nx^{n-1}
a^{kx} ($a > 0$)	$ka^{kx} \cdot \ln a$
$\ln x$ ($x > 0$)	$\frac{1}{x}$
e^{kx}	ke^{kx}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$)	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Kedjeregeln Om $y = f(u)$ och $u = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Integraler Integralkalkylens fundamentalsats

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ där } F'(x) = f(x)$$

**Rotationsvolym,
skivmetoden**

$$\pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{rotation runt } x\text{-axeln}$$

$$\pi \int_a^b x^2 dy \quad \text{rotation runt } y\text{-axeln}$$

skalmetoden

$$2\pi \int_a^b xy dx \quad \text{rotation runt } y\text{-axeln}$$

**Partiell
integration**

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

**Primitiva
funktioner**

Funktion	Primitiv funktion
k	$kx + C$
kx^n ($n \in \mathbb{R}, n \neq -1$)	$\frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$
a^{kx} ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$
$\frac{1}{x}$ ($x > 0$)	$\ln x + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + C$
$\tan^{-1} x$	$x \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

**Differential-
ekvationer
med algebraiska
lösningsmetoder**

Om y är en funktion av x och är deriverbar gäller för:

Differentialekvationer av 1:a ordningen

$$y' + ay = 0$$

$$y = C e^{-ax}$$

$$y' + ay = f(x)$$

$y = C e^{-ax} + y_p$, där y_p beror på vilken typ av funktion som $f(x)$ är samt a .

Differentialekvationer av 2:a ordningen

$$y'' + ay' = 0$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-ax}$$

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$r^2 + ar + b = 0 \text{ ger } r = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Om

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b > 0, r_1 \neq r_2$$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0, r_1 = r_2$$

$$y = e^{rx}(C_1 x + C_2)$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0, r_{1,2} = p \pm iq$$

$$y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$$

Separabla differentialekvationer

$$g(y) \cdot y' = f(x)$$

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx$$

**med numerisk
lösningsmetod**
Eulers stegmetod

$$y' = f(x, y) \text{ steglängd } h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

**Komplexa tal
Representation**

$$z = a + bi = r e^{iv} = r(\cos v + i \sin v)$$

Argument

$$\arg z = v, \quad \tan v = \frac{b}{a}$$

Absolutbelopp

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Konjugat

$$z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$$

Räknelagar

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2))$$

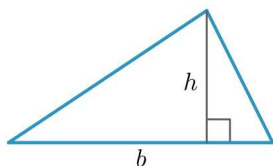
de Moivres formel

$$z^n = (r(\cos v + i \sin v))^n = r^n (\cos nv + i \sin nv)$$

Geometri

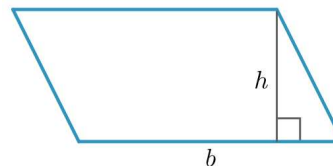
Triangel

$$A = \frac{bh}{2}$$



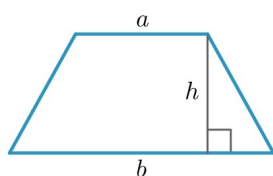
Parallelogram

$$A = bh$$



Parallelltrapets

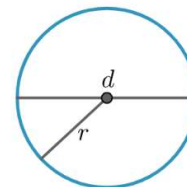
$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Cirkel

$$A = \pi r^2$$

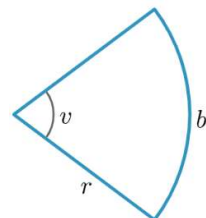
$$O = 2\pi r = \pi d$$



Cirkelsektor

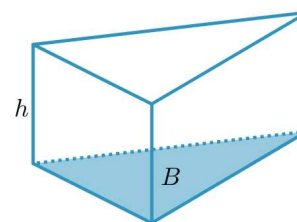
$$b = \frac{v}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$A = \frac{v}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{br}{2}$$



Prisma

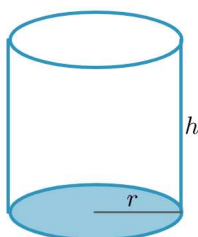
$$V = Bh$$



Cylinder

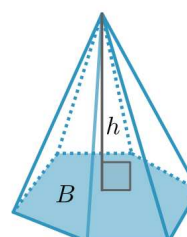
$$V = \pi r^2 h$$

$$A_{\text{mantel}} = 2\pi r h$$



Pyramid

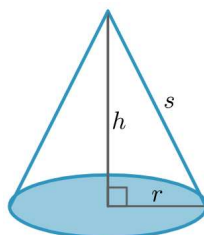
$$V = \frac{Bh}{3}$$



Kon

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

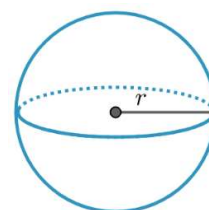
$$A_{\text{mantel}} = \pi r s$$



Klot

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

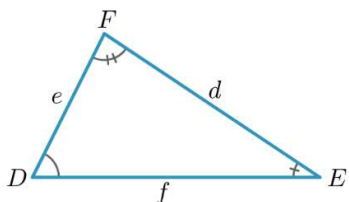
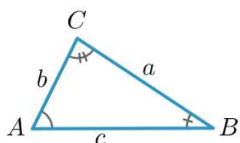
$$A = 4\pi r^2$$



Likformighet

Trianglarna ABC och DEF är likformiga.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Skala

Areaskalan = (Längdskalan)²

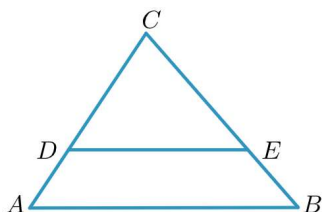
Volymaskalan = (Längdskalan)³

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

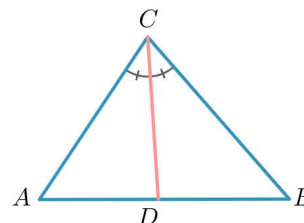
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$



Bisektrissatsen

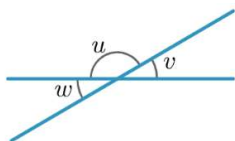
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



Sidovinklar och vertikalvinklar

$u + v = 180^\circ$ sidovinklar

$w = v$ vertikalvinklar

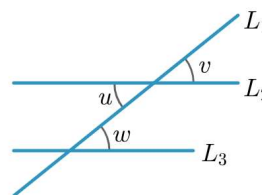


Likbelägna vinklar och alternatvinklar

L_1 skär två parallella linjer L_2 och L_3

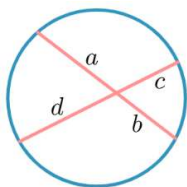
$v = w$

$u = w$



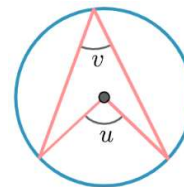
Kordasatsen

$ab = cd$



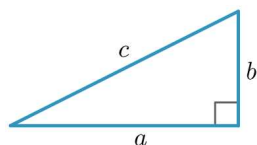
Randvinkelsatsen

$u = 2v$



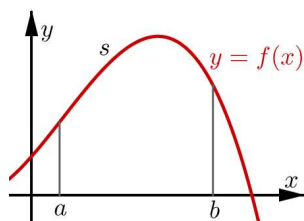
Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Längden av en kurva

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

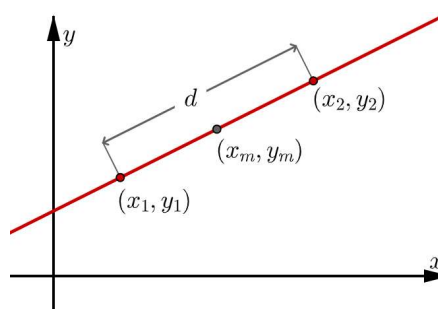


Avståndsformeln

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

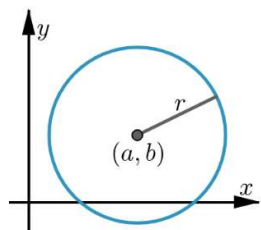
Mittpunktsformeln

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ och } y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Cirkels ekvation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



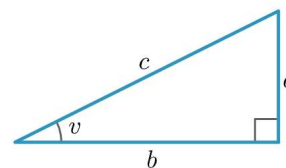
Trigonometri

Definitioner

$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

$$\tan v = \frac{a}{b}$$

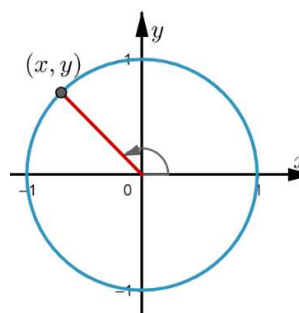


Enhetscirkeln

$$\sin v = y$$

$$\cos v = x$$

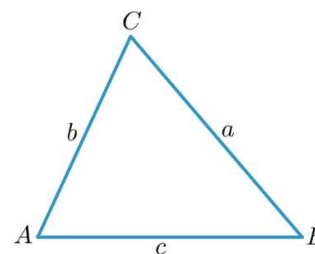
$$\tan v = \frac{y}{x}$$



Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Areasatsen $T = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$



Trigonometriska formler $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

$\sin 2v = 2 \sin v \cos v$

$$\cos 2v = \begin{cases} \cos^2 v - \sin^2 v & (1) \\ 2 \cos^2 v - 1 & (2) \\ 1 - 2 \sin^2 v & (3) \end{cases}$$

$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + v)$

där $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $\tan v = \frac{b}{a}$

Exakta värden

v°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
v rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Talteori

Kongruens

$a \equiv b \pmod{n}$ om $n|(a - b)$

Om $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ och $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ gäller att

1. $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$
2. $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{n}$

Om $a \equiv b \pmod{n}$ gäller att

3. $ca \equiv cb \pmod{n}$ för alla heltal c ,
4. $a^c \equiv b^c \pmod{n}$ för alla heltal $c, c \geq 0$

Talföljder

Aritmetisk talföljd

För en aritmetisk talföljd, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, där $n \in \mathbb{Z}$ gäller att $a_{n+1} - a_n = d$ för alla tal i talföljden.

$$\text{Aritmetisk summa: } s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Geometrisk talföljd

För en geometrisk talföljd, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, där $n \in \mathbb{Z}$ gäller att $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k, k \neq 1$ för alla tal i talföljden.

$$\text{Geometrisk summa: } s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \quad a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

Kombinatorik

Permutationer

$$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad \text{där } 0 \leq k \leq n$$

Kombinationer

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \quad \text{där } 0 \leq k \leq n$$

Mängdlära

Mängdoperatörer

A och B är delmängder av grundmängden G .

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ och } x \in B\} \quad A \cup B = \{x | x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ och } x \notin B\} \quad A^c = \{x | x \in G \text{ och } x \notin A\}$$

Delmängder

Om kardinaltalet $|A|$ i mängden A är $n, n \in \mathbb{N}$, är antalet möjliga delmängder:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Antalet äkta delmängder är $2^n - 1$.

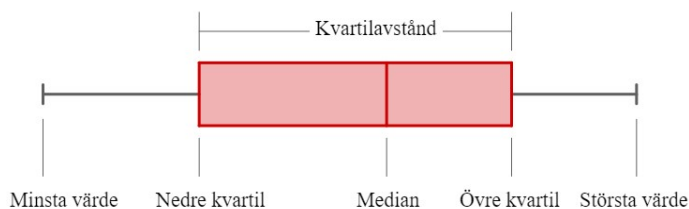
- Beteckningar för viktiga mängder**
- $\mathbb{N} = \{\text{mängden naturliga tal}\}$
 - $\mathbb{Z} = \{\text{mängden heltal}\}, \mathbb{Z}^+ = \{n | n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$
 - $\mathbb{Q} = \{\text{mängden rationella tal}\}$
 - $\mathbb{R} = \{\text{mängden reella tal}\}$
 - $\mathbb{C} = \{\text{mängden komplexa tal}\}$

Statistik och sannolikhet

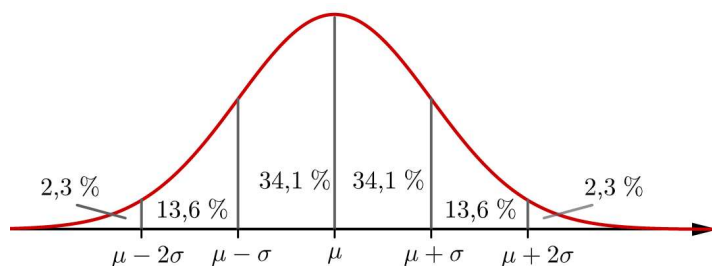
Standardavvikelse För stickprov gäller

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Lådagram



Normalfördelning



Täthetsfunktion för normalfördelning

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$