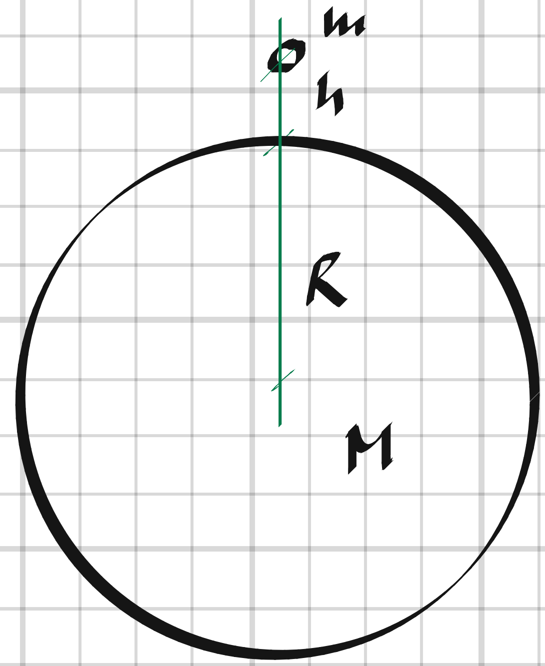
1 Ett äpple faller mot jorden på en plats nära ekvatorn. Äpplets massa är ca 100 g. Jordens massa är 5,97 × 10^{24} kg och jordens radie är 6 378 137 m.

a) Vilken differentialekvation beskriver äpplets fall mot jorden?

b) När äpplet faller förändras radien relativt lite. Man kan förenkla genom att se radien som konstant. Vad blir i så fall accelerationen?



1.

a)
$$\left.\begin{array}{l} F = m\dfrac{dv}{dt} \\ F = G\cdot\dfrac{m\cdot M}{(R+h)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\dfrac{dv}{dt} = G\cdot\dfrac{M}{(R+h)^2}}$$

b)
$$h \ll R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = G\cdot\frac{M}{R^2} = 6.674\cdot10^{-11}\cdot\frac{5.97\cdot10^{24}}{(6.38\cdot10^{6})^2} = \underline{9.8\ m/s^2}$$

(Tyngdaccellerationen)

---

2 Månens massa är 7,3477 · 10^{22} kg och månens medelavstånd till jorden är 384 403 km.

a) Vilken acceleration har månen mot jorden?

b) Med vilken kraft påverkas månen av jorden?

c) Hur kommer det sig att månen inte faller rätt emot jorden?

2.

b)
$$F = G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2} = 6.674\cdot10^{-11}\cdot\frac{7.3477\cdot10^{22}\cdot5.97\cdot10^{24}}{(3.844\cdot10^{8})^2} = \underline{2.0\cdot10^{20}\ N}$$

a)
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{2.0\cdot10^{20}}{7.3477\cdot10^{22}} = \underline{2.7\ mm/s^2}$$

c) För att den roterar runt jorden.

4103 Ange den allmänna lösningen till

a) $y' = x + 1$

b) $y' = 3x^2 + 4x$

c) $y' = -2$

d) $y' = 12x^3 - 4$

4103. a) $y = \frac{x^2}{2} + x + C$

b) $y = x^3 + 2x^2 + C$

c) $y = -2x + C$

d) $y = 3x^4 - 4x + C$

4104 Petra och Simon vill hitta en lösning till differentialekvationen $y' = 3x + 5$

Petra tror: $y = 3x^2/2 + 5x$

Simon tror: $y = 3x^2/2 + 5x + 1$

Båda har rätt – förklara hur det kan komma sig!

4104. Allmänna lösningen är $y = \frac{3x^2}{2} + 5x + C$,
I Petras fall är $C = 0$, och i Simons är $C = 1$

4105 Du har differentialekvationen $y' = 2x - 3$

a) Ange den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(-2) = 1$.

b) Ange ekvationen för den lösningskurva som går genom punkten $(3, -2)$.

4105. $y = x^2 - 3x + C$

a) $y(-2) = 1 \Rightarrow (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + C = 1 \Rightarrow C = -9$

$y = x^2 - 3x - 9$

b) $(3, -2) \Rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + C = -2 \Rightarrow C = -2$

$y = x^2 - 3x - 2$

4106 Differentialekvationen $y'' = 3x - 2$ är given.

a) Ange den allmänna lösningen.

b) Ange den lösning som uppfyller villkoren $y(2) = 4$ och $y'(2) = 3$.

c) Ange den lösning som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y(2) = 11$.

4106. a)

$$y'' = 3x - 2$$

$$y' = \frac{3x^2}{2} - 2x + C_1$$

$$\underline{y = \frac{x^3}{2} - x^2 + C_1 x + C_2}$$

b)

$$y'(2) = 3 \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y(2) = 4 \Rightarrow \frac{2^3}{2} - 2^2 + 2 + C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = 2$$

$$\underline{y = \frac{x^3}{2} - x^2 + x + 2}$$

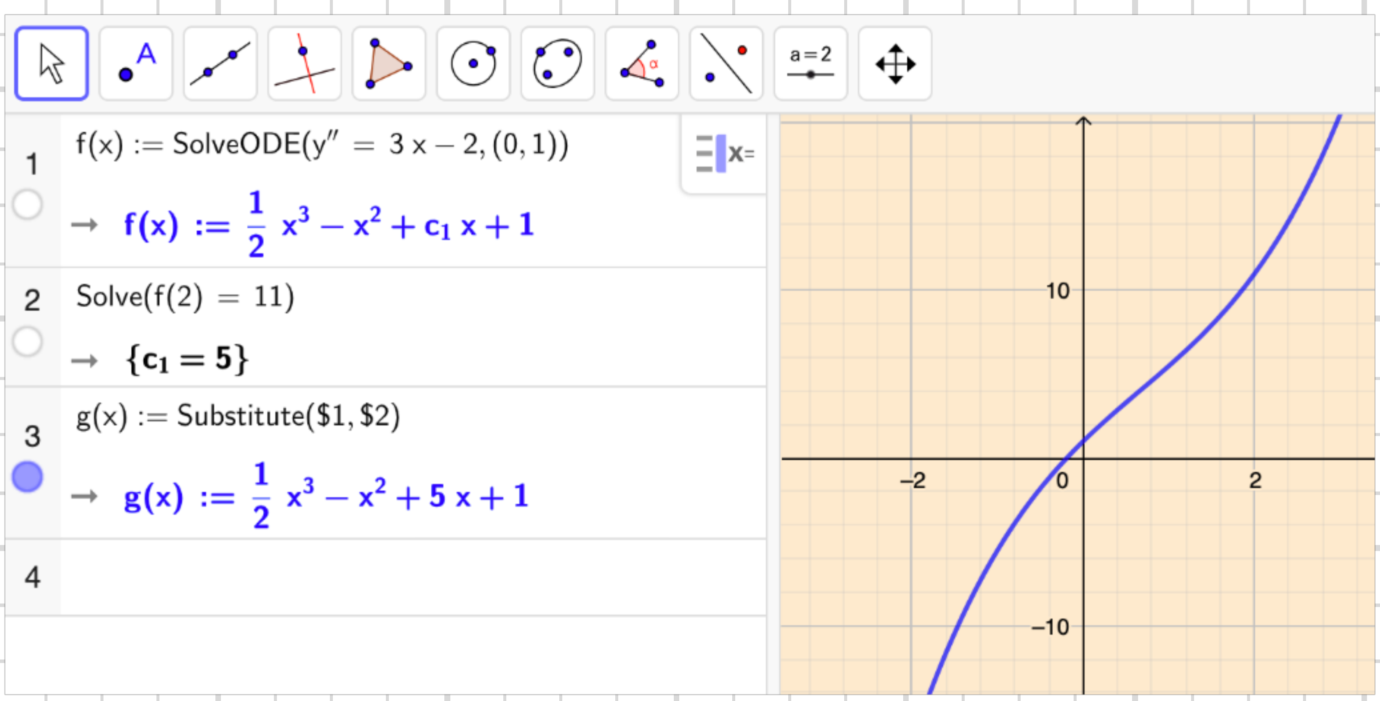
c)

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$y(2) = 11 \Rightarrow \frac{2^3}{2} - 2^2 + 2C_1 + 1 = 11 \Rightarrow C_1 = 5$$

$$\underline{y = \frac{x^3}{2} - x^2 + 5x + 1}$$

Lösning i Geogebra:



4107 Hastigheten v m/s för ett tåg beskrivs med formeln
$v = 0{,}6t - 0{,}03t^2$
där t är tiden i sekunder.
Bestäm vägfunktionen $s(t)$ om $s(0) = 0$
$(v = s'(t))$

4107. $s'(t) = 0{,}6t - 0{,}03t^2$

$s(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}01t^3 + C$

$s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \underline{s(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}01t^3}$

4108 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' = \cos x - \sin x$ som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$.

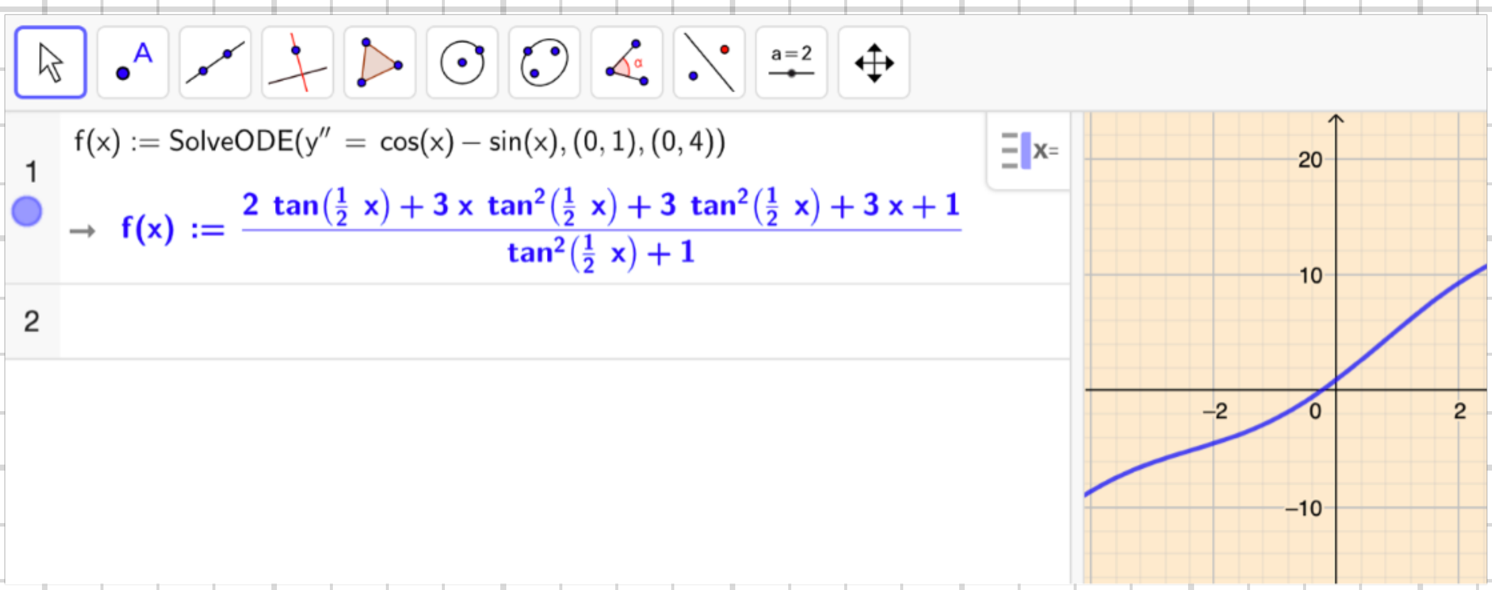
4108. $y'' = \cos x - \sin x$

$y' = \sin x + \cos x + C_1$

$y = \sin x - \cos x + C_1 x + C_2$

$$\left.\begin{array}{l} y'(0) = 4 \Rightarrow 1 + C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 3 \\ y(0) = 1 \Rightarrow -1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = \sin x - \cos x + 3x + 2}$$

Lösning i Geogebra:



4109 Hur många villkor behövs för att precis en funktion ska uppfylla ekvationen $y'' = 3x$?

4109. 2 st. (Lika många som diffekvationens ordning)

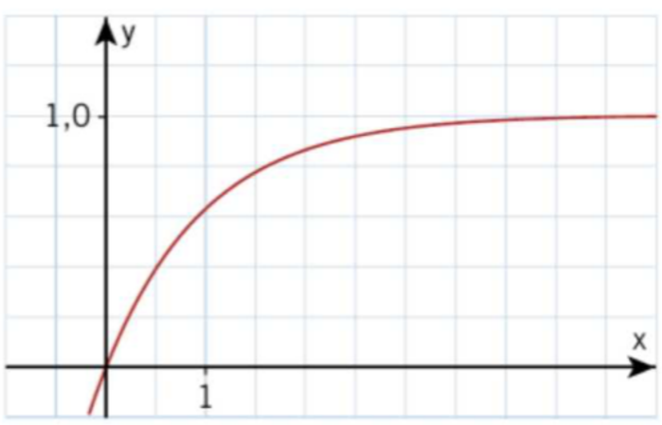
4110 Hastigheten hos ett föremål som svänger kring ett jämviktsläge beskrivs av formeln $v = 2{,}4\cos 4{,}0t$ där t är tiden i sekunder. Bestäm vägfunktionen $s(t)$ om $s(0) = 0$

4110.

$$s(t) = \int_0^t v(t) + C = 0.6\sin 4{,}0t + C$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 0{,}6\sin 4{,}0t$$

4111



Funktionen $f(x)$ i figuren uppfyller precis en av följande differentialekvationer, vilken?

A $f'(x) = 1 - f(x)$

B $f'(x) = f(x) - 1$

C $f'(x) = 1 + f(x)$

4111. A: Positiv lutning som minskar med ökat x-värde.

4112 Ett tåg har en acceleration a m/s^2 som ges av formeln

$a = 0{,}8 - 0{,}12t$

där t är tiden i sekunder.

Bestäm hastighetsfunktionen $v(t)$ och vägfunktionen $s(t)$ om $v(0) = 10$ och $s(0) = 0$.

4112.

$$v(t) = \int_0^t a\,dt + C_1 = 0{,}8t - 0{,}06t^2 + C_1$$

$$s(t) = \int_0^t v\,dt + C_2 = 0{,}4t^2 - 0{,}02t^3 + C_1x + C_2$$

$$\left.\begin{aligned} s(0) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ v(0) = 10 &\Rightarrow C_1 = 10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\underline{v(t) = 0{,}8t - 0{,}06t^2 + 10} \\ &\underline{s(t) = 0{,}4t^2 - 0{,}02t^3 + 10t} \end{aligned}$$

4113 Accelerationen a m/s^2 hos ett föremål som beskriver en s k harmonisk svängningsrörelse kring ett jämviktsläge ges av ekvationen $a = 1{,}2 \cos 5t$, där t är tiden i sekunder.
Hastighetsfunktionen är $v(t)$ m/s och lägesfunktionen $s(t)$ m.
Vid $t = 0$ är $v = 0$ och $s = -0{,}048$.
Ange de största värden som v och s kan anta.

4113.

$$v(t) = \int_0^t a\,dt + C_1 = 0{,}24 \sin 5t + C_1$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow v(t) = 0{,}24 \sin 5t \Rightarrow \underline{v_{max} = 0{,}24 \text{ m/s}}$$

$$s(t) = \int_0^t v\,dt + C_2 = \Big[0{,}048 \cos 5t\Big]_t^0 + C_2 = 0{,}048(1 - \cos 5t) + C_2$$

$$s(0) = -0{,}048 \Rightarrow C_2 = -0{,}048 \Rightarrow s(t) = 0{,}048(1 - \cos 5t) - 0{,}048$$

$$\Rightarrow \underline{s_{max} = 0{,}048 \text{ m}}$$

4117 Visa att differentialekvationen

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ har en lösning
$y = 2e^{-x} + 3e^{-2x}$

b) $y'' + y = x$ har en lösning $y = x + \sin x$.

4117.

$y' = -2e^{-x} - 6e^{-2x}$

$y'' = 2e^{-x} + 12e^{-2x}$

a) $VL = 2e^{-x} + 12e^{-2x} - 6e^{-x} - 18e^{-2x} + 4e^{-x} + 6e^{-2x} = 0 = HL$ #

$y' = 1 + \cos x$

$y'' = -\sin x$

b) $VL = -\sin x + x + \sin x = x = HL$ #

4118 Visa att oberoende av värdet på konstanten A så är

a) $y = x + Ae^{-x}$ en lösning till
$y' = 1 + x - y$

b) $y = Ae^{x^3/3}$ en lösning till $y' = x^2y$

4118.

a) $VL = y' = 1 - Ae^{-x}$

$HL = 1 + x - x - Ae^{-x} = 1 - Ae^{-x} = VL$ #

b) $VL = y' = Ax^2e^{x^3/3}$

$HL = x^2Ae^{x^3/3} = VL$ #

4119 a) Verifiera att $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ är en lösning till differentialekvationen
$y'' + 4y = 0$
oberoende av värdena på konstanterna A och B.

b) Bestäm A och B om funktionen ska uppfylla begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 2$.

4119.

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x$$
$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$VL = -4(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4(A\cos 2x + B\sin 2x) = 0 = HL$$

#

4120 Albert påstår att $y = 3x^2 + \sin x$ är en lösning till $y' + y = 0$.
Har Albert rätt?

4120.

$$y' = 6x + \cos x$$

$VL = 6x + \cos x + 3x^2 + \sin x \neq 0 \Rightarrow$ Albert har fel.

4121 Bestäm konstanten k så att $y = 4e^{3x}$ blir en lösning till differentialekvationen
$y' + ky = 24e^{3x}$

4121.

$$12e^{3x} + 4ke^{3x} = 24e^{3x} \Rightarrow$$

$$12 + 4k = 24 \Rightarrow k = 3$$

4122 Bestäm konstanten a så att $y = a - 5e^{-x}$ blir en lösning till differentialekvationen
$y' = 2 - y$

4122. $5e^{-x} = 2 - a + 5e^{-x} \Rightarrow \underline{a = 2}$

4123 Verifiera att $y = xe^x$ är en lösning till differentialekvationen $xy' - y = xy$.

4123. $y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$VL = xe^x + x^2e^x - xe^x = x^2e^x = HL$ #

4124 Visa att $y = e^{2x^2}$ är en lösning till

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 16x^2y = 0$$

4124. $y = e^{2x^2}$; $y' = 4xe^{2x^2}$

$y'' = 4(e^{2x^2} + 4x^2e^{2x^2}) = 4e^{2x^2} + 16x^2e^{2x^2}$

$VL = 4e^{2x^2} + 16x^2e^{2x^2} - 4e^{2x^2} - 16x^2e^{2x^2} = 0 = HL$ #

4125 Visa att $y = e^x \sin x$ är en lösning till

a) $y' - y = e^x \cos x$ b) $y'' - 2y' + 2y = 0$

4125. $y' = e^x \sin x + e^x \cos x$

$y'' = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$

a) $VL = e^x \sin x + e^x \cos x - e^x \sin x = e^x \cos x = HL$ #

b) $VL = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0 = HL$ #

4126 Visa att $y = x^2 \ln x$ är en lösning till differentialekvationen $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$.

4126. $y' = 2x \ln x + x$

$VL = 2x^2 \ln x + x^2 - 2x^2 \ln x = x^2 = HL$ #

4127 Visa att differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0 \quad \text{har lösningarna}$$

$y = 2e^t \cdot \cos 2t$ och $y = 3e^t \cdot \sin 2t$.

4127.

$$y' = 2e^t\cos 2t - 4e^t\sin 2t$$

$$y'' = 2e^t\cos 2t - 4e^t\sin 2t - 4e^t\sin 2t - 8e^t\cos 2t =$$

$$= -6e^t\cos 2t - 8e^t\sin 2t$$

$$VL = e^t(-6\cos 2t - 8\sin 2t) - e^t(4\cos 2t - 8\sin 2t) + e^t \cdot 10\cos 2t = 0 \quad \#$$

$$y' = 3e^t\sin 2t + 6e^t\cos 2t$$

$$y'' = 3e^t\sin 2t + 6e^t\cos 2t + 6e^t\cos 2t - 12e^t\sin 2t$$

$$= -9e^t\sin 2t + 12e^t\cos 2t$$

$$VL = e^t(-9\sin 2t + 12\cos 2t) - e^t(6\sin 2t + 12\cos 2t) + e^t \cdot 15\sin 2t = 0 \quad \#$$

4128 Bestäm konstanten a så att $y = e^{-ax^2}$ blir en lösning till differentialekvationen

$y'' + xy' + y = 0$

4128.

$$y = e^{-ax^2} \; ; \; y' = -2axe^{-ax^2}$$

$$y'' = -2a(e^{-ax^2} - 2ax^2e^{-ax^2}) = -2ae^{-ax^2} + 4a^2x^2e^{-ax^2}$$

$$-2ae^{-ax^2} + 4a^2x^2e^{-ax^2} - 2ax^2e^{-ax^2} + e^{-ax^2} = 0$$

$$e^{-ax^2} \neq 0 \Rightarrow \quad 1 - 2a + (4a^2 - 2a)x^2 = 0$$

$$1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad ; \quad 2a(2a-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\underline{a = \frac{1}{2}}$$

4129 Bestäm talen a och b så att
$y = a\cos x + b\sin x$
är en lösning till differentialekvationen
$y'' - 4y' + 4y = \cos x$

4129.

$$y = a\cos x + b\sin x$$
$$y' = -a\sin x + b\cos x$$
$$y'' = -a\cos x - b\sin x$$

$$-a\cos x - b\sin x + 4a\sin x - 4b\cos x + 4a\cos x + 4b\sin x = \cos x$$

$$(3a - 4b)\cos x + (3b + 4a)\sin x = \cos x$$

$$\frac{4}{3}, + \begin{cases} 3a - 4b = 1 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}$$

$$\frac{9a + 16a}{3} = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{25}} \; ; \; \underline{b = -\frac{4a}{3} = -\frac{4}{25}}$$

4130 Bestäm det reella talet a så att

$y = e^{-x} \cdot \sin ax$

blir en lösning till differentialekvationen

$y'' + 2y' + 5y = 0$

4130. $y = e^{-x} \sin ax$

$y' = -e^{-x} \sin ax + a e^{-x} \cos ax$

$y'' = e^{-x} \sin ax - a e^{-x} \cos ax - a e^{-x} \cos ax - a^2 e^{-x} \sin ax =$

$= e^{-x}(\sin ax - 2a \cos ax - a^2 \sin ax)$

$e^{-x}(\sin ax - 2a\cos ax - a^2 \sin ax - 2\sin ax + 2a\cos ax + 5\sin ax) = 0$

$e^{-x}(4 - a^2)\sin ax = 0$

$e^{-x} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2 \\ \sin ax = 0 \text{ då } a = 0 \end{array}\right\} \underline{a = -2, 0, 2}$$

4203 Ange den allmänna lösningen till

a) $y' - 6y = 0$ c) $y' + y = 0$

b) $y' + 4y = 0$ d) $y' - 0{,}5y = 0$

4203. a) $y = Ce^{6x}$ c) $y = Ce^{-x}$

b) $y = Ce^{-4x}$ d) $y = Ce^{0,5x}$

4204 Ange två olika funktioner $y(x)$ som uppfyller $y' - y = 0$.

4204. ex.v. $y = e^{x}$, $y = 3e^{x}$

4205 Ange en partikulärlösning om

a) $2y' + 5y = 0$ och $y(0) = -4$

b) $2y' = 5y$ och $y(0) = 4$

c) $\frac{dh}{dt} = h$ och $h(1) = 2$

d) $0{,}5\frac{dv}{dt} = 2v$ och $v(0) = 12$

4205. a) $y = Ce^{-\frac{5x}{2}}$; $y(0) = -4 \Rightarrow y = -4e^{-\frac{5x}{2}}$

b) $y = Ce^{\frac{5x}{2}}$; $y(0) = 4 \Rightarrow y = 4e^{\frac{5x}{2}}$

c) $h = Ce^{t}$; $h(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{2}{e} \Rightarrow h = 2e^{t-1}$

d) $v = Ce^{4t}$; $v(0) = 12 \Rightarrow C = 12 \Rightarrow v = 12e^{4t}$

4206 En lösningskurva till differentialekvationen $y' + 2y = 0$ går genom punkten $(0, -3)$.
Bestäm lösningskurvans ekvation.

4206. $y = Ce^{-2x}$

$(0, -3) \Rightarrow C = -3 \Rightarrow \underline{y = -3e^{-2x}}$

4207 Antalet insekter P i en insektspopulation tillväxer enligt differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}010P$$

där t är tiden i dygn. Vid $t = 0$ är antalet insekter 250.

a) Tolka ekvationen i ord.

b) Ange den funktion som ger antalet insekter i populationen vid tidpunkten t.

c) Bestäm populationens storlek då $t = 14$.

4207.

a) Insektspopulationens tillväxttakt är 10 ‰ av den aktuella insektspopulationen

b) $\underline{P(t) = 250e^{0{,}010t}}$

c) $\underline{P(14) = 250e^{0{,}140} \approx 290 \text{ st}}$

4208 Då en människa hamnar i nollgradigt vatten avtar under vissa förhållanden kroppstemperaturen y °C enligt differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = -0{,}013y$ där t är tiden i minuter.
Hur länge skulle det, enligt denna modell, dröja innan kroppstemperaturen 37 °C sjunkit till 25 °C?

4208. $y = Ce^{-0{,}013t}$

$y(0) = 37°c \Rightarrow y = 37e^{-0{,}013t}$ °c

$y = 25°c \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{25}{37}}{0{,}013} = \underline{30 \text{ min}}$

4209 En lösningskurva till $2\frac{dy}{dx} + y = 0$ går genom punkten $(1, 2)$.
Bestäm dess ekvation.

4209. $y = Ce^{-x/2}$

$(1,2) \Rightarrow Ce^{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \underline{y = 2e^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}}$

4210 Differentialekvationen $\frac{dv}{dt} + 0{,}5v = 0$ har en lösning med $v(4) = 2$.
Bestäm $v(10)$.

4210. $v = Ce^{-0{,}5t}$

$v(4) = 2 \Rightarrow Ce^{-2} = 2 \Rightarrow v = 2e^{2-0{,}5t}$

$v(10) = 2e^{2-5} = \underline{\frac{2}{e^3}}$

4211 En lösningskurva till differentialekvationen $y' - 2y = 0$ går genom punkten $(0, 3)$.
Visa att den också går genom punkten $(0{,}5; 3e)$.

4211.

$y = 3e^{2x}$

$y(0{,}5) = 3e^{2 \cdot 0{,}5} = 3e$ #

4212 En lösningskurva till differentialekvationen $y' + 12y = 0$ skär linjen $x = 1$ i punkten $(1; 0{,}5)$.

a) Bestäm riktningskoefficienten för kurvans tangent i denna punkt.

b) Var skär tangenten x-axeln?

4212.

$y = Ce^{-12x}$

$(1, 0{,}5) \Rightarrow C \cdot e^{-12} = 0{,}5 \Rightarrow y = 0{,}5e^{12(1-x)}$

a) $y' = -6e^{12(1-x)}$

$\underline{k = y'(1) = -6}$

b) $g - y(1) = y'(1)(x-1)$

$g - 0{,}5 = -6x + 6$

$g = -6x + 6{,}5$

$g = 0 \Rightarrow \underline{x = -\frac{13}{12}}$

4213 Differentialekvationen $y' + ay = 0$ med villkoret $y(0) = k$ har en lösning $y = 5e^{0,1x}$

Vilka värden har konstanterna a och k?

4213.

$$y = 5e^{0.1x}$$

$$y(0) = k \Rightarrow \underline{k = 5}$$

$$0.1 \cdot 5e^{0.1x} + 5ae^{0.1x} = 0 \Rightarrow \underline{a = -0.1}$$

4214 Under gång stannar plötsligt motorn i en båt. Den bromsande kraften kan i varje ögonblick antas vara proportionell mot hastigheten.

a) Ställ upp med hjälp Newtons andra lag

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

en differentialekvation som beskriver båtens hastighet.

b) Bestäm v som funktion av tiden t, om $t = 0$ ger $v = v_0$

c) Låt $m = 2500$ kg och proportionalitetskonstanten $k = 350$ kg/s. Båten har hastigheten 4,0 m/s då motorn stannar.

Hur stor är hastigheten 3,0 s senare och hur långt har båten färdats under dessa 3,0 sekunder?

4214.

a) $\underline{mv' = -kv}$

b) $v' + \frac{k}{m}v = 0$

$\underline{v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}}$

c) $v(0) = 4 \Rightarrow v_0 = 4 \Rightarrow v = 4e^{-\frac{k}{m}t}$

$v(3) = 4e^{-\frac{k}{m}\cdot 3} = 4 \cdot e^{-\frac{350}{2500}\cdot 3} = \underline{2{,}6 \text{ m/s}}$

$s = \int v\,dt + c = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + c$

$s(0) = 0 \Rightarrow c = \frac{mv_0}{k} \Rightarrow s = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$s(3) = \frac{2500 \cdot 4}{350} \cdot \left(1 - e^{-\frac{350}{2500}\cdot 3}\right) = \underline{9.8 \text{ m}}$

4215 När en kondensator med kapacitansen C urladdas genom en resistor med resistansen R, varierar laddningen q med tiden t enligt

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

Bestäm funktionen $q(t)$ om $q(0) = Q$

4215. $q = ke^{-\frac{1}{RC}t}$

$q(0) = Q \Rightarrow \underline{q = Qe^{-\frac{t}{RC}}}$

4217 Vilken typ av partikulärlösning bör du pröva med till differentialekvationen

$y' - 3y = f(x)$ då $f(x)$ är

a) 15 b) $3x + 4$?

4217. a) $\underline{y = a}$; b) $\underline{y = ax + b}$

4218 Bestäm en partikulärlösning till

a) $y' + 5y = 10$ b) $3y' + 2y + 15 = 0$

4218. a) $y_p = a$; $y_p' = 0$

$0 + 5a = 10 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \underline{y_p = 2}$

b) $y_p = a$; $y_p' = 0$

$0 + 2a + 15 = 0 \Rightarrow a = -\frac{15}{2} \Rightarrow \underline{y_p = -\frac{15}{2}}$

4219 Differentialekvationen $y' - 2y = 8x$ är given.

a) Vilken typ av partikulärlösning bör du pröva med?

b) Finn en partikulärlösning.

c) Vilken är motsvarande homogena ekvation?

d) Finn den allmänna lösningen till den homogena ekvationen.

e) Vilken är den allmänna lösningen till den givna ekvationen?

4219.

a) $\underline{y_p = ax + b}$

b) $y_p' = a \Rightarrow a - 2ax - 2b = 8x$

$-2a = 8 \Rightarrow a = -4$

$a - 2b = 0 \Rightarrow b = -2$

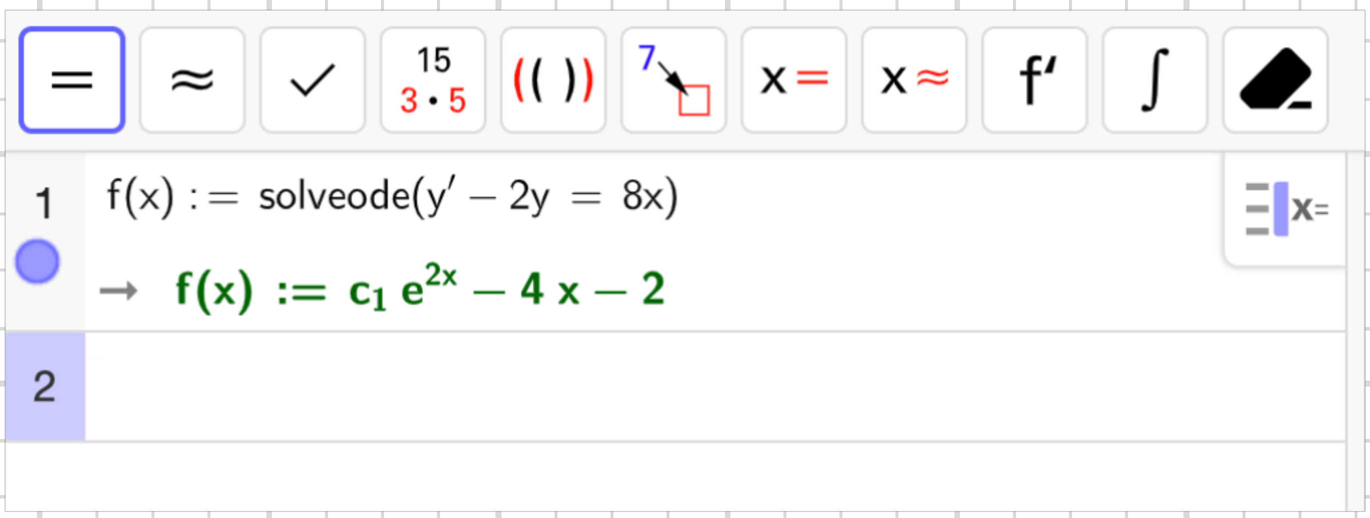
$\underline{y_p = -4x - 2}$

c) $\underline{y' - 2y = 0}$

d) $\underline{y_h = Ce^{2x}}$

e) $\underline{y = Ce^{2x} - 4x - 2}$

Lösning i Geogebra:



4220 Differentialekvationen $y' + 2y = 4x - 2$ antas ha en lösning $y = ax + b$

Bestäm a och b samt ange den allmänna lösningen.

4220. $y_p = ax + b \; ; \; y_p' = a$

$$a + 2ax + 2b = 4x - 2$$

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a + 2b = -2 \Rightarrow b = -2$$

$$y_h = Ce^{-2x}$$

$$\underline{y = Ce^{-2x} + 2x - 2}$$

4221 Differentialekvationen $y' + 3y = e^{4x}$ antas ha en lösning $y = ae^{4x}$

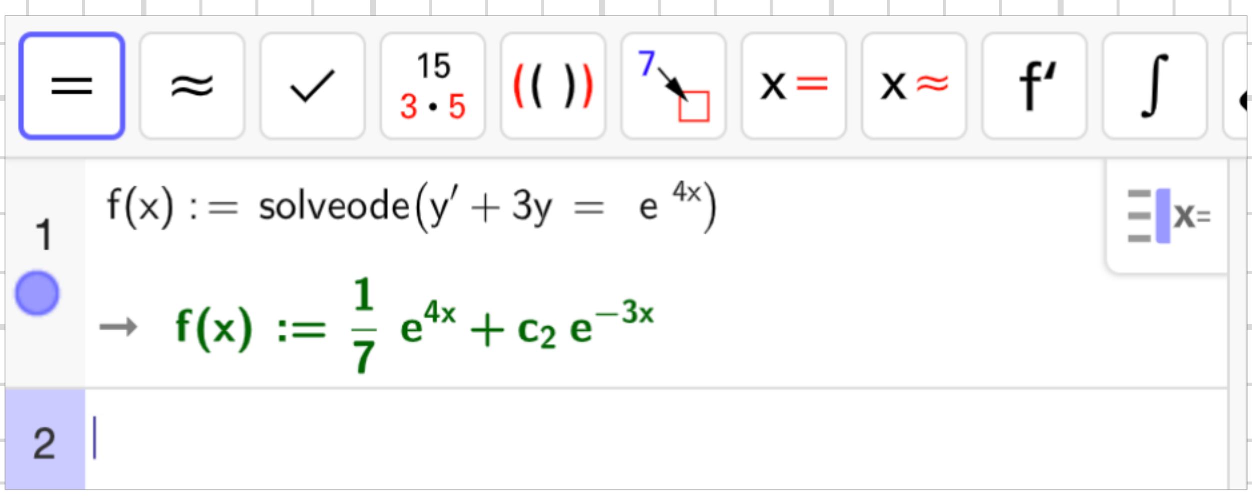
Bestäm a samt ange den allmänna lösningen.

4221. $y_p = ae^{4x} \; ; \; y_p' = 4ae^{4x}$

$$4ae^{4x} + 3ae^{4x} = e^{4x} \Rightarrow a = \frac{1}{7}$$

$$\underline{y = Ce^{-3x} + \frac{1}{7}e^{4x}}$$

Lösning i Geogebra:



4222 Mia vill lösa ekvationen

$y' + y = \sin x$ och $y(0) = 10$

Hon ser att $y(x) = 0{,}5\sin x - 0{,}5\cos x$ uppfyller ekvationen men inte villkoret.

Hur ska hon göra för att uttrycket ska uppfylla båda?

4222.

$y_p = 0{,}5\sin x - 0{,}5\cos x$

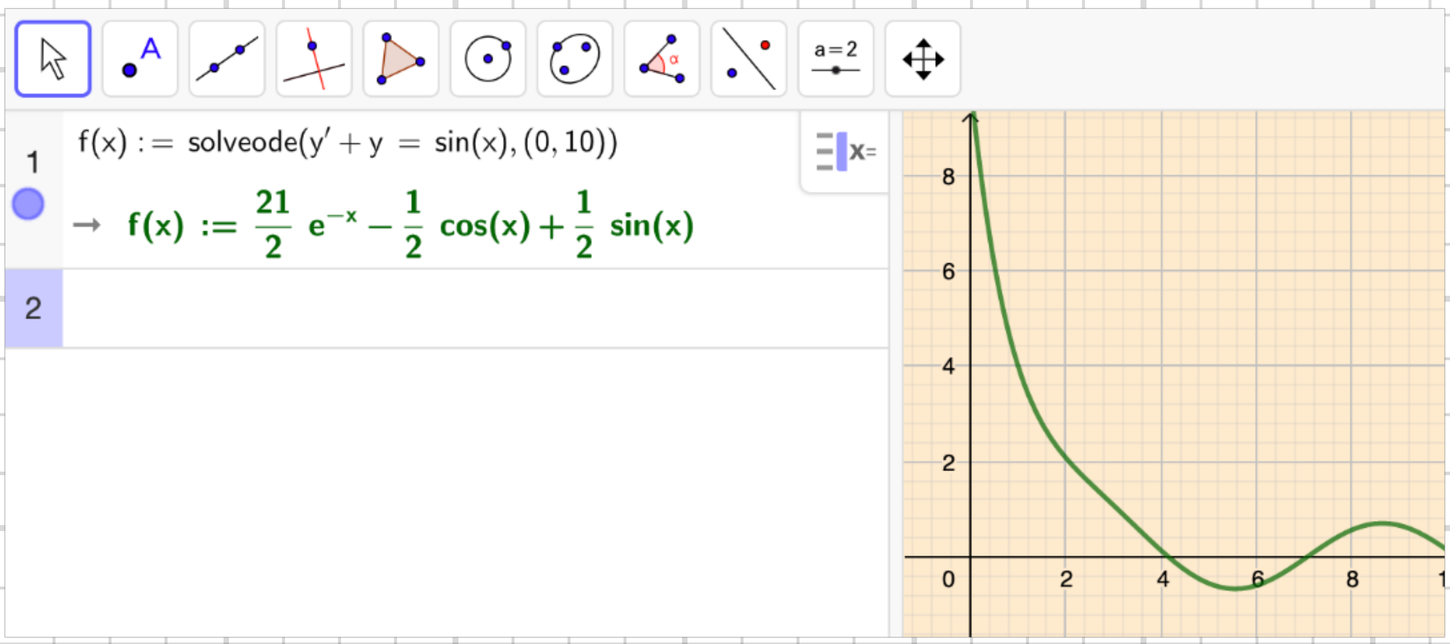
$y_h = Ce^{-x}$

$y = Ce^{-x} + 0{,}5\sin x - 0{,}5\cos x$

$y(0) = 10 \Rightarrow C + 0 - 0{,}5 = 10 \Rightarrow C = 10{,}5$

$\underline{y = 10{,}5\,e^{-x} + 0{,}5\sin x - 0{,}5\cos x}$

Lösning i Geogebra:



4223 Bestäm den allmänna lösningen till

a) $y' + ay = b$ b) $\frac{dy}{dx} = -k(y - T)$

4223. a) $y_h = ce^{-ax}$

$y_p = qx + p \quad ; \quad y_p' = q$

$q + aqx + ap = b \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} aq = 0 \Rightarrow q = 0 \\ q + ap = b \Rightarrow p = \frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = ce^{-ax} + \frac{b}{a}}$$

b) $y_h = ce^{-kx}$

$y_p = ax + b \quad ; \quad y_p' = a$

$a = -k(ax + b - T)$

$a = -kax - kb + kT$

$$\left.\begin{array}{l} ka = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 0 = -kb + kT \Rightarrow b = T \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = ce^{-kx} + T}$$

Lösning i Geogebra:

1 $f(x) := \text{solveode}(y' + a \cdot y = b)$

$\rightarrow f(x) := \frac{c_1\, a\, e^{-ax} + b}{a}$

2 $g(x) := \text{solveode}(y' = -k \cdot (y - T))$

$\rightarrow g(x) := c_3\, e^{-kx} + T$

4224 Ställ upp en differentialekvation av typen $y' + ay = b$ som har lösningen $y = 30 + 12e^{-0,2x}$

4224. $y' = -2,4e^{-0,2x}$

$-2,4e^{-0,2x} + 30a + 12ae^{-0,2x} = b$

$-2,4 + 12a = 0 \Rightarrow a = 0,2$

$b = 30a = 6$

$\underline{y' + 0,2y = 6}$

4225 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 3y = 6$ som uppfyller villkoret $y(0) = 10$.

4225. $y = ce^{-3x} + a \quad ; \quad y' = -3ce^{-3x}$

$-3ce^{-3x} + 3ce^{-3x} + 3a = 6 \Rightarrow a = 2$

$y = ce^{-3x} + 2 \quad ; \quad y(0) = 10 \Rightarrow c + 2 = 10 \quad ; \quad c = 8$

$\underline{y = 8e^{-3x} + 2}$

4226 Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$.

4226. $y = ce^{2x} + ae^x$; $y' = 2ce^{2x} + ae^x$

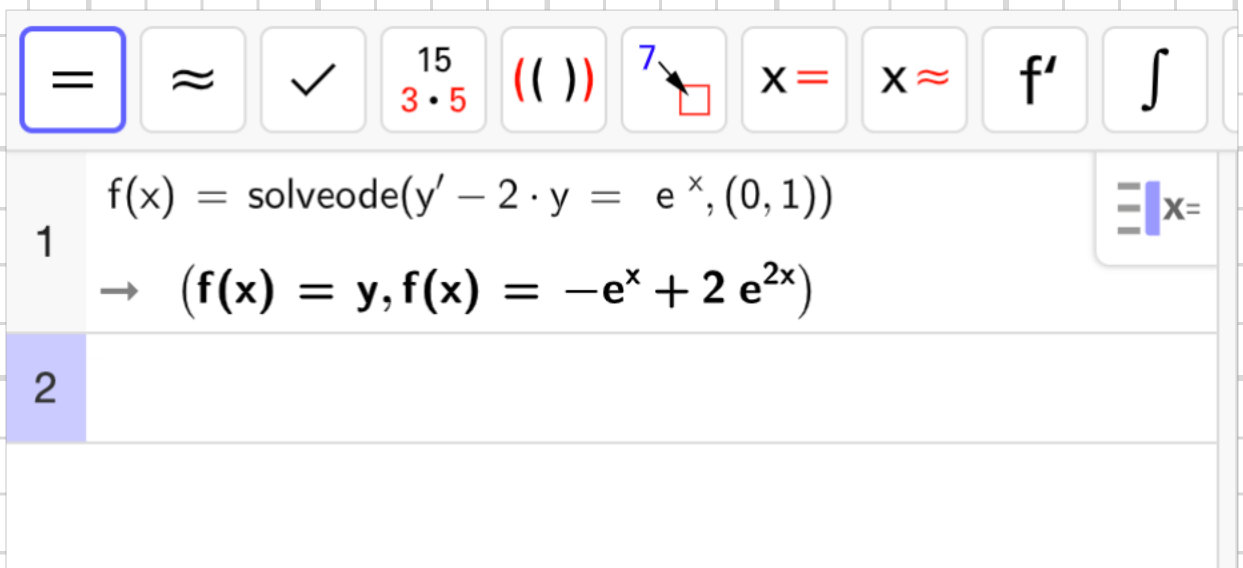
$$2ce^{2x} + ae^x - 2ce^{2x} - 2ae^x = e^x \Rightarrow$$

$$-ae^x = e^x \Rightarrow a = -1$$

$$y = ce^{2x} - e^x \; ; \; y(0) = 1 \Rightarrow c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$\underline{y = 2e^{2x} - e^x}$$

Lösning i Geogebra:



4227 En liten motorbåt med massan $m = 160$ kg drivs med en motor som ger den konstanta framåtdrivande kraften $F = 200$ N. Friktionen (vattenmotståndet) ger upphov till kraften kv, där v är båtens hastighet och k en konstant med värdet 30 Ns/m. Båtens rörelse beskrivs av differentialekvationen

$$m\frac{dv}{dt} = F - kv$$

I ett visst ögonblick är båtens hastighet 1,5 m/s. Hur stor är hastigheten 7,5 sekunder senare?

4227. $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = \frac{F}{m} \equiv v' + 0{,}1875v = 1{,}25$

$$v = Ce^{-0{,}1875t} + a \;;\; v' = -0{,}1875Ce^{-0{,}1875t}$$

$$-0{,}1875Ce^{-0{,}1875t} + 0{,}1875Ce^{-0{,}1875t} + 0{,}1875a = 1{,}25 \Rightarrow a = 6{,}67$$

$$v(0) = 1{,}5 \Rightarrow C + 6{,}67 = 1{,}5 \Rightarrow C = -5{,}17$$

$$v(t) = 6{,}67 - 5{,}17e^{-0{,}1875t}$$

$$v(7{,}5) = 6{,}67 - 5{,}17e^{-0{,}1875 \cdot 7{,}5} = \underline{5{,}4 \text{ m/s}}$$

Lösning i Geogebra:

1. f(x) := SolveODE(160 y′ = 200 − 30 y, (0, 1.5))

   ≈ $f(x) := -5.167\,e^{-0.188x} + 6.667$

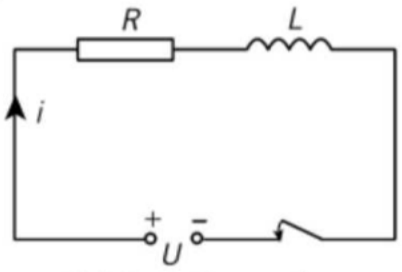
2. f(7.5)

   ≈ 5.401

3.

4228 En spole med resistansen R och induktansen L kopplas till en spänningskälla med en konstant polspänning U.
När kretsen sluts varierar strömmen i med tiden t enligt differentialekvationen

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U$$



a) Den givna differentialekvationen kan skrivas $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}$
Visa att $I = \frac{U}{R}$ är en partikulärlösning och ange sedan den allmänna lösningen.

b) Bestäm den allmänna lösning som uppfyller villkoret att strömmen är noll då kretsen sluts.

c) Hur länge, uttryckt i sekunder, efter det att kretsen sluts dröjer det innan $I = 0{,}98 \cdot \frac{U}{R}$ om $U = 4{,}5$ V, $R = 12$ kΩ och $L = 45$ kH?

a) $I = \frac{U}{R}$; $I' = 0 \Rightarrow VL = 0 + \frac{R}{L} \cdot \frac{U}{R} = \frac{U}{L} = HL$ #

$$I = Ce^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U}{R}$$

b) $I(0) = 0 \Rightarrow C + \frac{U}{R} = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

c) $1 - e^{-\frac{12}{45}t} = 0{,}98$

$$t = -\frac{45}{12} \cdot \ln(1 - 0{,}98) \approx 15 \text{ s}$$

Differentialekvationen $y' = 2xy - 2x$ har en skara av kurvor som lösning.

1 Kurvan som går igenom punkten (1, 2) har lutningen $y' = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$
Tangenten är inritad i koordinatsystemet.
Rita in tangenter i punkterna (1, 0) och (1, 1).

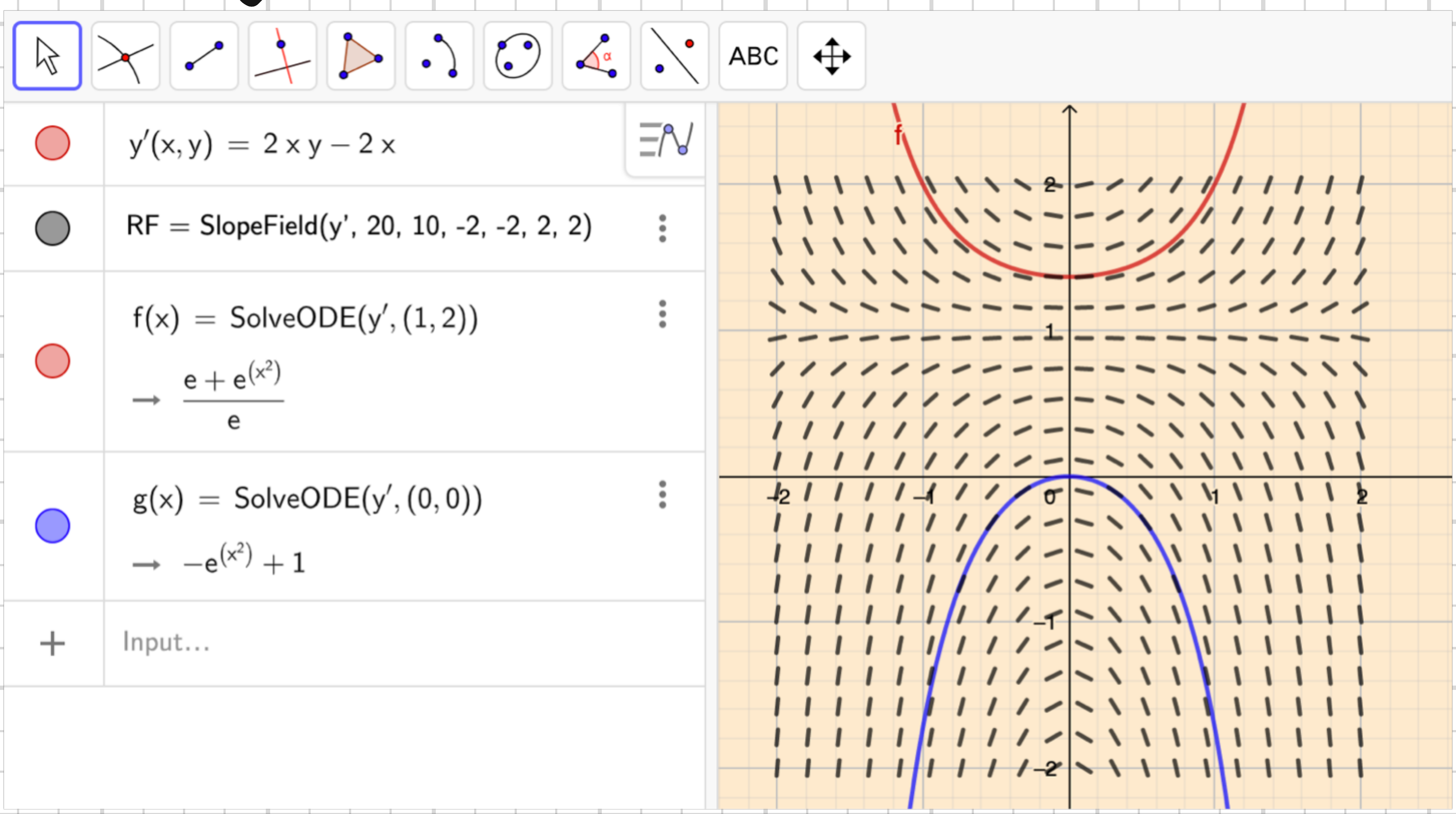
2 Rita in tangenter i alla punkter (a, b), där a och b är heltal, i koordinatsystemet. Detta bildar ett riktningsfält.

3 Skissa en lösningskurva som går genom origo och som följer riktningsfältet.

4 a) Visa att $y = Ce^{x^2} + 1$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Bestäm ekvationen för den lösningskurva som går genom origo och rita in kurvan i koordinatsystemet.
Stämmer resultatet med din skiss?

Geogebra:



4230 Vilken lutning har en lösningskurva till differentialekvationen $y' = xy - 1$ i punkten

a) (0, 1) c) (2, 3)
b) (1, 0) d) (–1, –4) ?

4230.

a) $y' = 0 \cdot 1 - 1 = \underline{-1}$

b) $y' = 1 \cdot 0 - 1 = \underline{-1}$

c) $y' = 2 \cdot 3 - 1 = \underline{5}$

d) $y' = (-1)(-4) - 1 = \underline{3}$

4231 Vilken lutning har en lösningskurva i punkten (2, –1) till differentialekvationen

a) $y' = 1 + y$ c) $y' = 2xy + 4$
b) $y' = 1 + x$ d) $y' = \dfrac{4}{xy} - y$?

4231.

a) $y' = 1 + (-1) = \underline{0}$

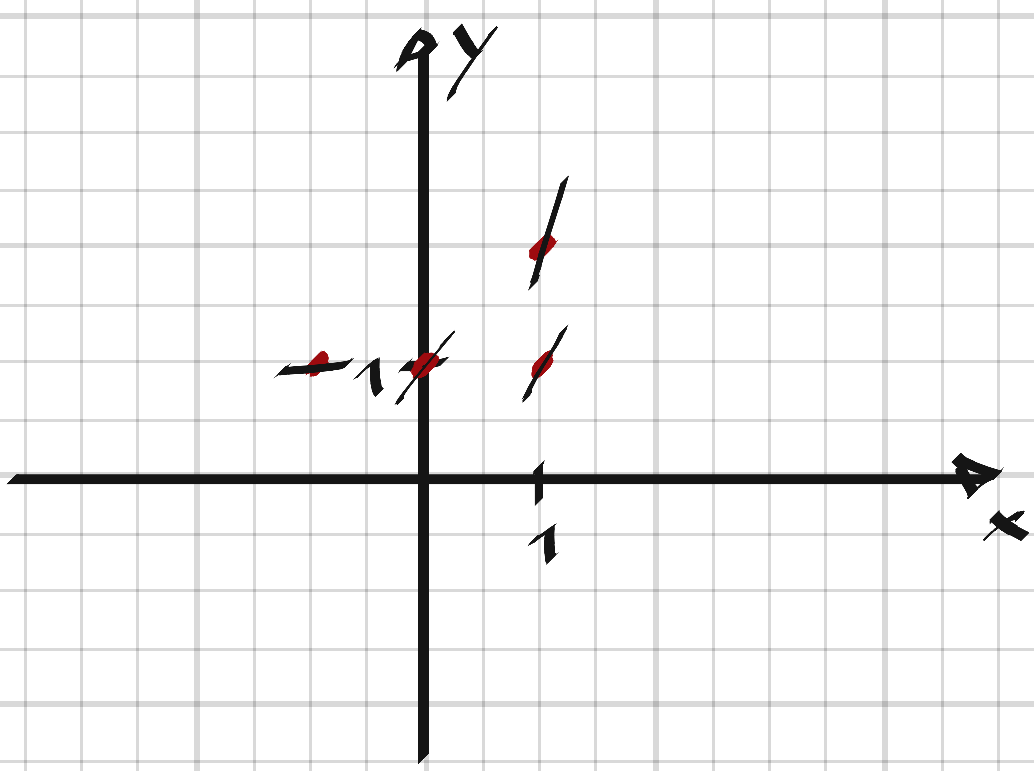
b) $y' = 1 + 2 = \underline{3}$

c) $y' = 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 4 = \underline{0}$

d) $y' = \dfrac{4}{2 \cdot (-1)} - (-1) = \underline{-1}$

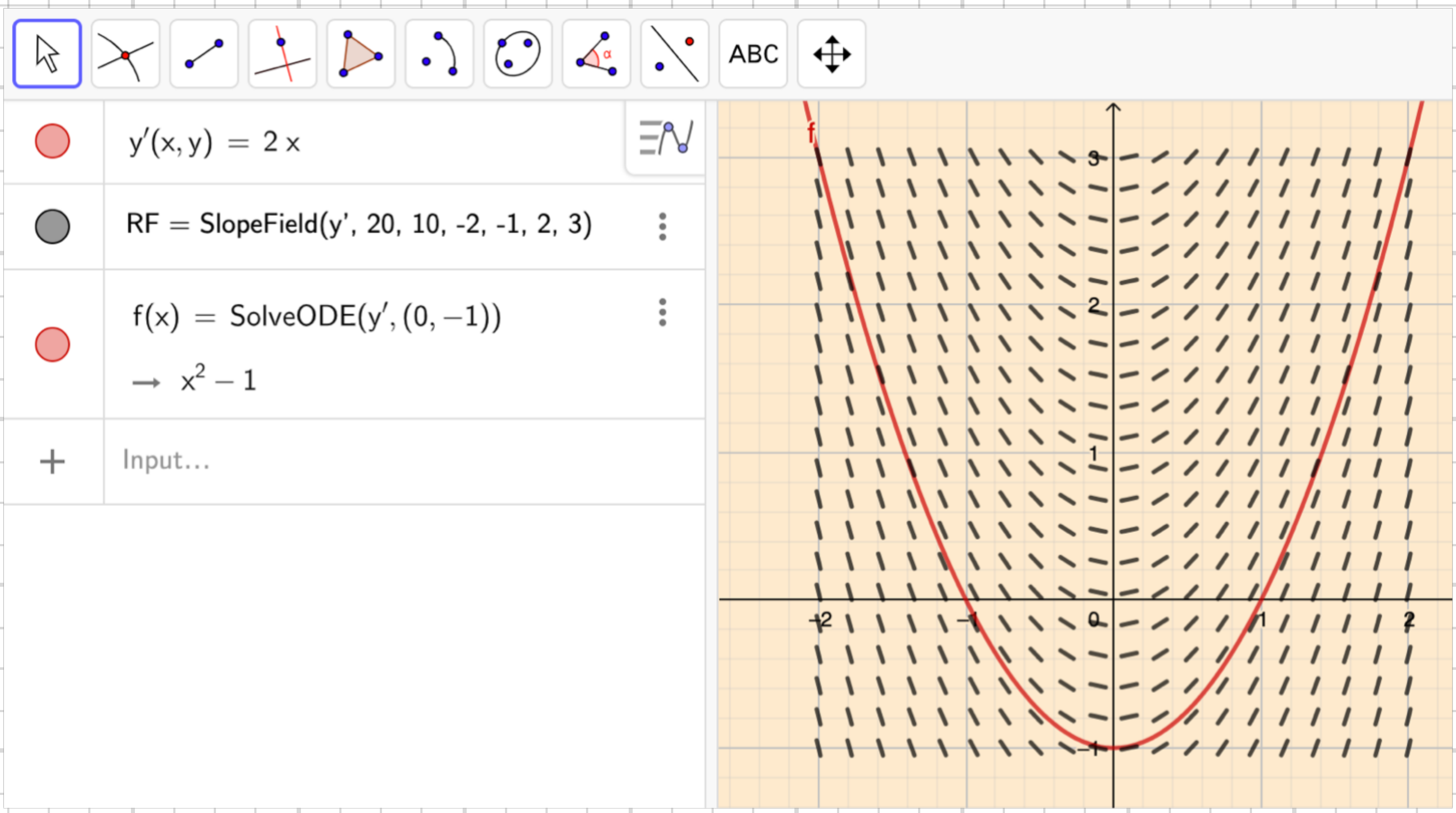
4232 Genom punkterna (1, 2), (1, 1), (0, 1) och (–1, 1) går lösningskurvor till differentialekvationen $y' = y + x$.
Markera i en figur kurvornas lutning i dessa punkter.

4232.



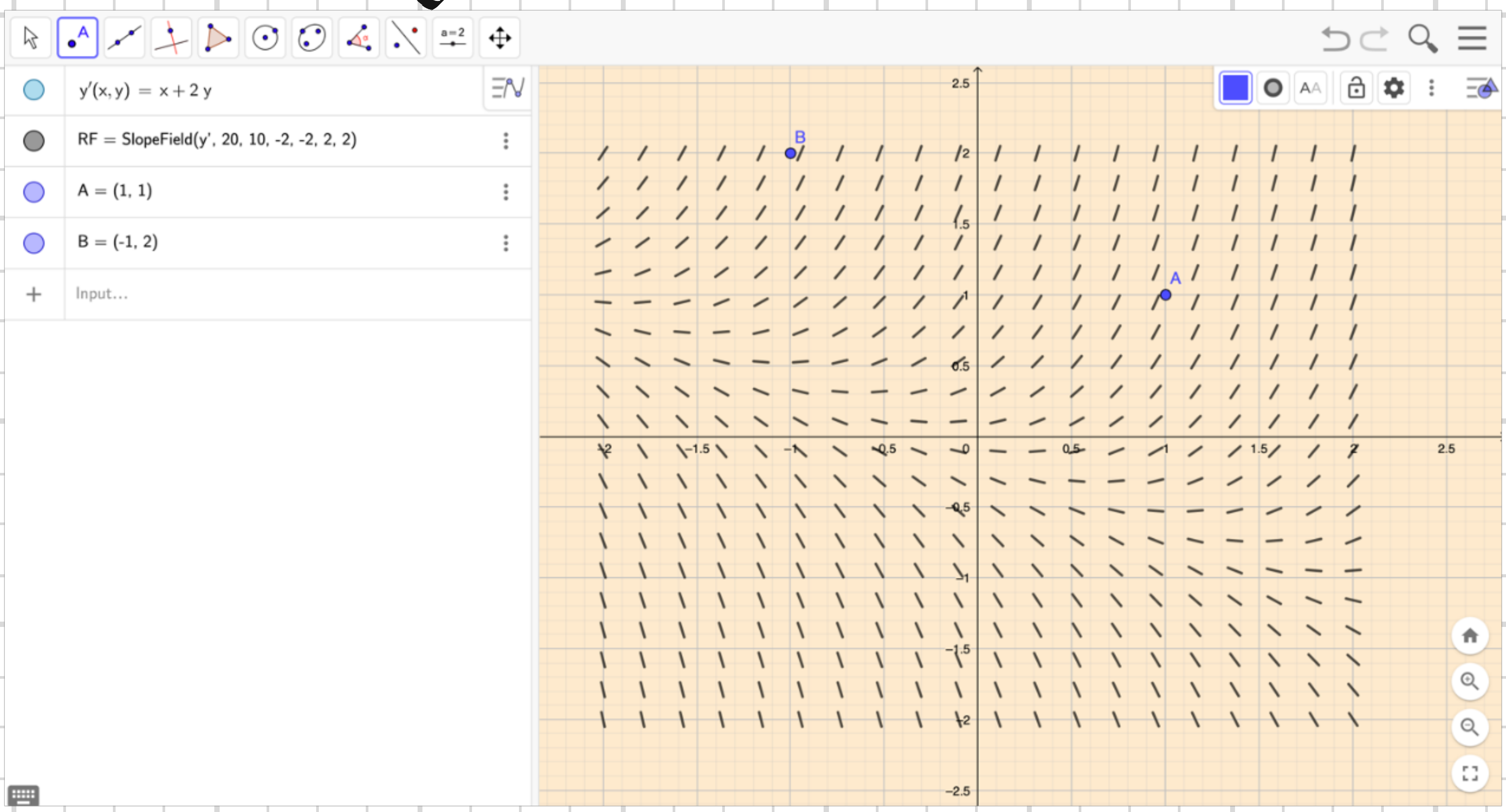
4233 Differentialekvationen $y' = 2x$ är given. Rita riktningsfältet inom området $-2 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 3$. Skissa sedan med riktningsfältets hjälp den lösningskurva som går genom punkten $(0, -1)$.

4233. Geogebra:



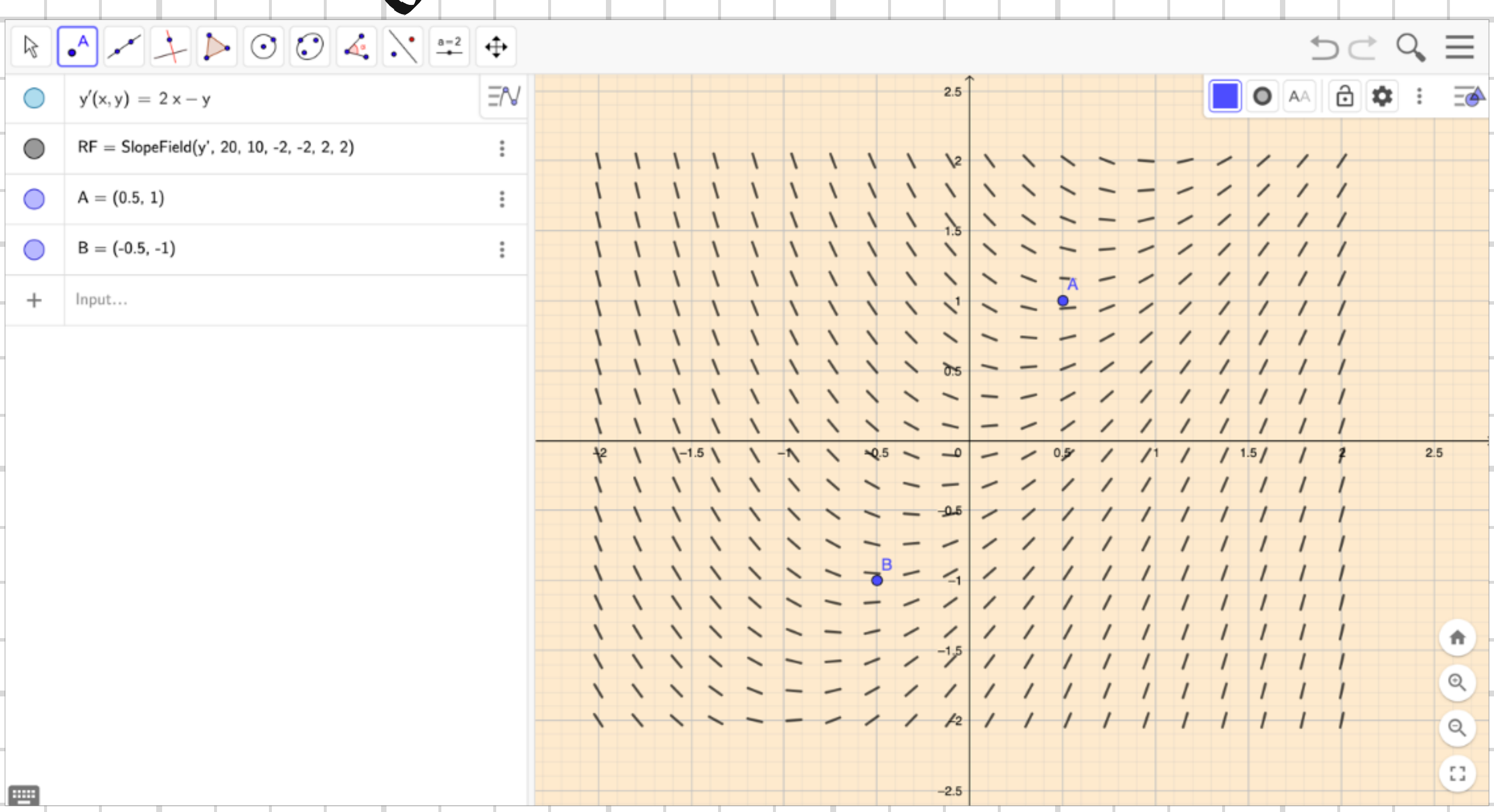
4234 Finn två punkter i riktningsfältet till differentialekvationen $y' = x + 2y$ där lutningen är 3.

4234. Geogebra:



4235 Finn två punkter i riktningsfältet till differentialekvationen $y' = 2x - y$ där lösningskurvan har en horisontell tangent.

4234. Geogebra:



4236 Figuren i det tidigare exemplet visar riktningsfältet till differentialekvationen

$y' = y - x$.

a) Genom punkten (0, 1) går en rak lösningskurva. Vilken ekvation bör den ha? Visa att din gissning är korrekt.

b) Visa att $y = Ce^x + x + 1$ är en lösning för varje värde på C.

c) I figuren är en lösningskurva inritad. Vilken ekvation bör den ha?

d) En lösningskurva (ej inritad) går genom punkten (0; 1,5). Vilken ekvation har den?

4236. a) $y - y(0) = y'(0)(x - 0) \Rightarrow \underline{y = x + 1}$

b) $y' = Ce^x + 1$

$VL = Ce^x + 1$

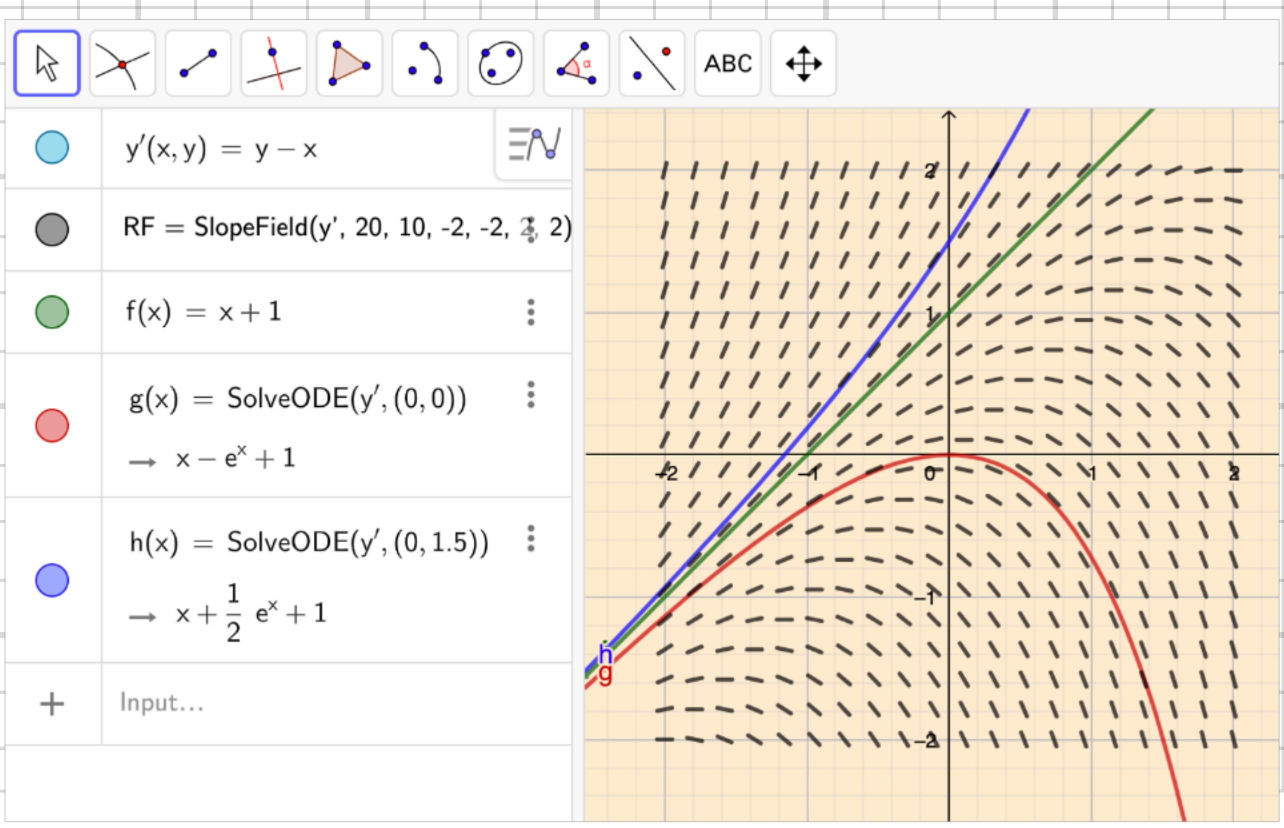
$HL = Ce^x + x + 1 - x = Ce^x + 1 = VL$ #

c) $\underline{y = -e^x + x + 1}$

d) $Ce^0 + 0 + 1 = 1,5 \Rightarrow C = 0,5$

$\underline{y = 0,5e^x + x + 1}$

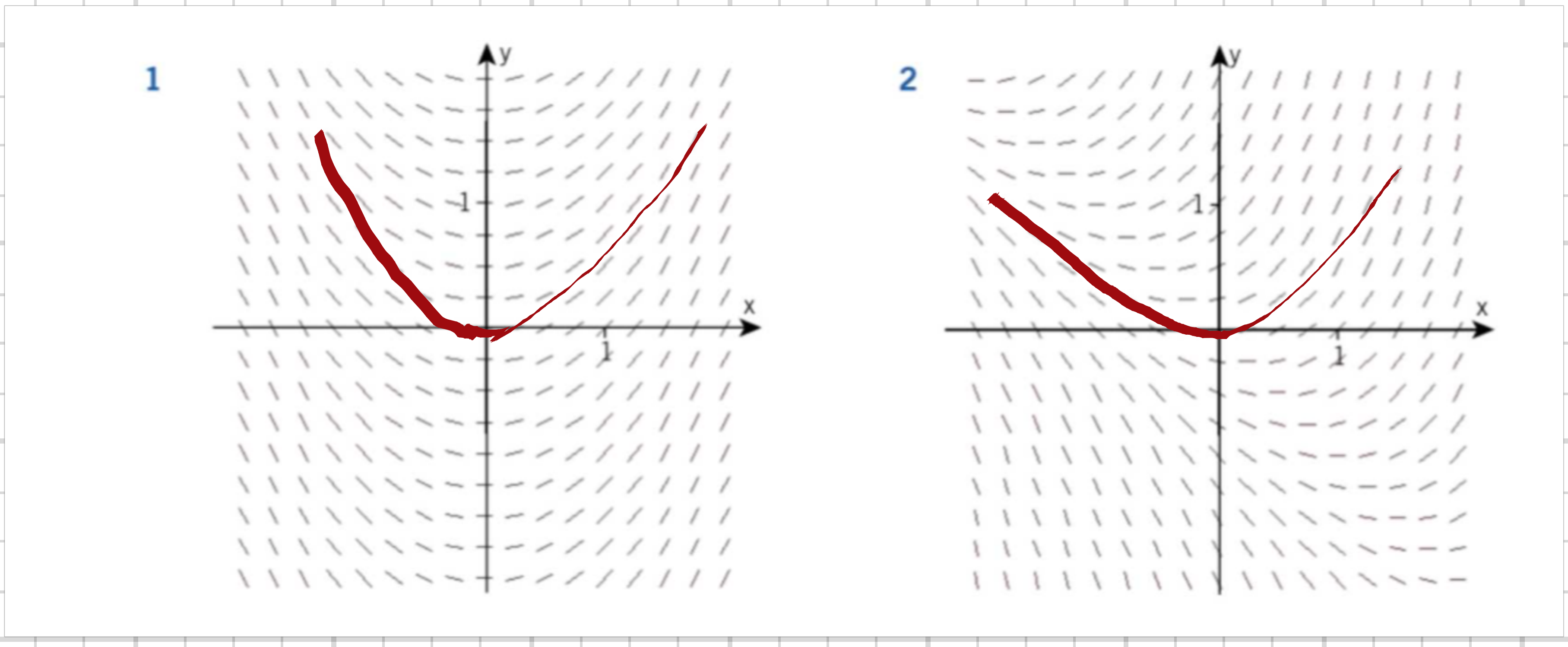
Geogebra:



4237 Skissa den lösningskurva som går genom punkten (0, 0) i riktningsfält nummer

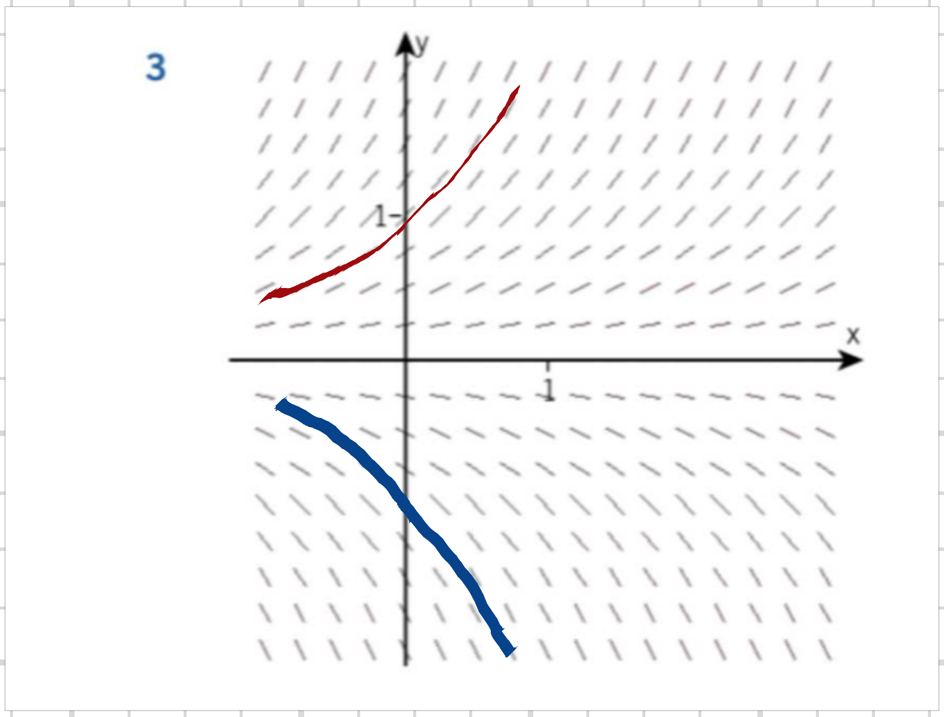
a) 1 b) 2

4237.



4238 Rita i stora drag de lösningskurvor som går genom punkterna (0, 1) och (0, –1) i riktningsfält nummer 3.

4238.

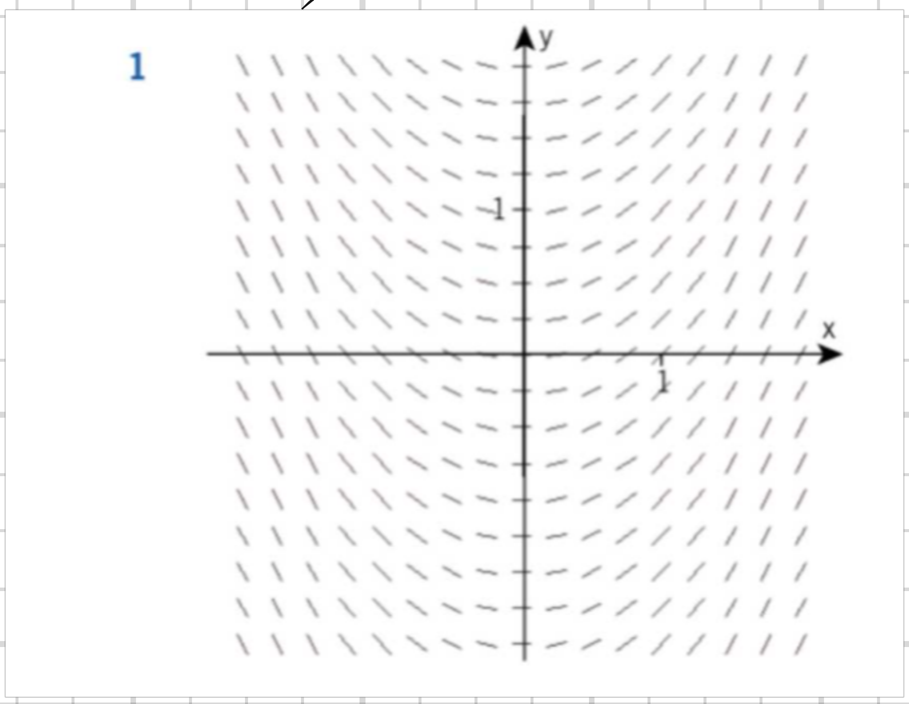


4239 Vilket riktningsfält svarar mot differentialekvationen

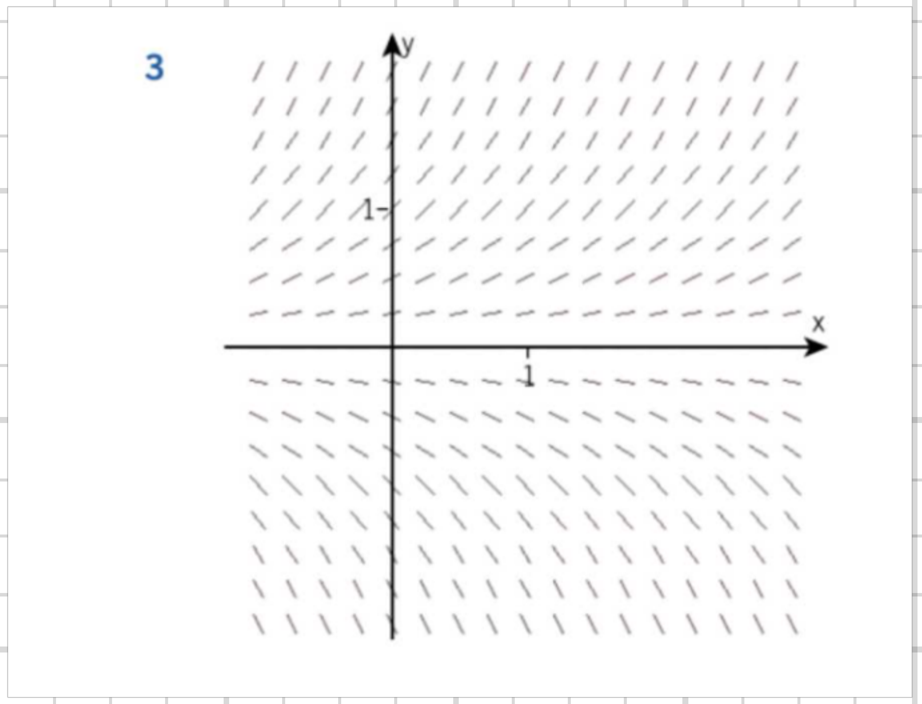
a) $y' = x$ b) $y' = y$?

4239.

a)

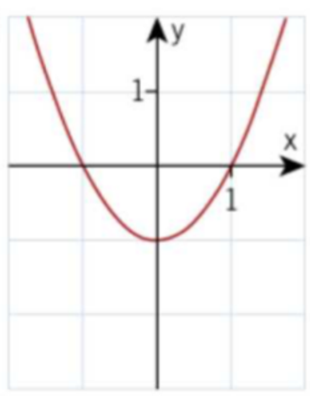


b)

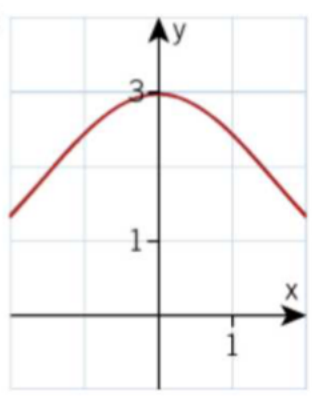


4240 I vilket riktningsfält passar lösningskurvan in?

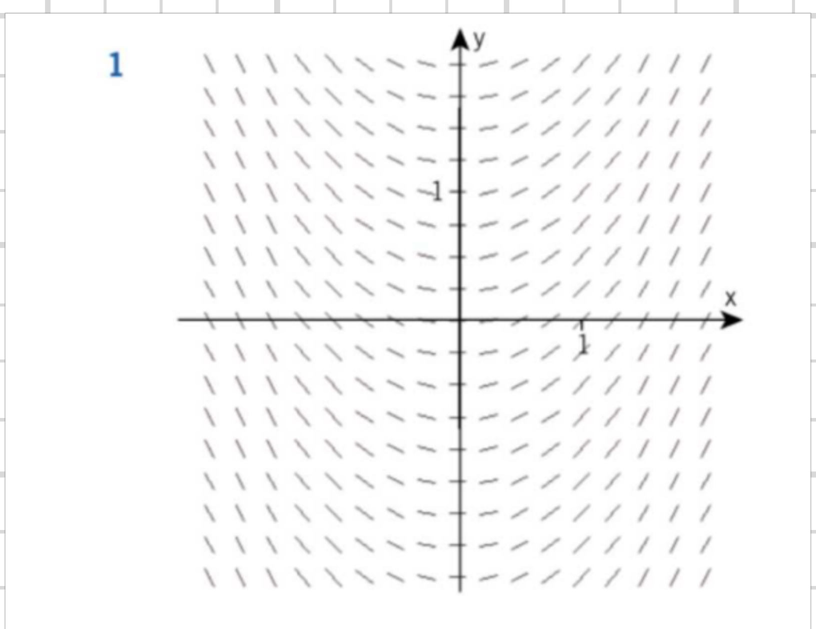
a)



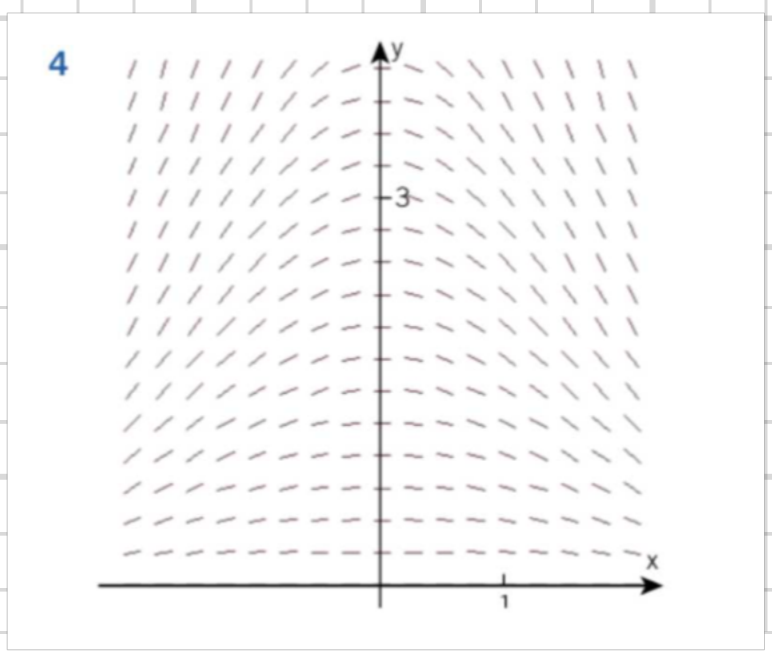
b)



4240. a)

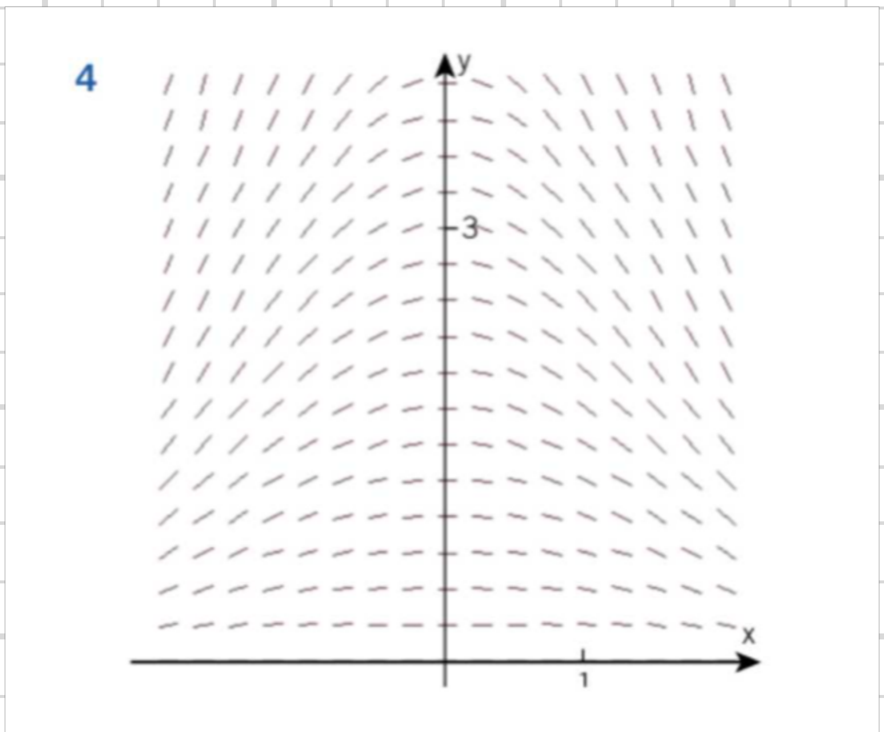


b)



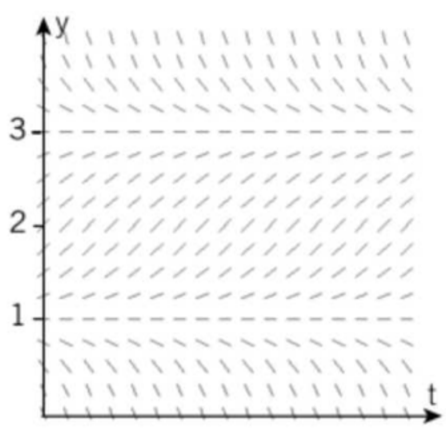
4241 Vilket riktningsfält svarar mot differentialekvationen $y' = -0{,}4xy$?

4241.



4242 En differentialekvation $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ där y är antalet i tusental och t tiden i år beskriver utvecklingen av en växtpopulation.

Differentialekvationen ger följande riktningsfält:

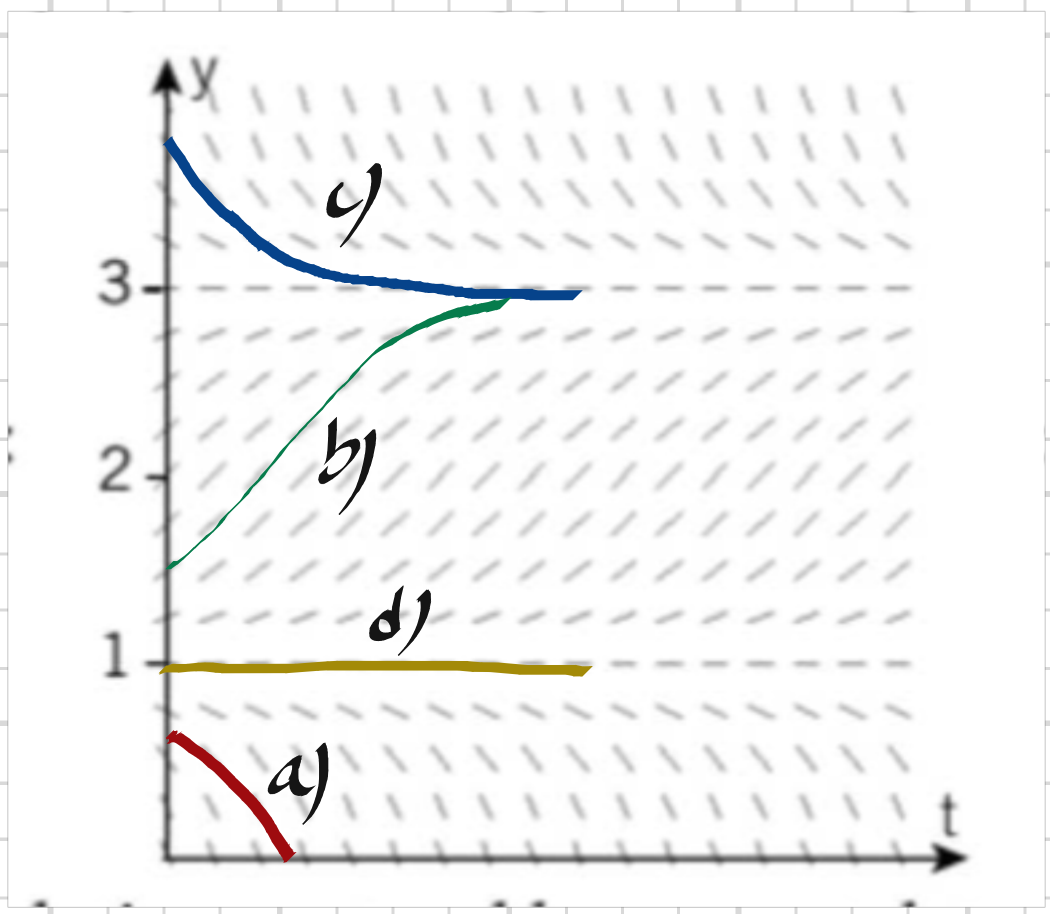


Hur bör populationen utvecklas om antalet individer från början är

a) 750 c) 3 500

b) 1 500 d) 1 000?

4242.

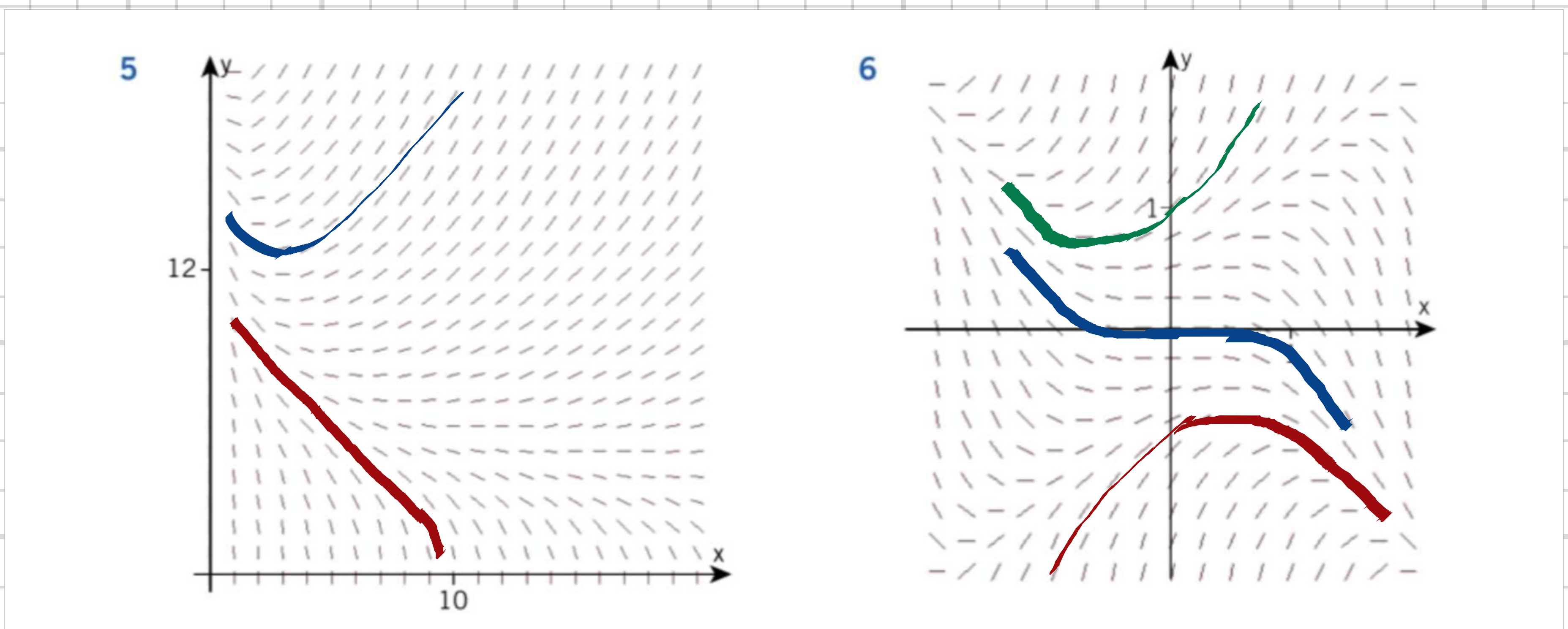


4243 Skissa i riktningsfält nummer

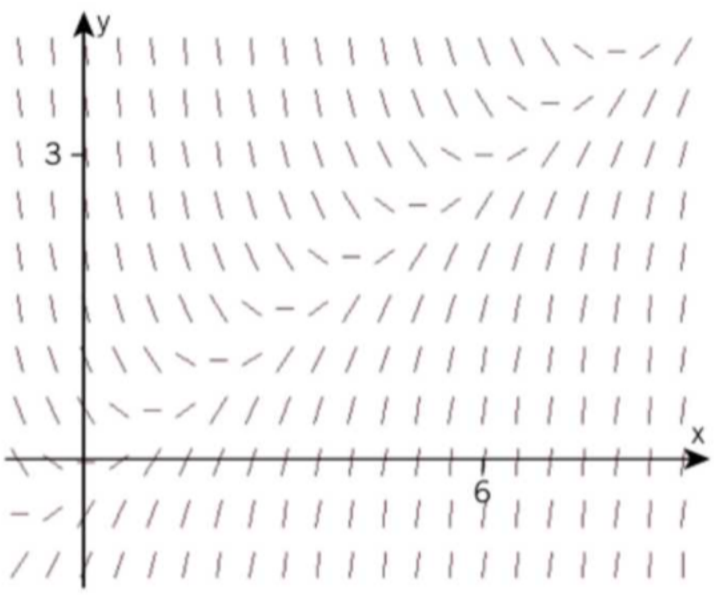
a) 5 de lösningskurvor som går genom punkterna (1, 10) och (1, 14)

b) 6 de lösningskurvor som går genom punkterna (0, –1), (0, 0) och (0, 1).

4243.



4244 Differentialekvationen $y' = x - 2y$ har riktningsfältet



a) Vilken lösningskurva närmar sig alla lösningar enligt riktningsfältet då x växer?

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen och förklara din slutsats i a) algebraiskt.

4244.

a) $y = 0{,}5x - 0{,}25$

b) $y = Ce^{-2x} + ax + b \quad ; \quad y' = -2Ce^{-2x} + a$

$$-2Ce^{-2x} + a = x - 2Ce^{-2x} - 2ax - 2b$$

$$1 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0{,}5$$

$$-2b = a \Rightarrow b = -0{,}25$$

$$\underline{y = Ce^{-2x} + 0{,}5x - 0{,}25}$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(Ce^{-2x} + 0{,}5x - 0{,}25\right) = 0{,}5x - 0{,}25}$$

1 Utför ett steg i positiv x-riktning med Eulers stegmetod för differentialekvationen $y' = -0{,}2xy$ med startpunkten (1, 3).

a) I vilken riktning ska steget ske?

b) I vilken punkt hamnar vi om $h = 1$?

2 Starta i punkten (1, 2) och beräkna ett närmevärde till y då $x = 1{,}5$ genom att utföra ett Eulersteg med steglängden 0,5 för differentialekvationen

a) $y' = 2x$

b) $y' = 2x - y$

c) $y' = 0{,}2y$

d) $y' = 0{,}2y - x^2$

3 En gryta med vatten svalnar enligt differentialekvationen

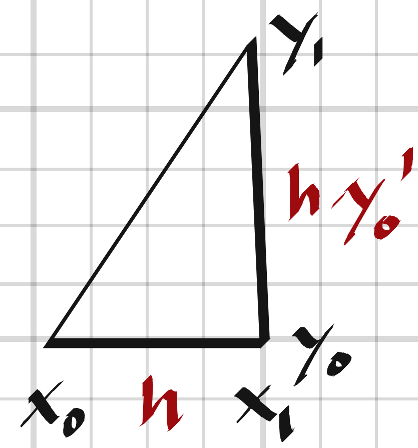
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -0{,}014(y-20) \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

där y °C är temperaturen efter t minuter.

Beräkna ett närmevärde till $y(20)$ med en decimal genom att

a) använda Eulers metod med steglängden 10

b) lösa differentialekvationen exakt.



1. a) $y_0' = -0{,}2 \cdot 1 \cdot 3 = -0{,}6$

b) $\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h = 1 + 1 = 2 \\ y_1 &= y_0 + h \cdot y_0' = 3 - 1 \cdot 0{,}6 = 2{,}4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_1, y_1) = \underline{(2, 2{,}4)}$

2.

a) $y_0' = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2$

$x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' = 2 + 0{,}5 \cdot 2 = \underline{3}$

b) $y_0' = 2x_0 - y_0 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' = 2 + 0{,}5 \cdot 0 = \underline{2}$

c) $y_0' = 0{,}2y_0 = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$

$x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' = 2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = \underline{2{,}2}$

d) $y_0' = 0{,}2 \cdot y_0 - x_0^2 = 0{,}2 \cdot 2 - 1^2 = -0{,}6$

$x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' = 2 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 = \underline{1{,}7}$

3. a) $y_0' = -0{,}014(y_0 - 20) = -0{,}014(100 - 20) = -1{,}12$

$x_1 = x_0 + h = 0 + 10 = 10$

$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' = 100 - 10 \cdot 1{,}12 = 88{,}8$

$$y_1' = -0{,}014(y_1 - 20) = -0{,}014(88{,}8 - 20) = -0{,}9632$$

$$x_2 = x_1 + h = 10 + 10 = 20$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot y_1' = 88{,}8 - 10 \cdot 0{,}9632 = \underline{79{,}2}$$

b)

$$y = Ce^{-0{,}014x} + a \quad ; \quad y' = -0{,}014\,Ce^{-0{,}014x}$$

$$-0{,}014\,Ce^{-0{,}014x} = -0{,}014\,Ce^{-0{,}014x} - 0{,}014a + 0{,}28 \Rightarrow a = 20$$

$$y = Ce^{-0{,}014x} + 20 \quad ; \quad y(0) = 100 \Rightarrow C = 80$$

$$y = 80e^{-0{,}014x} + 20$$

$$y(20) = 80e^{-0{,}014 \cdot 20} + 20 = \underline{80.5}$$

4302 Antalet bakterier y i en näringslösning tillväxer med en hastighet som är 12 % per timme av den aktuella bakteriemängden. Från början var antalet bakterier 150 000.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.

4302. $y' = 0{,}12y \quad , \quad y(0) = 150\,000$

4303 Den area som vattenväxterna i en stor näringsrik sjö täcker ökar med en hastighet som är 8 % per år av den aktuella arean. År 2013 täckte växterna 300 m^2 av sjön.

a) Ställ upp en differentialekvation för denna situation.

b) Hur stor area skulle växterna täcka enligt denna modell år 2023?

c) Nämn någon förenkling i modellen.

4303. a) $y' = 0{,}08y \quad , \quad y(0) = 300 \text{ m}^2$

b) $y(10) = 300e^{0{,}08 \cdot 10} \approx 670 \text{ m}^2$

c) Att tillväxthastigheten är densamma.

4304 Lufttrycket förändras med en hastighet som på varje höjd är proportionell mot det aktuella trycket. Vid havsytans nivå är trycket 101,3 kPa. På höjden 1,00 km är trycket 89,9 kPa.

a) Ställ upp en differentialekvation för denna situation.

b) Beräkna lufttrycket på Sydtoppen, Kebnekaises högsta topp, 2 102 m ö h.

4304.

a) $p' = kp \quad , k < 0 \quad ; \quad p = Ce^{kx}$

$p(0) = 101{,}3 \Rightarrow C = 101{,}3$

$p(1) = 89{,}9 \Rightarrow 101{,}3 \cdot e^{k \cdot 1} = 89{,}9 \Rightarrow k = \ln \frac{89{,}9}{101{,}3} = -0{,}119$

$$\underline{p = 101.3\, e^{-0{,}119x}}$$

b) $p(2{,}102) = 101{,}3\, e^{-0{,}119 \cdot 2{,}102} = \underline{78{,}8 \text{ kPa}}$

4305 Radioaktivt Thorium B sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot mängden Thorium B vid tidpunkten ifråga, så att hälften av den ursprungliga mängden återstår efter 10,6 h.

Hur stor andel av den ursprungliga mängden återstår efter ett dygn?

4305. $y' = -ky \quad , k > 0 \quad ; \quad y = Ce^{-kx}$

$y(10{,}6) = y(0)/2 \Rightarrow Ce^{-10{,}6k} = C/2 \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-10{,}6} = 0{,}06539$

$\frac{y(24)}{y(0)} = \frac{Ce^{-0{,}06539 \cdot 24}}{C} = 0{,}208 \approx \underline{21\,\%}$

4306 Folkmängden y miljoner i ett land förändras enligt differentialekvationen

$\frac{dy}{dt} = 0{,}016y$ där t är tiden i år räknat

från början av år 2010, då folkmängden var 12 miljoner. Ingen hänsyn har då tagits till in- eller utvandring.

a) Hur blir ekvationen om netto utvandringen är 0,25 miljoner/år?

b) Beräkna folkmängden i början av år 2020 om nettoutvandringen hela tiden är 0,25 miljoner/år.

4306.

a) $y' = 0.016y - 0.25 \quad , \quad y(0) = 12$

b) $y = Ce^{0.016t} + a$

$y' = 0.016\,Ce^{0.016t}$

$0.016\,Ce^{0.016t} = 0.016\,Ce^{0.016t} + 0.016a - 0.25 \Rightarrow a = \frac{0.25}{0.016} = 15.625$

$y = Ce^{0.016t} + 15.625$

$y(0) = 12 \Rightarrow C + 15.625 = 12 \Rightarrow C = -3.625$

$y = 15.625 - 3.625e^{0.016t} \Rightarrow$

$y(10) = 11.4$ milj.

4308 En saltlösning som innehåller 0,05 kg salt per liter rinner in i en tank med hastigheten 4 liter per minut.

Med vilken hastighet i kg/min tillförs salt till tanken?

4308. $y' = 0{,}05 \cdot 4 = \underline{0{,}2 \text{ kg/min}}$

4309 En tank innehåller 80 liter rent vatten. Saltlösning med koncentrationen 2 g/l tillförs med hastigheten 2 l/min. Av den väl blandade lösningen bortförs 2 l/min, dvs vätskemängden i tanken är konstant. Vi antar att tanken innehåller y g salt efter x min.

a) Med vilken hastighet i g/min strömmar salt in i tanken?

b) Med vilken hastighet i g/min strömmar salt ut ur tanken?

c) Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.

4309.

a) $y'_{in} = \underline{4}$

b) $y'_{ut} = \frac{2}{80} y = \underline{0{,}025 y}$

c) $\underline{y' = 4 - 0{,}025 y \quad , \quad y(0) = 0}$

4310 I ett kärl, som innehåller 20 l rent vatten, häller man outspädd saft med hastigheten 4 l/min. Av den väl blandade lösningen bortförs 4 l/min. Vi antar att det finns y l saft i kärlet efter x min.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur saftmängden i kärlet förändras.

4310. $y' = 4 - 0{,}2y \quad , \quad y(0) = 0$

4311 Vattenvolymen i en sjö uppskattas till $1{,}3 \cdot 10^{13}$ liter. Tillflödet är $6{,}5 \cdot 10^{10}$ liter/år och avrinningen är lika stor. Anta att man genom lagstiftning helt kunde stoppa alla föroreningar i tillflödet.

Hur länge skulle det då dröja innan mängden av föroreningar i sjön sjönk till 1/10 av det nuvarande värdet?

4311. y = massa föroreningar [kg]

$$y' = 0 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{10} - \frac{6{,}5 \cdot 10^{10}}{1{,}3 \cdot 10^{13}} y = -0{,}005y$$

$$y = Ce^{-0{,}005t}$$

$$\frac{y(t)}{y(0)} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{Ce^{-0{,}005t}}{C} = \frac{1}{10} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{10}}{-0{,}005} \approx 460 \text{ år}$$

4312 En byggnad har volymen 80 000 m^3. En gasläcka har uppskattningsvis läckt ut 800 m^3 gas. Ett ventilationssystem startar och pumpar in frisk luft med en hastighet av 1 600 m^3/min. Samtidigt lämnar en blandning av gas och luft byggnaden med samma hastighet. Låt gasmängden vara y m^3 efter x min.

a) Ställ upp en differentialekvation för detta förlopp.

b) Ursprungligen är gashalten 1 %. Hur länge dröjer det innan den är nere i 0,01 %?

4312. y = mängden gas $[m^3]$

a) $y' = 0 \cdot 1600 - \frac{1600}{80000} y$

$\underline{y' = -0{,}02y \,,\ y(0) = 800}$

b) $y = Ce^{-0{,}02t}$; $y(0) = 800 \Rightarrow y = 800e^{-0{,}02t}$

0,01 % motsvarar $y = 0{,}0001 \cdot 80000 = 8$ m^3

$800e^{-0{,}02t} = 8 \Rightarrow t = \frac{\ln 0{,}01}{-0{,}02} = \underline{230 \text{ min}}$

4313 Teofyllin är ett medel mot astma. För att det ska verka bör halten i blodet uppgå till minst 5,0 mg/liter och för att det inte ska ge biverkningar bör halten ej överstiga 20 mg/liter. Stina påbörjar en behandling och får en dos av detta medel som ger halten 12 mg/liter. Halten i blodet avtar sedan med en hastighet som är 8,7 % per timme. Efter 8,0 h får Stina ytterligare en injektion av teofyllin.

Vilken är den kortaste och vilken är den längsta tid man därefter bör vänta innan hon får nästa injektion? Varje injektion höjer teofyllinhalten i blodet med 12 mg/liter.

4313. y = mängden Teofyllin [mg/liter]

$$y' = -0.087y \quad , \quad y(0) = 12 \quad \Rightarrow$$

$$y = 12e^{-0.087t} \quad , \quad t < 8$$

$$t = 8h \Rightarrow y = 12e^{-0.087 \cdot 8} + 12 = 5.98 + 12 = 17.98 \approx 18$$

$$y = 5 \Rightarrow 18e^{-0.08t} = 5 \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{5}{18}}{-0.087} = 14.7\ h \rightarrow 14\ h$$

(max)

$$y = 20 \Rightarrow y = 18e^{-0.087t} + 12 = 20 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln \frac{20-12}{18}}{-0.087} = 9.3\ h \rightarrow 10\ h \text{ (min)}$$

4314 Ett medicinskt preparat tillförs blodet intravenöst med den konstanta hastigheten a mg/h. Mängden av preparatet i blodet är y mg vid tiden t h efter tillförselns början. Preparatet försvinner från blodet med en hastighet som är proportionell mot den aktuella mängden. Från början innehåller blodet b mg av preparatet.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.

b) Bestäm funktionen $y = y(t)$ genom att lösa differentialekvationen.

c) Vad händer med y då t ökar?

4314.

a) $\underline{y' = a - ky \quad , \quad y(0) = b}$

b) $y = ce^{-kt} + q \quad ; \quad y' = -kce^{-kt}$

$-kce^{-kt} = a - kce^{-kt} - kq \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{a}{k}$

$y = ce^{-kt} + \dfrac{a}{k}$

$y(0) = b \Rightarrow c + \dfrac{a}{k} = b \Rightarrow c = b - \dfrac{a}{k}$

$$\underline{y(t) = \left(b - \frac{a}{k}\right)e^{-kt} + \frac{a}{k}}$$

c) $$\underline{\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{a}{k} \text{ mg}}$$

4316 En kall öl har temperaturen 10 °C. Den står i ett rum med temperaturen 30 °C. Efter 10 minuter har temperaturen stigit till 15 °C. Temperaturen y °C stiger med en hastighet som är proportionell mot differensen $30 - y$.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver denna situation.

b) Vilken är temperaturen efter 20 min?

c) Hur snabbt ökar temperaturen då den är 20°C?

4316. a) $T' = k(30 - T)$, $T(0) = 10°C$

b) $T = Ce^{-kt} + a$; $T' = -kCe^{-kt}$

$-kCe^{-kt} = 30k - kCe^{-kt} - ka \Rightarrow a = 30$

$T(t) = Ce^{-kt} + 30$; $T(0) = 10 \Rightarrow C + 30 = 10 \Rightarrow C = -20$

$T(10) = 15 \Rightarrow 30 - 20e^{-k \cdot 10} = 15 \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{15}{20}}{-10} = 0{,}0288$

$T(t) = 30 - 20e^{-0{,}0288t} \Rightarrow T(20) = 19\,°C$

c) $T' = 0{,}0288(30 - 20) = 0{,}29\ °C/min$

4317 Temperaturen y °C i en tallrik soppa avtar med en hastighet som i varje ögonblick är 6,0 % per minut av differensen $y - 21$, där 21 °C är rumstemperaturen.

Bestäm soppans temperatur efter 5,0 minuter om dess temperatur från början var 85 °C.

4317.

$y' = -0.06(y-21)$, $y(0) = 85$

$y = Ce^{-0.06t} + a$; $y' = -0.06Ce^{-0.06t}$

$-0.06Ce^{0.06t} = -0.06Ce^{0.06t} - 0.06a + 1.26 \Rightarrow a = 21$

$y(0) = 85 \Rightarrow C + 21 = 85 \Rightarrow C = 64$

$y(t) = 64e^{-0.06t} + 21 \Rightarrow$

$y(5) = 68$ °C

4318 En gryta med kokande vatten placerades klockan 10.00 i ett rum med temperaturen 22 °C. Efter 11 minuter är temperaturen 91 °C. Vi antar att avsvalningen följer Newtons avsvalningslag.

a) Vad är klockan när vattnets temperatur sjunkit till 45 °C?

b) Hur snabbt sjunker temperaturen efter 25 minuter?

4318. $y' = -k(y-22)$, $y(0) = 100°C$

$y = Ce^{-kt} + 22$

$y(0) = 100 \Rightarrow C = 100 - 22 = 78$

$y(11) = 91 \Rightarrow 78e^{-k \cdot 11} + 22 = 91 \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}8846}{-11} = 0{,}01146$

$y(t) = 78e^{-0{,}01146t} + 22$

a) $78e^{-0{,}01146t} + 22 = 45 \Rightarrow t = 107$ min $= 1$ h 47 min

Klockan är 11:47

b) $y'(t) = -0{,}8939e^{-0{,}01146t} \Rightarrow$

$y'(25) = -0{,}67$

Temp. sjunker med 0,67 °C/min

4319 Klockan 12.00 en kall vinterdag blir det strömavbrott i familjen Svenssons eluppvärmda villa. Temperaturen sjunker från 20 °C till 15 °C på 9 h.

Är det risk att vattenledningarna fryser om strömmen inte kommer tillbaka förrän klockan 12.00 nästa dag?

Vi antar att utetemperaturen hela tiden är –12 °C och att avsvalningen följer Newtons avsvalningslag.

4319. $y' = -k(y+12)$, $y(0) = 20\,°C$

$$y = Ce^{-kt} - 12$$

$$y(0) = 20 \Rightarrow C = 32$$

$$y(9) = 15 \Rightarrow 32e^{-9k} - 12 = 15 \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{15+12}{32}}{-9} = 0{,}0189$$

$$y(t) = 32e^{-0{,}0189t} - 12 \Rightarrow$$

$$y(24) = 8\,°C$$

Nej, vattenledningarna kommer inte frysa.

4321 En fallskärmshoppare med massan 84 kg faller fritt utan att låta fallskärmen utvecklas. Luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten i kvadrat med proportionalitetskonstanten 0,336 kg/m.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver rörelsen. Låt hastigheten vara y m/s efter x s. Ange begynnelsevillkoret.

4321.

$$my' = mg - ky^2$$

$$\underline{y' = 9{,}8 - 0{,}004y^2 \quad , \quad y(0) = 0}$$

4322 Ett föremål med massan 40 kg faller fritt. Om hastigheten är y m/s efter t s gäller

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 9{,}8 - 0{,}001y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Vad kan sägas om rörelsen?

4322.

Luftmotståndets proportionalitetskonstant $= 0{,}001 \cdot 40 = 0{,}040$ kg/m.

Begynnelsehastigheten $= 0$

4323 Ett föremål med massan 60 kg faller fritt utan begynnelsehastighet. Motståndskraften antas vara proportionell mot kvadratroten ur hastigheten. Med de använda enheterna har proportionalitetskonstanten mätetalet 80.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver rörelsen.

4323. $y' = 9{,}8 - \frac{80}{60}\sqrt{y}\ ,\quad y(0) = 0$

4324 Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} m\dfrac{dy}{dt} = mg - kv \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

och bestäm det värde som v närmar sig för stora värden på t.

4324. $y' = g - \frac{k}{m}\cdot y\ ,\quad y(0) = 0$

$y = ce^{-\frac{k}{m}t} + a\ ,\quad y' = -\frac{k}{m}\cdot ce^{-\frac{k}{m}t}$

$-\frac{k}{m}ce^{-\frac{k}{m}t} = g - \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m}\cdot a \Rightarrow a = \frac{mg}{k}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c + \frac{mg}{k} = 0 \Rightarrow c = -\frac{mg}{k}$

$y(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{mg}{k}$

4326 Det maximala antalet sjuka i en epidemi är 6 000. Man antar att epidemin sprider sig enligt den logistiska tillväxtekvationen med proportionalitetskonstanten 0,0004.

a) Ställ upp denna differentialekvation.

b) Hur många är sjuka när tillväxthastigheten är maximal?

4326.

a) $y' = 0.0004\,y(6000 - y)$

b) $y'_{max} = 3000$

4327 En insektspopulation med y individer vid tiden t dygn tillväxer enligt differentialekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 0{,}0004y(600 - y) \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

Tolka tillväxtekvationen i ord så utförligt som möjligt.

4327.

Vid start finns 10 insekter.

Maxantal = 600

Max tillväxthastighet = 36 insekter/dygn

då antalet insekter vuxit till 300.

4328 Antalet individer y i en population beskrivs av

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 1{,}2y\left(1 - \dfrac{y}{5000}\right) \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

där t är tiden i år.

a) Vilket värde närmar sig y för stora t?

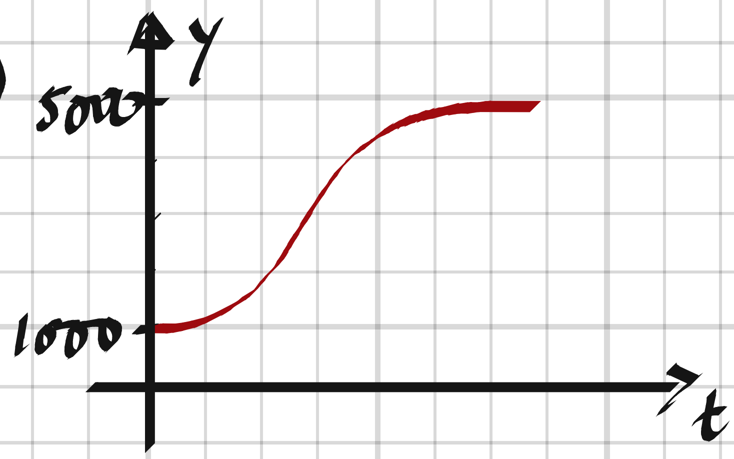
b) För vilka y-värden är populationen avtagande?

c) Skissa grafen till funktionen $y = y(t)$.

4328. a) $y = 5000$

b) $y > 5000$

c)



4329 Visa först att $y = \dfrac{1000}{1+9e^{-0{,}08t}}$ är en lösning till $y' = 0{,}08y(1-0{,}001y)$. Beräkna sedan det värde på t för vilket derivatan y' är maximal.

4329.

$$y = \frac{1000}{1+9e^{-0{,}08t}}$$

$$y' = \frac{-1000\cdot(-0{,}72)e^{-0{,}08t}}{(1+9e^{-0{,}08t})^2} = \frac{720e^{-0{,}08t}}{(1+9e^{-0{,}08t})^2}$$

$$HL = \frac{80}{1+9e^{-0{,}08t}}\left(1-\frac{1}{1+9e^{-0{,}08t}}\right) =$$

$$= \frac{80}{1+9e^{-0{,}08t}}\cdot\frac{9e^{-0{,}08t}}{1+9e^{-0{,}08t}} = \frac{720e^{-0{,}08t}}{(1+9e^{-0{,}08t})^2} = VL \;\#$$

y' max då $y = \frac{M}{2} = 500 \Rightarrow$

$$\frac{1000}{1+9e^{-0{,}08t}} = 500 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln 1/9}{-0{,}08} = \underline{27{,}5 \text{ tidsenheter}}$$

4331 Differentialekvationen $y' = xy + 1$ är given.

a) Rita riktningsfältet i området $-2 \le x \le 2$ och $0 \le y \le 5$ och markera lösningskurvan genom punkten $(0, 2)$.

b) Bestäm ett närmevärde med tre gällande siffror till $y(0{,}5)$.

4331.

Geogebra:

$y'(x, y) = x\,y + 1$

RF = SlopeField(y', 20, 10, -2, 0, 2, 5)

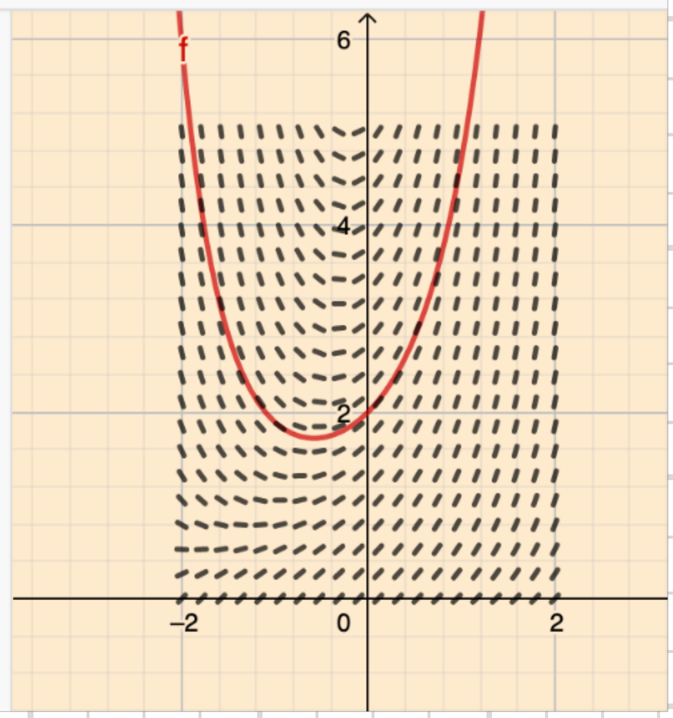
$f(x) = \text{SolveODE}(y', (0, 2))$

$\rightarrow \sqrt{\pi}\ \text{erf}\left(x\ \frac{\sqrt{e^{\ln(2)}}}{2}\right) e^{\frac{x^2-\ln(2)}{2}} + 2\ e^{\frac{x^2}{2}}$

$a = f(0.5)$

$\rightarrow 2.8101$

Input...



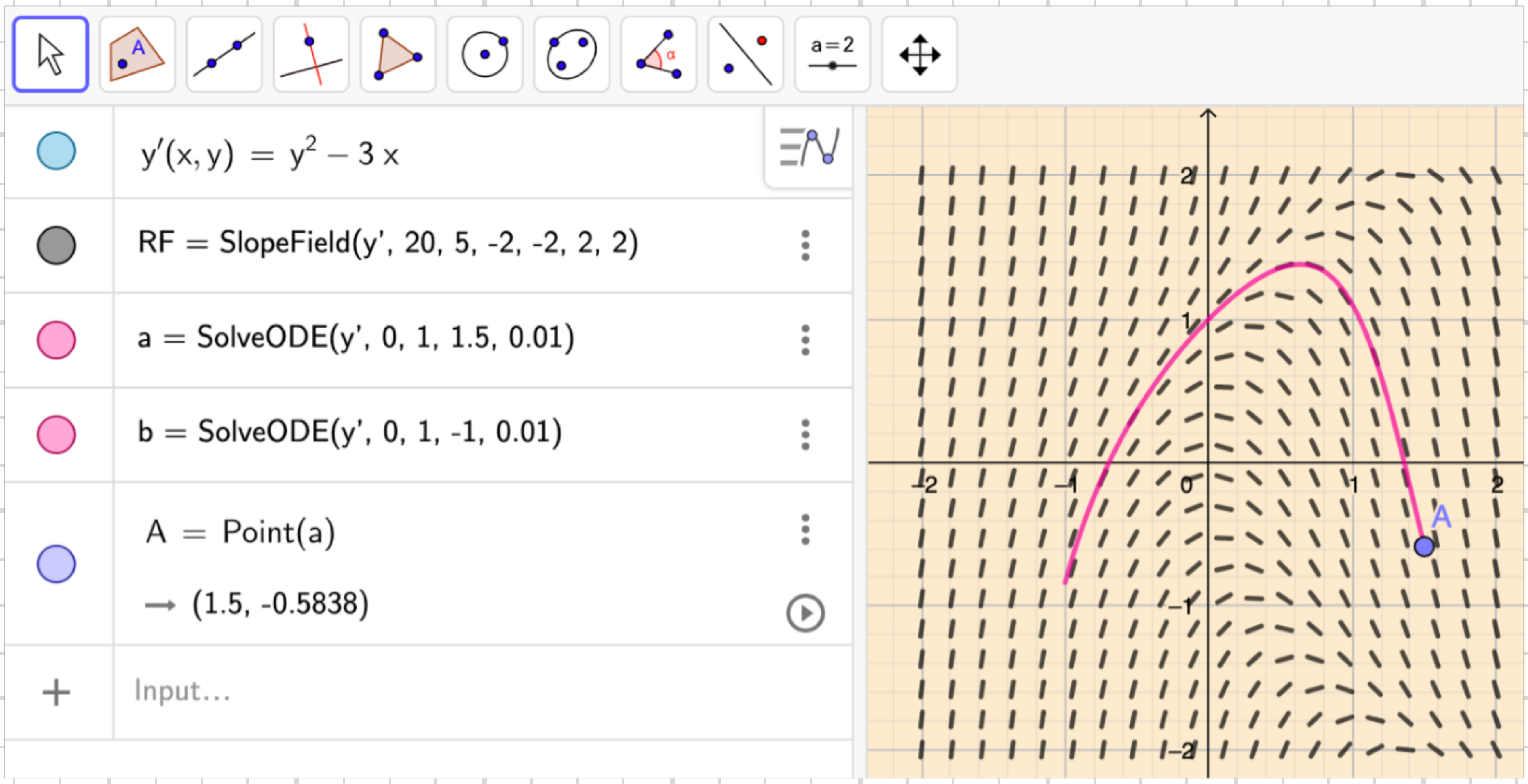
4332 Differentialekvationen $y' = y^2 - 3x$ är given.

a) Rita riktningsfältet i området $-2 \leq x \leq 2$ och $-2 \leq y \leq 2$ och markera lösningskurvan genom punkten $(0,1)$.

b) Bestäm ett närmevärde med tre gällande siffror till y då $x = 1,5$.

4332.

a+b) Lösning i Geogebra:



$y(1.5) \approx -0.6$

4333 En patient tillförs glukos (blodsocker) intravenöst genom s k dropp med en hastighet av 12 g/h. Glukosen omsätts (försvinner från blodet) med en hastighet som är proportionell mot den mängd glukos som finns i blodet och med proportionalitetskonstanten 3 h^{-1}. Om vi låter mängden glukos i blodet vara y g vid tiden t h efter tillförselns början, så kan förloppet beskrivas med modellen

$$\begin{cases} y' = 12 - 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Vad betyder villkoret $y(0) = 2$?

b) Förklara hur man kommit fram till differentialekvationen $y' = 12 - 3y$.

c) Bestäm glukosmängden efter 0,5 h.

4333. a) Från start finns 2g glykos i blodet.

b) Termen 12 är tillförd glykos per tidsenhet. Termen $-3y$ representerar utförsel (omsättning) av glykos per tidsenhet.

c) 3.6 g

Lösning i Geogebra:

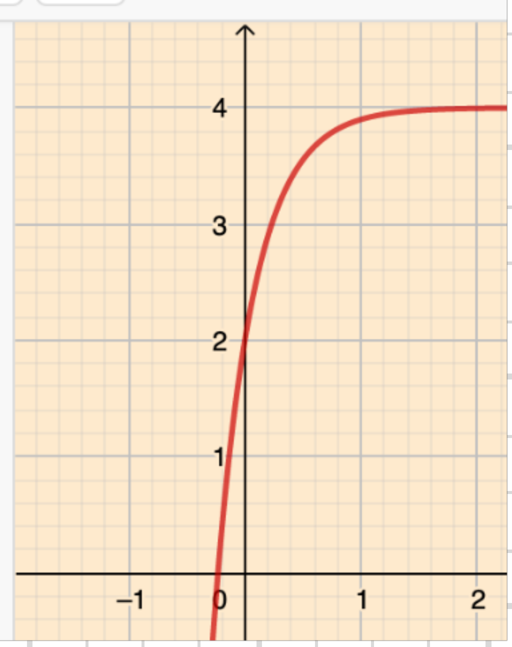
1 $f(x) := \text{SolveODE}(y' = 12 - 3y, (0, 2))$

$\rightarrow f(x) := -2e^{-3x} + 4$

2 $f(0.5)$

$\approx$ **3.5537**

3



4334 Följande begynnelsevärdesproblem är givet:

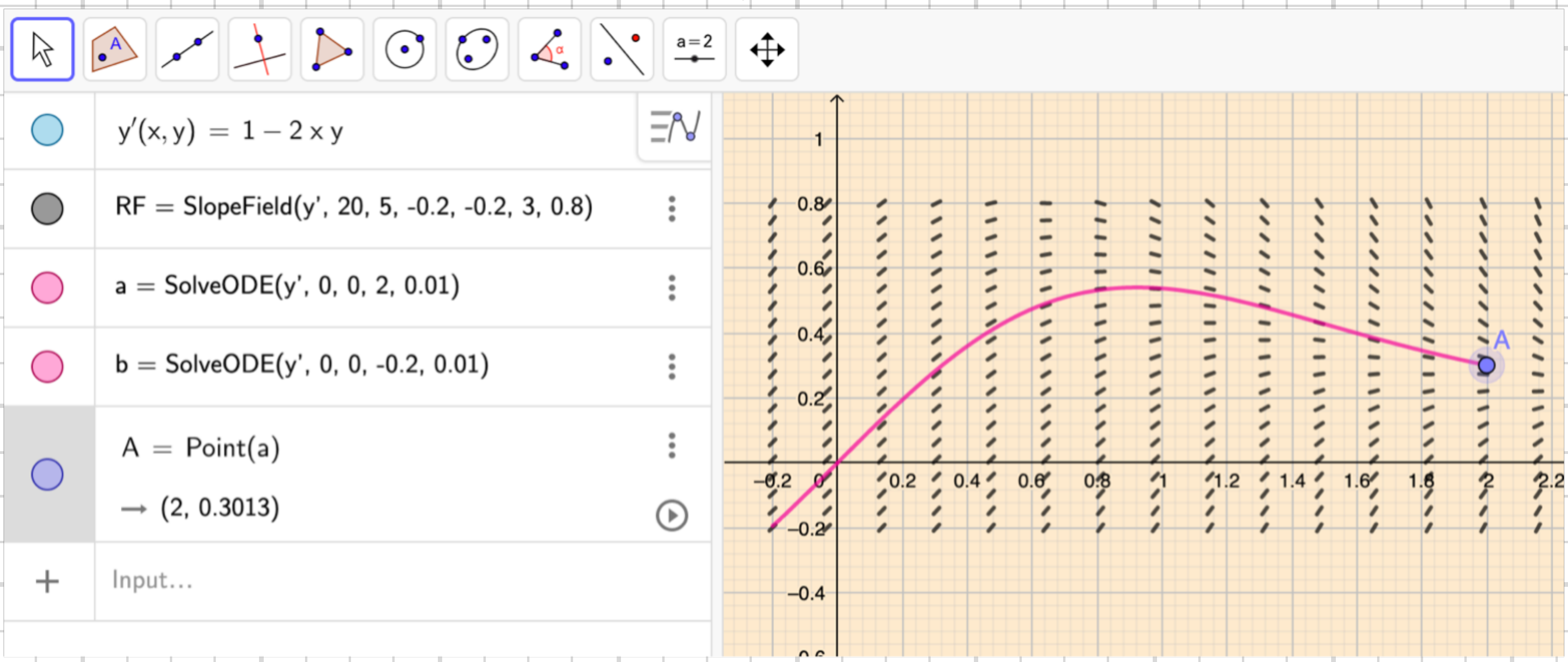
$$\begin{cases} y' = 1 - 2xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) Rita riktningsfältet i området $1 \leq x \leq 3$ och $-0{,}2 \leq y \leq 0{,}8$ och markera lösningskurvan genom origo.

b) Bestäm ett närmevärde med tre gällande siffror till $y(2)$.

4334.

a+b) Lösning i Geogebra:



$y(2) \approx 0{,}301$

4335 En från början helt frisk och giftfri fågel matas av en aningslös villaägare med fågelfrö som innehåller 1 µg gift per gram frö. Fågeln äter 10 g fågelfrö per dygn. Den utsöndrar giftet genom avföring och urin med en hastighet som är 25 % per dygn av kroppens giftmängd.

a) Ställ upp en differentialekvation som visar hur giftmängden m µg i fågelns kropp förändras med tiden t dygn. Ange också begynnelsevillkoret.

b) Vid vilket värde kommer giftmängden i fågelns kropp att stabiliseras, om fågeln fortsätter att äta det giftiga fröet under en längre tid?

c) Efter hur lång tid uppnås giftmängden 30 µg i fågelns kropp?

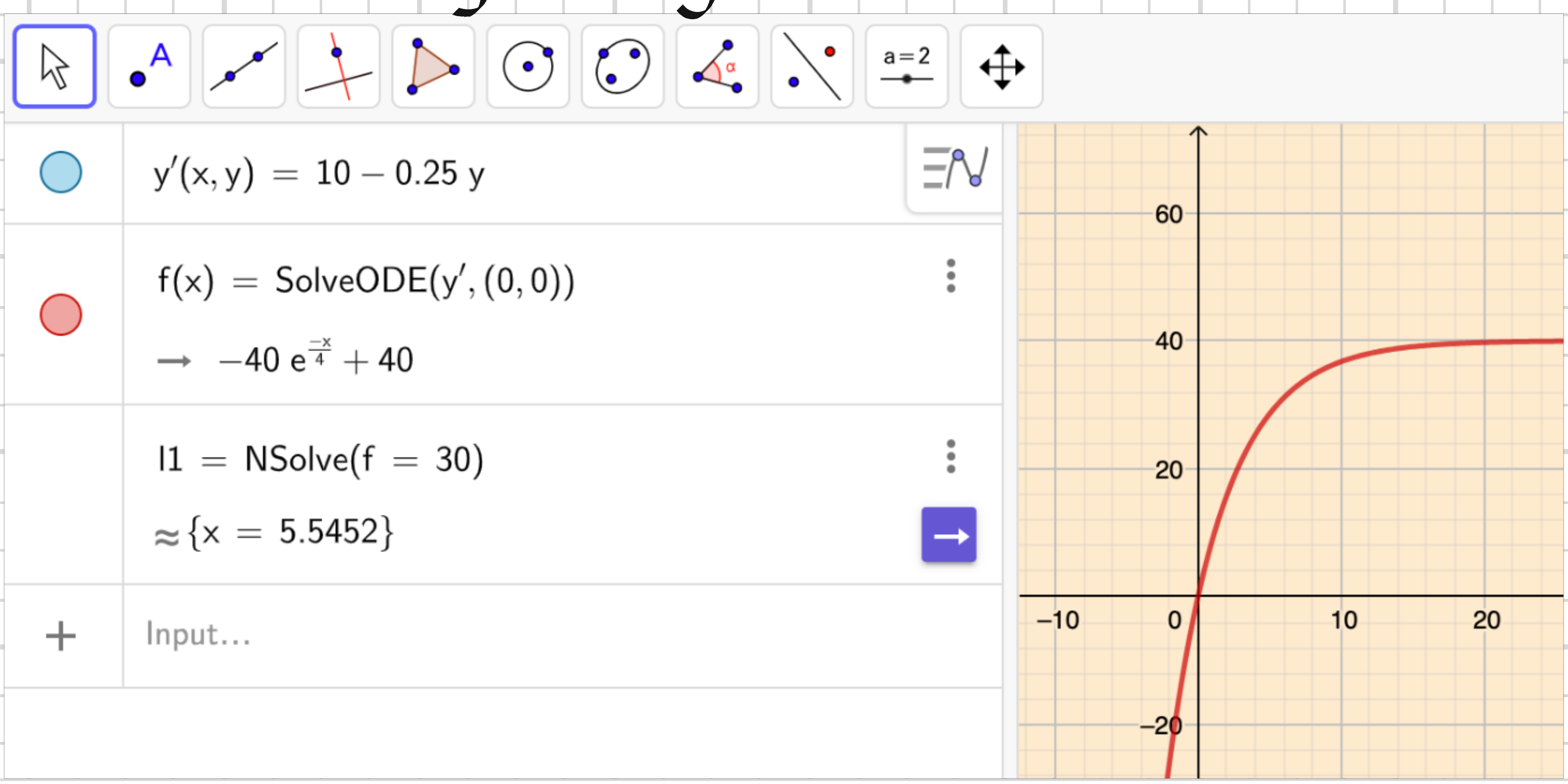
4335.

a) $\underline{m' = 10 - 0.25m \quad , \quad m(0) = 0}$

b) $m' = 0 \Rightarrow \underline{m = 40 \text{ µg}}$

c) Efter 5.5 dygn

Lösning i Geogebra:



4336 I ett kärl, som innehåller 10 l rent vatten häller man saft med hastigheten 2,0 l/min. Av den väl blandade lösningen bortförs 2,0 l/min.

a) Inför beteckningar och ställ upp en differentialekvation för denna situation.

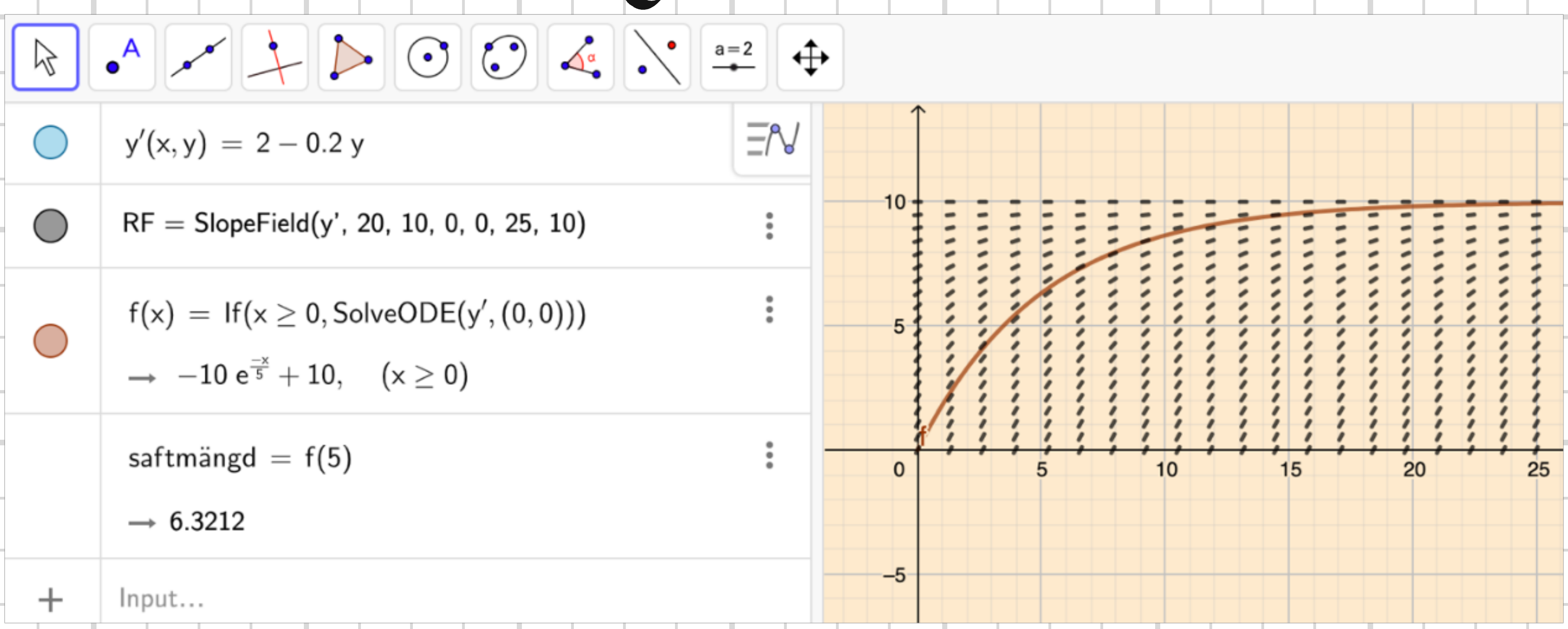
b) Rita ett riktningsfält i området $0 \le x \le 25$ och $0 \le y \le 10$ och lägg in den lösningskurva som svarar mot begynnelsevärdet.

c) Lös differentialekvationen exakt. Beräkna saftmängden efter 5,0 min dels med digitala verktyg och dels med den exakta lösningen.

4336. y = mängden saft [liter]

a) $\underline{y' = 2 - 0{,}2y \quad , \quad y(0) = 0}$

b) Lösning i Geogebra:



c) $y = Ce^{-0{,}2x} + a \quad , \quad y' = -0{,}2Ce^{-0{,}2x}$

$-0{,}2Ce^{-0{,}2x} = 2 - 0{,}2Ce^{-0{,}2x} - 0{,}2a \Rightarrow a = 10$

$y(0) = 0 \Rightarrow C + 10 = 0 \Rightarrow C = -10$

$y = 10 - 10e^{-0{,}2x} \Rightarrow$

$\underline{y(5) = 6{,}3 \text{ l}}$

4337 En kastrull med vatten värms upp till kokning. Omgivningens temperatur är 20 °C. Vid avsvalning gäller att vattnets temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot differensen av vattnets och omgivningens temperatur med proportionalitetskonstanten 0,020 min^{-1}.

a) Ställ upp en differentialekvation för detta förlopp.

b) Bestäm med digitala verktyg och/eller exakt lösningsmetod vattnets temperatur efter 10 minuter, om begynnelse temperaturen är 100 °C.

4337. a) $T' = -0.02(T-20)$, $T(0) = 100°C$

b) $T = Ce^{-0.02t} + a$, $T' = 0.02Ce^{-0.02t}$

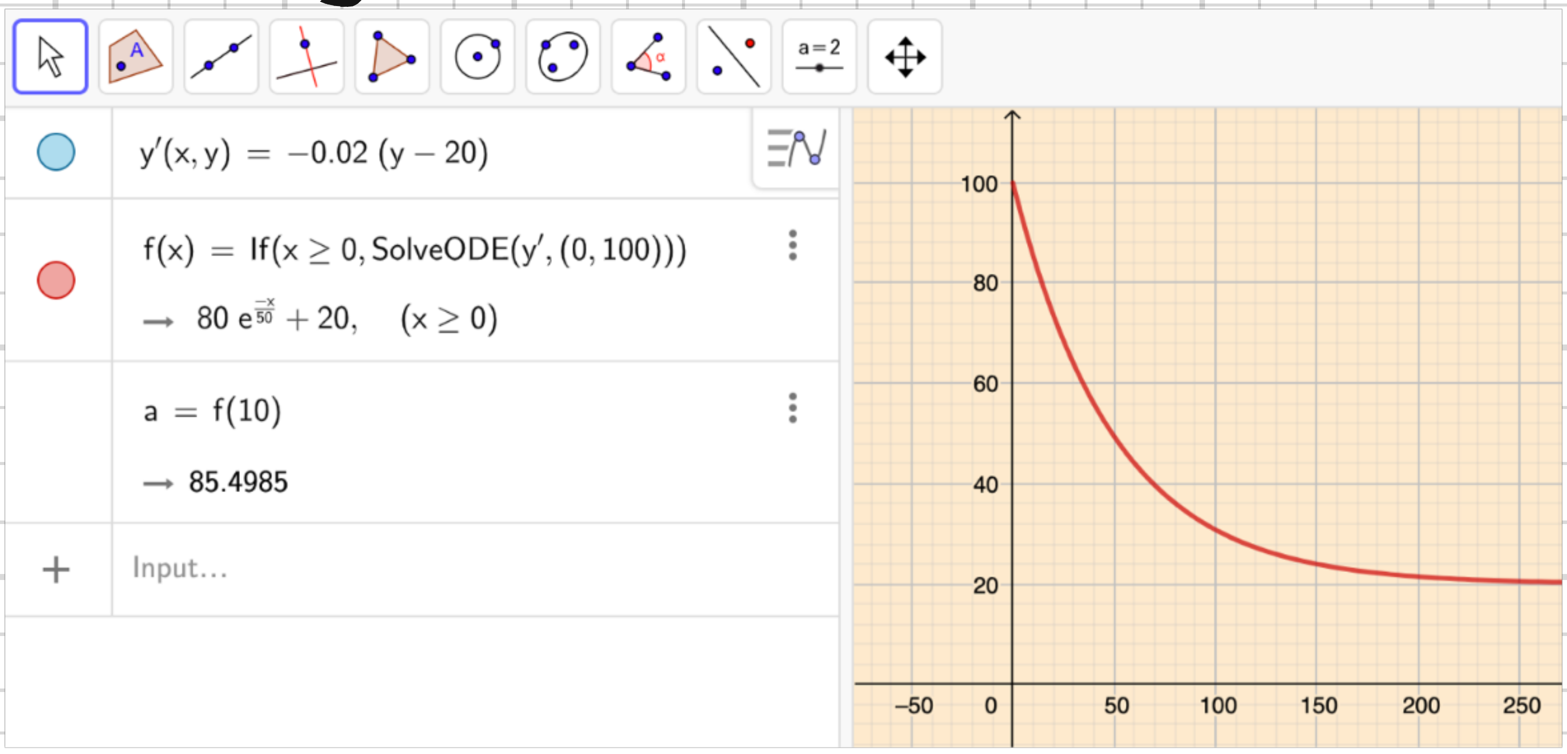
$0.02Ce^{-0.02t} = 0.02Ce^{-0.02t} + 0.02a - 20 \cdot 0.02 \Rightarrow a = 20$

$T(0) = 100 \Rightarrow C + 20 = 100 \Rightarrow C = 80$

$T = 80e^{-0.02t} + 20 \Rightarrow$

$T(10) = 85°C$

Lösning i Geogebra:



4338 Vid mitten av år 2013 uppgick världens folkmängd till 7,1 miljarder. Tillväxthastigheten var då 1,0 % per år. Antag att tillväxthastigheten under en tioårsperiod går ner från 1,0 % per år till 0,80 % per år.

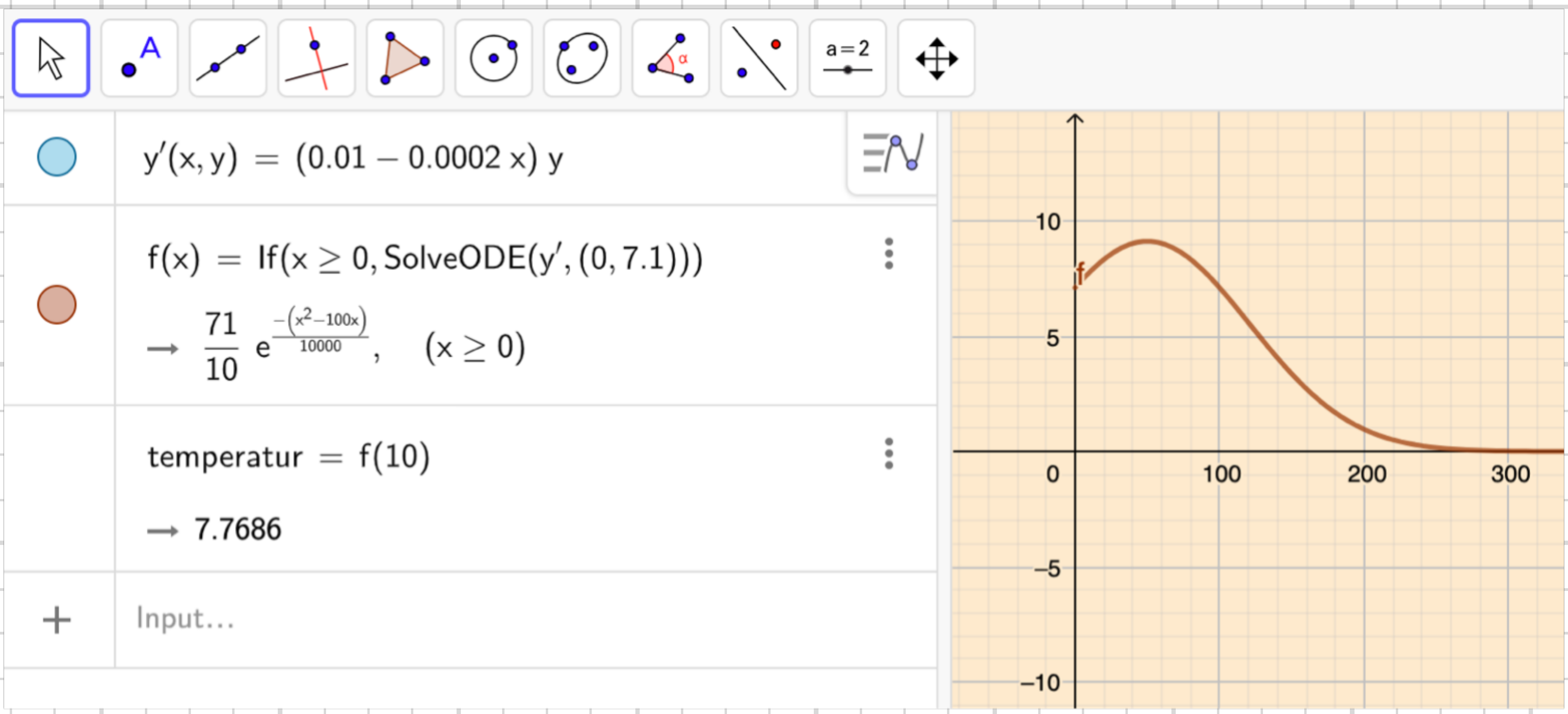
Beskriv denna situation med en differentialekvation och bestäm världens folkmängd vid mitten av 2023 enligt denna modell.

4338. $(0{,}01 - ax)\,y = 0{,}008\,y$

$$x = 10 \Rightarrow a = \frac{0{,}01 - 0{,}008}{10} = 0{,}0002$$

$$y' = (0.01 - 0.0002 \cdot x)\,y \quad , \quad y(0) = 7.1$$

Lösning i Geogebra ger $y(10) = 7.8$ miljarder



4339 Till en ögrupp i Söderhavet kommer en ny fågelart. Man vet att fåglarna huvudsakligen lever på bären från en sällsynt buske och uppskattar därför att ögruppen kan föda högst 10 000 fåglar.

En biolog vill beskriva fågelartens utbredning med hjälp av den logistiska tillväxtmodellen (populationen växer med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet och det kvarvarande utrymmet).

Ursprungligen var det en flock på 10 fåglar som kom till ögruppen. Den tillväxte då med en hastighet av 5 fåglar per år.

a) Hur många fåglar är det när tillväxthastigheten är maximal?

b) Vilken är den maximala tillväxthastigheten?

c) När är tillväxthastigheten maximal?

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{10000}\right)$$

$$y(0) = 10, \quad y'(0) = 5$$

$$k \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{10}{10000}\right) = 5 \Rightarrow k = 0{,}5$$

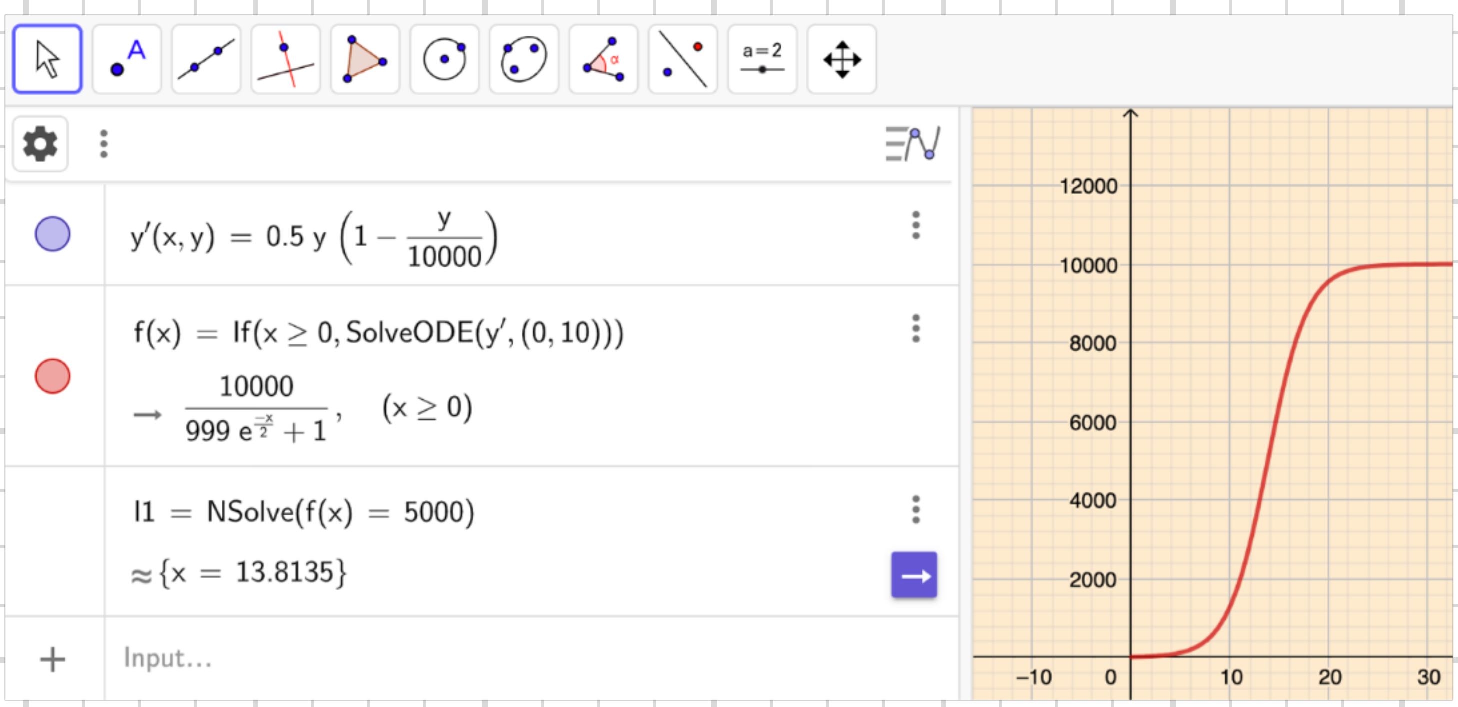
4339.

$$y' = 0.5y\left(1 - \frac{y}{10000}\right)$$

a) $10000/2 = \underline{5000 \text{ fåglar}}$

b) $y'_{max} = 0.5 \cdot 5000\left(1 - \frac{5000}{10000}\right) = \underline{1250 \text{ fåglar/år}}$

c) Lösning i Geogebra ger $\underline{t \approx 14 \text{ år}}$



4340 Ett föremål faller fritt utan begynnelsehastighet. Dess massa är 80,0 kg och luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten i kvadrat med proportionalitetskonstanten 0,160 kg/m. Låt hastigheten vara y m/s efter x s.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver rörelsen.

b) Beräkna hastigheten efter 3,00 s.

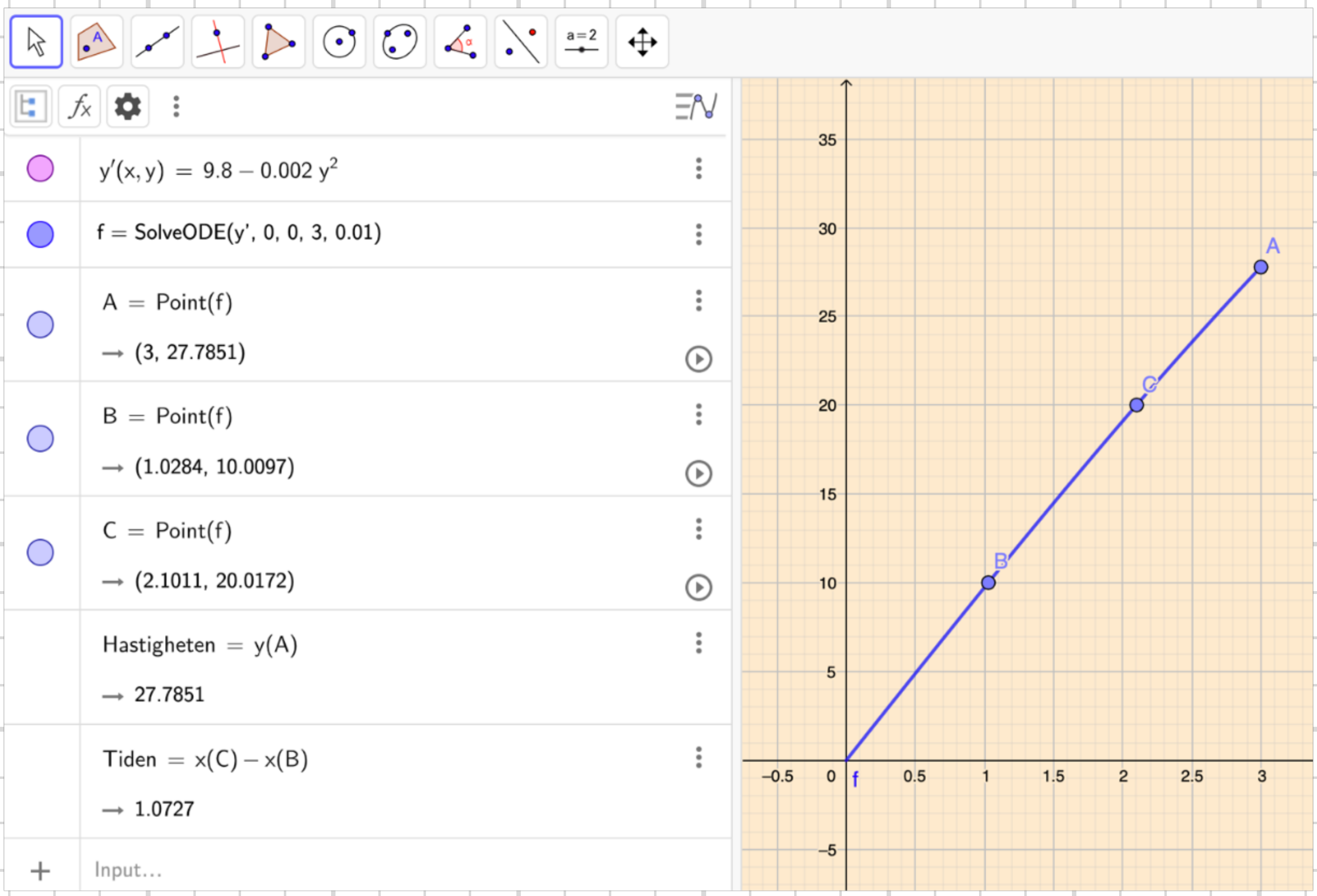
c) Hur lång tid tar det för hastigheten att öka från 10,0 m/s till 20,0 m/s?

4340. a) $my' = mg - ky^2$

$$\underline{y' = 9.8 - \frac{0.160}{80} y^2 \quad , \quad y(0) = 0}$$

b+c) Lösning i Geogebra ger $\underline{y'(3) = 27.8 \text{ m/s}}$

och $\underline{\Delta t = 1.07 \text{ s}}$.



4341 En tank innehåller 30 000 liter rent vatten. Vatten som innehåller 0,008 g/l av en förorening tillförs tanken med en hastighet av 600 l/min. Av det väl blandade förorenade vattnet bortförs 800 l/min.

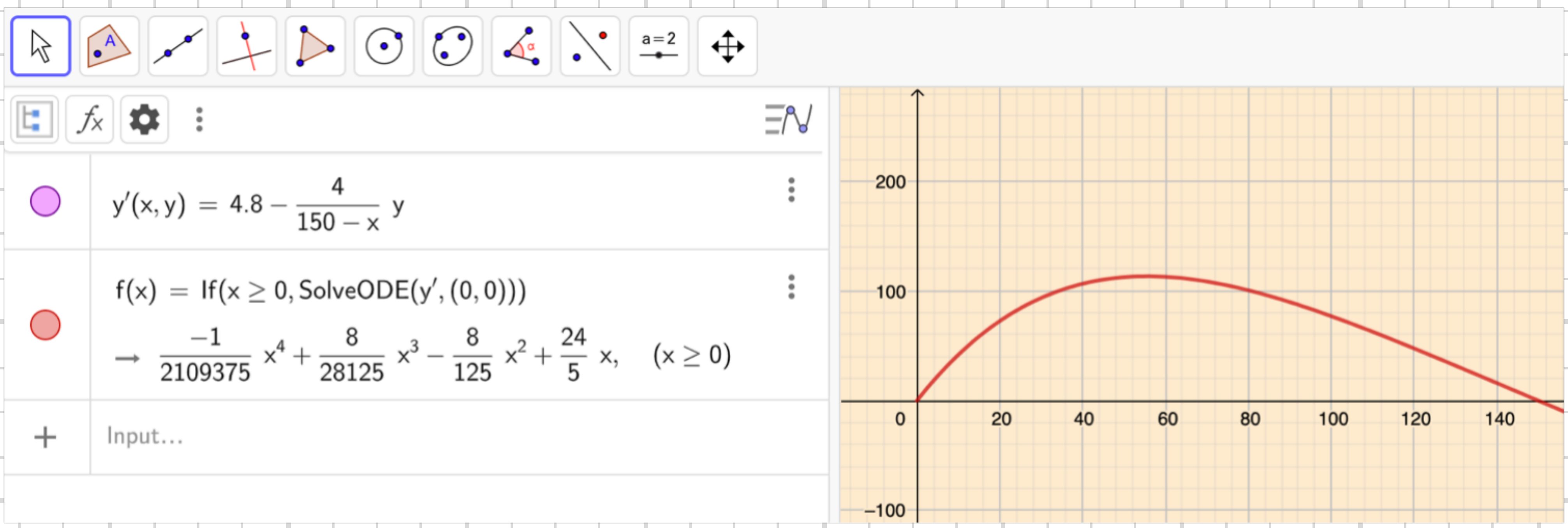
Visa grafiskt hur mängden av föroreningen i tanken varierar.

4341.

y = mängden förorening [g]

$$y' = 600 \cdot 0{,}008 - \frac{800}{30000-(800-600)x} \cdot y =$$

$$= 4.8 - \frac{4}{150-x} \cdot y$$



4402 Ange och lös den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen

$y'' - 2y' - 15y = 0$

4402.

$r^2 - 2r - 15 = 0$

$(r-5)(r+3) = 0$

$\underline{r_1 = 5,\ r_2 = -3}$

4403 Bestäm den allmänna lösningen till

a) $y'' - 6y' - 16y = 0$

b) $y'' - 4y = 0$

c) $y'' + 5y' = 0$

4403.

a) $r^2 - 6r - 16 = 0$

$(r-8)(r+2) = 0$

$r_1 = 8,\ r_2 = -2$

$\underline{y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-2x}}$

b) $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2$

$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}$

c) $r^2 + 5r = 0$

$r(r+5) = 0$

$r_1 = 0,\ r_2 = -5$

$\underline{y = C_1 + C_2 e^{-5x}}$

4404 Bestäm $y(x)$ som uppfyller ekvationen

$$y'' - 8y' + 15y = 0$$

om $y(0) = 2$ och $y'(0) = 8$

4404. $r^2 - 8r + 15 = 0$

$(r-5)(r-3) = 0$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x}$

$y' = 5C_1 e^{5x} + 3C_2 e^{3x}$

$y(0) = 2 \Rightarrow 5 \cdot \quad C_1 + C_2 = 2$

$y'(0) = 8 \Rightarrow - \quad 5C_1 + 3C_2 = 8$

$2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1, \ C_1 = 1$

$\underline{y(x) = e^{5x} + e^{3x}}$

4405 Bestäm den allmänna lösningen till

b $y'' - \pi y' - \pi^2 y = 0$

4405. $r^2 - \pi r - \pi^2 = 0$

$r = \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2 + 4\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\sqrt{5}\pi}{2}$; $r_1 = \frac{\pi(1+\sqrt{5})}{2}$, $r_2 = \frac{\pi(1-\sqrt{5})}{2}$

$\underline{y(x) = C_1 e^{\frac{\pi(1+\sqrt{5})}{2}x} + C_2 e^{\frac{\pi(1-\sqrt{5})}{2}x}}$

4406 Visa hur $y = e^{rx}$
med insättning av y'', y' och y i
$y'' + 3y' + y = 0$ ger den
karakteristiska ekvationen $r^2 + 3r + 1 = 0$

4406. $y = e^{rx}$; $y' = re^{rx}$; $y'' = r^2 e^{rx}$ $\Rightarrow$

$r^2 e^{rx} + 3r e^{rx} + e^{rx} = 0$

$e^{rx} \neq 0 \Rightarrow r^2 + 3r + 1 = 0$

4407 Bestäm $y(x)$ som uppfyller ekvationen
$y'' - 3y' = 0$
och villkoren $y'(0) = 0$ och $y(1) = 1$

4407. $r^2 - 3r = 0$

$r(r-3) = 0 \Rightarrow$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{3x}$

$y'(x) = 3C_2 e^{3x}$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y(1) = 1 \Rightarrow C_1 + 0 = 1$

$\underline{y(x) = 1}$

4408 Visa att om y_1 och y_2 är två lösningar till

$$y'' + ay' + by = 0$$

så är $y = A \cdot y_1 + B \cdot y_2$,
där A och B är godtyckliga konstanter,
också en lösning.

4408.

$$y_1 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$y_2 = C_3 e^{r_1 x} + C_4 e^{r_2 x}$$

$$y = Ay_1 + By_2 = AC_1 e^{r_1 x} + AC_2 e^{r_2 x} + BC_3 e^{r_1 x} + B \cdot C_4 e^{r_2 x} =$$

$$= (AC_1 + BC_2) e^{r_1 x} + (AC_2 + BC_4) e^{r_2 x} =$$

$$= C_5 e^{r_1 x} + C_6 e^{r_2 x} \quad \#$$

4410 Bestäm den allmänna lösningen till

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $y'' + 2y' + y = 0$

c) $y'' - 2y' + y = 0$

4410. a) $r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3)^2 = 0 \Rightarrow \underline{y = e^{3x}(C_1 x + C_2)}$

b) $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{y = e^{-x}(C_1 x + C_2)}$

c) $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{y = e^{x}(C_1 x + C_2)}$

4411 Bestäm lösningen till

b $y'' + y' + 0{,}25y = 0$

om $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$

4411. $r^2 + r + 0{,}25 = 0$

$$(r + 0{,}5)^2 = 0$$

$$y = e^{-0{,}5x}(C_1 x + C_2)$$

$$y' = C_1\left(e^{-0{,}5x} - 0{,}5x e^{-0{,}5x}\right) - 0{,}5\,C_2 e^{-0{,}5x}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$$

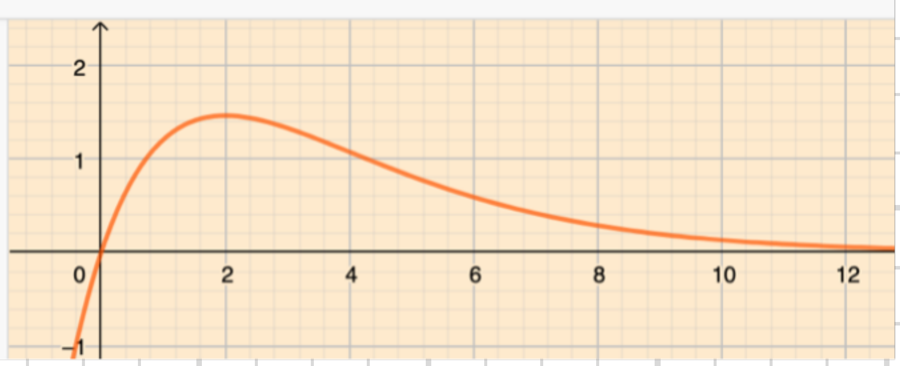
$$\underline{y(x) = 2x e^{-0{,}5x}}$$

Lösning i Geogebra:

1 $f(x) := \text{solveode}(y'' + y' + 0.25y = 0, (0,0), (0,2))$

$\rightarrow$ $f(x) := 2\,x\,e^{\frac{-1}{2}x}$

2



4413 Bestäm den allmänna lösningen till

a) $y'' - 6y' + 14y = 0$

b) $y'' + 2y' + 10y = 0$

c) $y'' + 6y' + 13y = 0$

4413. a) $r^2 - 6r + 14 = 0$

$r = 3 \pm \sqrt{5}\, i$

$\underline{y = e^{3x}(C_1 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x)}$

b) $r^2 + 2r + 10 = 0$

$r = 1 \pm 3i \quad \Rightarrow$

$\underline{y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)}$

c) $r^2 + 6r + 13 = 0$

$r = 3 \pm 2i$

$\underline{y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)}$

4414 Bestäm lösningen till

$y'' - 2y' + 17y = 0$

om $y(0) = 5$ och $y'(\pi) = 9e^{\pi}$

4414. $r^2 - 2r + 17 = 0$

$r = 1 \pm 4i$

$y = e^x(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$

$y' = e^x(c_1 \cos 4x - 4c_1 \sin 4x + c_2 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x)$

$y(0) = 5 \Rightarrow c_1 = 5$

$y'(\pi) = 9e^{\pi} \Rightarrow$

$e^{\pi}(5 \cos 4\pi - 20 \sin 4\pi + c_2 \sin 4\pi + 4c_2 \cos 4\pi) = 9e^{\pi} \Rightarrow$

$5 - 0 + 0 + 4c_2 = 9 \Rightarrow c_2 = 1$

$y = e^x(5 \cos 4x + \sin 4x)$

4415 En differential ekvation är av typen

$y'' + ay' + by = 0$

Ge den allmänna lösningen om den karakteristiska ekvationen har lösningen

a) $r_1 = r_2 = 2$

b) $r_1 = 1$ och $r_2 = 0$

c) $r = 1 \pm 2i$

4415.

a) $y = e^{2x}(C_1 x + C_2)$

b) $y = C_1 e^{x} + C_2$

c) $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

4416 Lös differentialekvationerna

a) $z''(t) + 4z'(t) - 5z(t) = 0$

b) $f''(v) - 8f'(v) + 25f(v) = 0$

c) $q''(x) - 6q'(x) + 9q(x) = 0$

d) $f''(p) + f'(p) - 12f(p) = 0$

4416.

a) $r^2 + 4r - 5 = 0$

$(r-1)(r+5) = 0$

$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t}$

b) $r^2 - 8r + 25 = 0$

$r = 4 \pm 3i$

$y = e^{4v}(C_1 \cos 3v + C_2 \sin 3v)$

c) $r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3)^2 = 0$

$y = e^{3x}(C_1 x + C_2)$

d) $r^2 + r - 12 = 0$

$(r-3)(r+4) = 0$

$y = C_1 e^{3p} + C_2 e^{-4p}$

4417 Bestäm den lösning som uppfyller de givna begynnelsevillkoren

a) $y'' - y = 0$
$y(0) = 2$ och $y'(0) = -3$

b) $y'' + 5y' + 6y = 0$
$y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$

c) $y'' - 4y' + 3y = 0$
$y(0) = 1$ och $y'(0) = -1$

4417.

a) $r^2 - 1 = 0$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$

$y(0) = 2 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 2$

$y'(0) = -3 \Rightarrow \; - \; c_1 - c_2 = -3$

$2c_2 = 5 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{2}$

$c_1 = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{5}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} e^{x}$

b) $r^2 + 5r + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

$y' = -2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 2\cdot \quad c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = 2 \Rightarrow + \; -2c_1 - 3c_2 = 2$

$c_2 = -4, \; c_1 = 5$

$y = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}$

c) $r^2 - 4r + 3 = 0$

$(r-1)(r-3) = 0$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$

$y' = c_1 e^{x} + 3c_2 e^{3x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = -1 \Rightarrow \; - \; c_1 + 3c_2 = -1$

$-2c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -1, \; c_1 = 2$

$y = 2e^{x} - 3e^{3x}$

4418 Bestäm den lösning som uppfyller de givna begynnelsevillkoren

a) $y'' + 9y = 0$
$y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$

b) $y'' + 4y = 0$
$y(0) = 2$ och $y'(0) = 8$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$
$y(0) = 2$ och $y'(0) = 1$

4418.

a) $r^2 + 9 = 0$

$r = \pm 3i$

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$y' = -3\sin 3x + 3C_2 \cos 3x$

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\underline{y = \cos 3x}$

b) $r^2 + 4 = 0$

$r = \pm 2i$

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$y(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$

$y'(0) = 8 \Rightarrow C_2 = 4$

$\underline{y = 2\cos 2x + 4\sin 2x}$

c) $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$

$y = e^t(C_1 t + C_2)$

$y' = e^t(C_1 t + C_1 + C_2)$

$y(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

$y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 + 2 = 1 \Rightarrow C_1 = -1$

$\underline{y = e^t(2 - t)}$

4419 Ange den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = 0$ som uppfyller

a) begynnelsevillkoren $y(\pi/4) = 1$ och $y'(\pi/4) = 3$

b) randvillkoren $y(0) = 1$ och $y(\pi/4) = 0$.

4419. $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

a) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}$

$\underline{y = \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x}$

b) $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\underline{y = \cos 2x}$

4421 Hur många villkor behövs för att bestämma de okända konstanterna i den allmänna lösningen till en differentialekvation av typen

$y'' + ay' + by = 0$?

Spelar det någon roll vilka rötter (lika/olika, reella/komplexa) den karakteristiska ekvationen har?

4421.

Det behövs alltid 2 villkor för en diffekvation av andra ordningen.

4422 Lös differentialekvationerna

a) $10\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - y = 0$

b) $4\frac{d^2i}{dt^2} + 12\frac{di}{dt} + 25i = 0$

c) $\frac{1}{7}\frac{d^2s}{dt^2} + 7s = 2\frac{ds}{dt}$

4422.

a) $10(r^2 - 0.3r - 0.1) = 0$

$r = 0.15 \pm 0.35$

$10(r+0.2)(r-0.5) = 0$

$\underline{y = C_1e^{-0.2x} + C_2e^{0.5x}}$

b) $4(r^2 + 3r + 6.25) = 0$

$r = -1.5 \pm 2i$

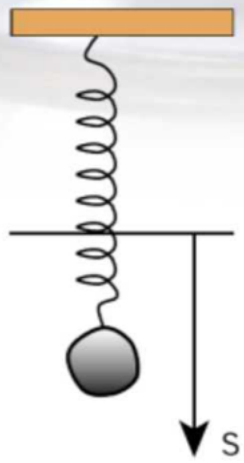
$\underline{i = e^{-1.5t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)}$

c) $\frac{1}{7}(r^2 - 14r + 49) = 0$

$(r-7)^2 = 0$

$\underline{s = e^{7t}(C_1t + C_2)}$

4423 En kropp med massan m rör sig kring ett jämviktsläge. Den påverkas dels av en återförande kraft proportionell mot avståndet till jämviktsläget, dels av en friktionskraft (dämpande kraft) proportionell mot hastigheten.



Med kraftekvationens hjälp kan man då ställa upp ekvationen

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks - b\frac{ds}{dt}$$

Sätt $m = 0{,}10$ kg och $k = 2{,}6$ N/m. Bestäm sedan den lösning som uppfyller villkoren $s(0) = 0{,}030$ m och $s'(0) = 0$ m/s om $b = 0$ Ns/m (dämpningen försummas).

4423. $m\left(r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m}\right) = 0$

$b = 0 \Rightarrow \quad 0{,}10(r^2 + 26) = 0$

$r = \pm\sqrt{26}\,i$

$s = C_1\cos\sqrt{26}t + C_2\sin\sqrt{26}t$

$s' = -\sqrt{26}C_1\sin\sqrt{26}t + \sqrt{26}C_2\cos\sqrt{26}t$

$s(0) = 0{,}030 \Rightarrow C_1 = 0{,}030$

$s'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\underline{s = 0{,}030\cos\sqrt{26}t \quad m}$

4424 Undersök om det finns en lösning till $y'' - 3y' + 2y = 0$ som för $x = 0$ antar maximivärdet $y = 1$.

4424.

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-1)(r-2) = 0$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

$y' = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x}$

$y'(0) = 0 \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 0$

$y(0) = 1 \Rightarrow \quad - \; C_1 + C_2 = 1$

$C_2 = -1 \;, \; C_1 = 2$

$\underline{y = 2e^{x} - e^{2x}}$

4425 Ange en differentialekvation av typen $y'' + ay' + by = 0$ som har lösningarna

a) e^{2x} och e^{-x}

b) e^{3x} och xe^{3x}

c) $e^{x}\cos 5x$ och $e^{x}\sin 5x$

d) $\cos 3x$ och $\sin 3x$

4425.

a) $r_1 = 2,\ r_2 = -1$

$$(r-2)(r+1) = r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow \underline{y'' - y' - 2y = 0}$$

b) $r_{1,2} = 3$

$$(r-3)^2 = r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow \underline{y'' - 6y' + 9y = 0}$$

c) $r = 1 \pm 5i$

$$(r-1-5i)(r-1+5i) =$$

$$= r^2 - r + \cancel{5ri} - r + 1 - \cancel{5i} - \cancel{5ri} + \cancel{5i} + 25 \Rightarrow \underline{y'' - 2y' + 26y = 0}$$

d) $r = \pm 3i$

$$(r-3i)(r+3i) = r^2 + 9 \Rightarrow \underline{y'' + 9y = 0}$$

4426 Differentialekvationen $y'' + 4y = 0$ har en lösning $y(x)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 8$.
Bestäm det största värde som $y(x)$ kan anta.

4426.

$r^2 + 4 = 0$

$r = \pm 2i$

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$y(0) = 3 \Rightarrow C_1 = 3$

$y'(0) = 8 \Rightarrow C_2 = 4$

$y = 3\cos 2x + 4\sin 2x = \sqrt{3^2+4^2} \cdot \sin(2x+\varphi) = 5\sin(2x+\varphi)$

$\Rightarrow$ Största värdet $= 5$

4427 Bland lösningskurvorna till

$y'' + 2y' + 5y = 0$

finns det en som går genom punkten (0, 3) och som i denna punkt har tangenten $y = x + 3$.

Bestäm kurvans ekvation.

4427. Tangenten $y = x + 3$, $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 1$

$r^2 + 2r + 5 = 0$

$r = -1 \pm 2i$

$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

$y' = e^{-x}(-C_1 \cos 2x - 2C_1 \sin 2x - C_2 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)$

$y(0) = 3 \Rightarrow C_1 = 3$

$y'(0) = 1 \Rightarrow -3 + 2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 2$

$y(x) = e^{-x}(3 \cos 2x + 2 \sin 2x)$

4428 Kan en andragradsekvation
$r^2 + ar + b = 0$ ha en komplex dubbelrot,
dvs att $r_1 = r_2 = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$?

4428. Nej, komplexa rötter förekommer alltid parvis där den ena roten är den andres konjugat.

4430 Vilken typ av partikulärlösning bör du pröva med till differentialekvationen
$y'' + 2y' - 8y = f(x)$ då $f(x)$ är
a) 8
b) $4x - 3$
c) $5x^2$
d) $3 \sin 5x$?

4430. a) $\underline{a \text{ (en konstant)}}$

b) $\underline{ax + b}$

c) $\underline{ax^2 + bx + c}$

d) $\underline{a \sin 5x + b \cos 5x}$

4431 Differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 4x$ är given.

a) Vilken typ av partikulärlösning bör du pröva med?

b) Finn en partikulärlösning.

c) Vilken är motsvarande homogena ekvation?

d) Finn den allmänna lösningen till den homogena ekvationen.

e) Vilken är den allmänna lösningen till den givna ekvationen?

4431. a) $\underline{y_p = ax + b}$

b) $y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$0 + a - 2ax - 2b = 4x \Rightarrow$

$-2a = 4 \Rightarrow a = -2$

$a - 2b = 0 \Rightarrow b = -1$

$\underline{y_p = -2x - 1}$

c) $\underline{y'' + y' - 2y = 0}$

d) $r^2 + r - 2 = 0$

$(r-1)(r+2) = 0$

$\underline{y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}}$

e) $y = y_h + y_p$

$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - 2x - 1}$

4432 Bestäm talen a och b så att $y = a\sin x + b\cos x$ blir en partikulärlösning till ekvationen
$y'' + 4y' + 3y = \sin x$

4432.

$$y = a\sin x + b\cos x$$
$$y' = a\cos x - b\sin x$$
$$y'' = -a\sin x - b\cos x$$

$$-a\sin x - b\cos x + 4a\cos x - 4b\sin x + 3a\sin x + 3b\cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad 2a - 4b = 1$$
$$+2\cdot \quad 4a + 2b = 0$$

$$10a = 1, \quad \underline{a = \frac{1}{10}, \quad b = -\frac{2}{10}}$$

4433 Bestäm en partikulärlösning till ekvationen

a) $y'' + y = 4x$

b) $y'' + 4y = 2x^2$

4433. a) $y_p = ax + b, \quad y_p' = a, \quad y_p'' = 0$

$$ax + b = 4x \Rightarrow a = 4, \; b = 0 \Rightarrow \underline{y_p = 4x}$$

b) $y_p = ax^2 + bx + c, \quad y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a$

$$2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = 2x^2 \Rightarrow$$
$$b = 0, \quad a = \frac{1}{2}, \quad 2a + 4c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

$$\underline{y_p = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$$

4434 Bestäm talet k så att den föreslagna funktionen blir en partikulärlösning. Ange sedan den allmänna lösningen

a) $\frac{y'' - 5y'}{4} = 2 - y \quad (y = k)$

b) $1 = \frac{y'' - 2y'}{4} \quad (y = kx)$

4434.

a) $y'' - 5y' + 4y - 8 = 0$

$y = k \ ; \ y' = 0 \ ; \ y'' = 0 \Rightarrow 4k - 8 = 0 \Rightarrow k = 2$

$r^2 - 5r + 4 = 0$

$(r-1)(r-4) = 0$

$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + 2}$

b) $y'' - 2y' - 4 = 0$

$y = kx \ ; \ y' = k \ ; \ y'' = 0 \Rightarrow -2k - 4 = 0 \Rightarrow k = -2$

$r^2 - 2r = 0$

$r(r-2) = 0$

$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 - 2x}$

4435 Differentialekvationen

$y'' + 4y' + 3y = 1 - x^2$ är given.

a) Vilken partikulärlösning bör du pröva med?

b) Bestäm en partikulärlösning.

4435. a) $y_p = ax^2 + bx + c$

b) $y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$2a + 8ax + 4b + 3ax^2 + 3bx + 3c = 1 - x^2$

$$\begin{cases} 8a + 3b = 0 \\ 2a + 4b + 3c = 1 \\ 3a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{8}{3} + 3b = 0 \\ -\frac{2}{3} + 4b + 3c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{8}{9}$$

$$c = \frac{1 - \frac{32}{9} + \frac{2}{3}}{3} = \frac{9 - 32 + 6}{27} = \frac{17}{27}$$

$$y_p = \frac{-9x^2 + 24x - 17}{27}$$

4436 Kan vi bestämma talet a så att $y = ax \cdot \cos x$ blir en partikulärlösning till ekvationen $y'' + y = \sin x$?

4436.

$$y_p = ax\cos x$$

$$y_p' = a\cos x - ax\sin x$$

$$y_p'' = -a\sin x - a\sin x - ax\cos x = -2a\sin x - ax\cos x$$

$$-2a\sin x - ax\cos x + ax\cos x = \sin x$$

$$-2a\sin x = \sin x \Rightarrow \text{Ja, } a = -\frac{1}{2}$$

4437 Bestäm den lösning till differentialekvationen

$y'' + y' + y = 1$

som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = -1$

4437. $y_p = a \,;\; y_p' = 0,\; y_p'' = 0 \Rightarrow a = 1$

$r^2 + r + 1 = 0$

$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 1$

$y' = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + 1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0$

$y'(0) = -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

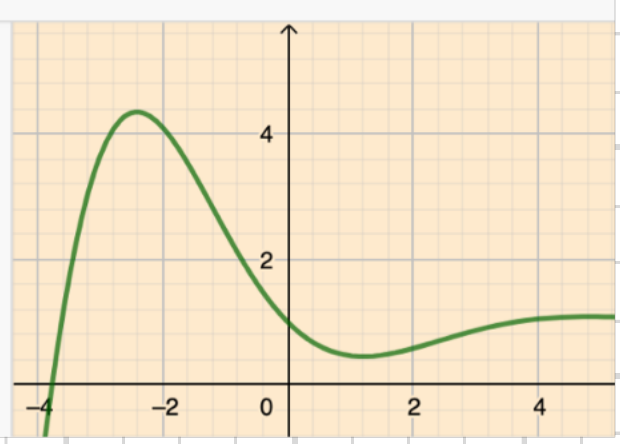
$$\underline{y = 1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

Lösning i Geogebra:

1 f(x) := SolveODE(y'' + y' + y = 1, (0, 1), (0, −1))

→ $f(x) := \frac{-2}{3}\sqrt{3}\, e^{\frac{-1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\, x\right) + 1$

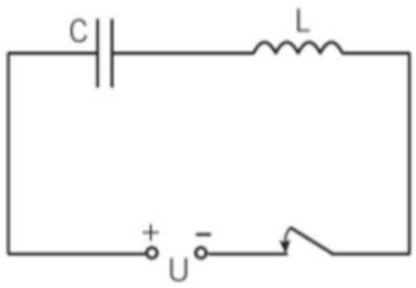
2



4438 En krets består av en kondensator med kapacitansen $C = 50\ \mu F$ och en spole med induktansen $L = 2{,}0\ H$. Polspänningen U är konstant 220 V.

Om resistansen i kretsen försummas, varierar kondensatorns laddning q med tiden t enligt differentialekvationen

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = U$$



a) Ange en partikulärlösning q_p till denna ekvation då L, C och U har de givna värdena.

b) Ange den lösning som svarar mot att såväl q som $i = \frac{dq}{dt}$ är noll då kretsen sluts.

4438. $q_p = a$; $q_p' = 0$; $q_p'' = 0 \Rightarrow \frac{a}{C} = U \Rightarrow a = CU$

a) $q_p = CU$

b) $L\left(r^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} i$

$$q = C_1 \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t + C_2 \sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t + CU$$

$$q' = -\frac{C_1}{\sqrt{LC}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{C_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

$q(0) = 0 \Rightarrow C_1 + CU = 0 \Rightarrow C_1 = -CU$

$q'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$\underline{q = CU\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) = 0.011(1 - \cos 100t)}$$

4440 Ange den allmänna lösningen till

a) $e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + 1$ c) $x\frac{dy}{dx} = (x^2 + x)y$

b) $y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2$ d) $x^2y' + y = 0$

4440. a) $e^y dy = (2x+1)dx$

$$\int e^y dy = \int (2x+1)dx$$

$$e^y = x^2 + x + C$$

$$\underline{y = \ln(x^2 + x + C)}$$

b) $y^2 dy = 3x^2 dx$

$$\int y^2 dy = \int 3x^2 dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x^3 + C_1$$

$$\underline{y = (3x^3 + C)^{1/3}} \quad , (C = 3C_1)$$

c) $\frac{1}{y} dy = (x+1)dx$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (x+1)dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$\underline{y = e^{x^2/2 + x + C_1} = Ce^{x^2/2 + x}} \quad , (C = e^{C_1})$$

d) $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x^2}dx$

$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x^2}dx$

$\ln y = \frac{1}{x} + C_1$

$\underline{y = e^{1/x + C_1} = Ce^{1/x}}$, $(C = e^{C_1})$

4441 Är följande differentialekvationer separabla? Motivera ditt svar.

a) $y' = x^2 \cdot y^2$ b) $y' = x^2 + y^2$

4441. a) $\frac{dy}{dx} = x^2y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2}dy = x^2dx$ – Ja.

b) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ – Nej, kan ej skrivas $g(y) \cdot y' = f(x)$

4442 Lös differentialekvationen och bestäm den partikulärlösning som uppfyller det givna begynnelsevillkoret

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^4}$ $\quad y(0) = 2$

b) $\frac{dy}{dx} = -y^2(4x^3 + 1)$ $\quad y(0) = 1/2$

c) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ $\quad y(0) = 5$

d) $\frac{du}{dt} = \frac{4t+1}{3u^2}$ $\quad u(0) = -1$

4442.

a) $y^4 dy = x\,dx$

$\frac{y^5}{5} = \frac{x^2}{2} + C_1$

$y = \left(\frac{5x^2}{2} + C\right)^{1/5}$

$y(0) = 2 \Rightarrow C = 2^5$

$\underline{y = \left(\frac{5x^2}{2} + 2^5\right)^{1/5}}$

b) $-\frac{1}{y^2} dy = (4x^3+1)\,dx$

$\frac{1}{y} = x^4 + x + C$

$y = \frac{1}{x^4+x+C}$

$y(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$

$\underline{y = \frac{1}{x^4+x+2}}$

c) $e^y dy = e^x dx$

$e^y = e^x + C$

$y = \ln(e^x + C)$

$y(0) = 5 \Rightarrow C = e^5 - 1$

$\underline{y = \ln(e^x + e^5 - 1)}$

d) $3u^2 du = (4t+1)\,dt$

$u^3 = 2t^2 + t + C$

$u = (2t^2 + t + C)^{1/3}$

$u(0) = -1 \Rightarrow C = -1$

$\underline{u = (2t^2 + t - 1)^{1/3}}$

4443 Lös följande differentialekvationer

a) $xy \cdot y' = x + 1$ $y > 0$

b) $2y' = e^x/y$ $y < 0$

c) $4y'/\sin x = y^2$

d) $\tan x \dfrac{dy}{dx} = y^2 \sin x$

4443.

a) $y\,dy = (1 + \frac{1}{x})\,dx$

$\int y\,dy = \int (1 + \frac{1}{x})\,dx$

$\frac{y^2}{2} = x + \ln x + C_1$

$y = \overset{+}{(-)}\sqrt{2x + \ln x^2 + C}$ $(C = 2C_1)$

b) $2y\,dy = e^x\,dx$

$2\int y\,dy = \int e^x\,dx$

$y^2 = e^x + C$

$y = \overset{(+)}{-}\sqrt{e^x + C}$

c) $\frac{4}{y^2}dy = \sin x\,dx$

$4\int \frac{1}{y^2}dy = \int \sin x\,dx$

$-4\frac{1}{y} = -\cos x - C$

$y = \dfrac{4}{\cos x + C}$

d) $\frac{1}{y^2}dx = \cos x\,dx$

$\int \frac{1}{y^2}dx = \int \cos x\,dx$

$-\frac{1}{y} = \sin x + C$

$y = -\dfrac{1}{\sin x + C}$

4444 Om en liten bil, som kör med hastigheten v m/s frikopplas och man endast tar hänsyn till luftmotståndet gäller för accelerationen dv/dt m/s^2 att

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad \text{där } k \text{ är en positiv konstant.}$$

Vid frikopplingen är bilens hastighet 25 m/s. Hur stor är den 20 s senare om $k = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$?

4444. $\frac{1}{v^2} dv = -k\,dt$

$$\int \frac{1}{v^2} dv = -\int k\,dt$$

$$-\frac{1}{v} = -kt - c$$

$$v = \frac{1}{kt + c}$$

$v(0) = 25 \Rightarrow c = 1/25$

$$v(t) = \frac{1}{1{,}1 \cdot 10^{-3} t + 0{,}04} \Rightarrow$$

$v(20) \approx 16$ m/s

4445 Lös differentialekvationen $y' + ay = b$ genom att

a) bilda en summa av en partikulärlösning och en lösning till motsvarande homogena ekvation

b) separera variablerna.

4445. a) $y_p = k \; ; \; y_p' = 0$

$0 + ak = b \Rightarrow k = \frac{b}{a}$

$$\underline{y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}}$$

b) $\frac{dy}{dx} = b - ay = -a\left(y - \frac{b}{a}\right)$

$\int \frac{1}{y - \frac{b}{a}}\,dy = -\int a\,dx$

$\ln\left(y - \frac{b}{a}\right) = -ax + c_1$

$y - \frac{b}{a} = Ce^{-ax} \quad , \; (C = e^{c_1})$

$$\underline{y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}}$$

4446 Vattennivån h cm i en läckande vattentunna sjunker med en hastighet som beskrivs av differentialekvationen

$\frac{dh}{dt} = -0{,}65\sqrt{h}$, där t h är tiden och $h(0) = 100$.

a) Hur ändras vattennivån då höjden är 64 cm?

b) Bestäm h som funktion av t.

c) Vilken är vattennivån efter 20 h?

d) Hur ändras vattennivån efter 20 h?

4446.

a) $\frac{dh}{dt}(64) = -0{,}65 \cdot \sqrt{64} = \underline{-5{,}2 \text{ cm/h}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = -0{,}65\,dt$

$\int \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = -0{,}65\int dt$

$2\sqrt{h} = -0{,}65t + C_1$

$h = (-0{,}325t + C)^2$

$h(0) = 100 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow$

$\underline{h(t) = (-0{,}325t + 10)^2}$

c) $h(20) = (-0{,}325 \cdot 20 + 10)^2 = \underline{12{,}25 \text{ cm}}$

d) $\frac{dh}{dt}(12{,}25) = -0{,}65\sqrt{12{,}25} = -2{,}3 \ \underline{\text{cm/h}}$

4448 Ange den integrerande faktorn i följande fall:

a) $y' + 3x^2y = 5$

b) $y' + \frac{1}{x}y = x^2$

c) $y' - \sin x \cdot y = 2$

d) $y' - 2xy = \sin x$

4448.

a) $\underline{e^{x^3}}$

b) $\underline{x}$

c) $\underline{e^{\cos x}}$

d) $\underline{e^{-x^2}}$

4449 Vilket högerled måste du finna en primitiv funktion till om metoden med integrerande faktor ska fungera?

a) $y' + 2xy = x^2$

b) $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = x$

c) $y' + \frac{4}{x}y = \frac{1}{x^2}$

d) $y' + g(x)y = f(x)$

4449.

a) $e^{x^2}y' + e^{x^2} \cdot 2xy = \underline{e^{x^2}x^2}$

b) $e^{\sqrt{x}}y' + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}y = \underline{e^{\sqrt{x}} \cdot x}$

c) $x^4y' + x^4 \cdot \frac{4}{x}y = x^4 \cdot \frac{1}{x^2} = \underline{x^2}$

d) $e^{G(x)}y' + e^{G(x)}g(x)y = \underline{e^{G(x)} \cdot f(x)}$

4450 Använd metoden med integrerande faktor för att lösa

a) $y' + 3y = 6$ c) $y' + \frac{2}{x}y = x$

b) $y' - 2xy = x$ d) $y' + 3x^2y = 9x^2$

4450.

a) $y' + 3y = 6$

$e^{3x}y' + e^{3x}\cdot 3y = e^{3x}\cdot 6$

$\frac{d}{dx}(e^{3x}\cdot y) = 6e^{3x}$

$e^{3x}\cdot y = 2e^{3x} + C$

$\underline{y = Ce^{-3x} + 2}$

c) $y' + \frac{2}{x}y = x$

$x^2y' + x^2\cdot\frac{2}{x}y = x^2\cdot x$

$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^3$

$x^2y = \frac{x^4}{4} + C$

$\underline{y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{4}}$

b) $y' - 2xy = x$

$e^{-x^2}y' - e^{-x^2}\cdot 2xy = e^{-x^2}x$

$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}\cdot y) = e^{-x^2}x$

$e^{-x^2}y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

$\underline{y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}}$

d) $y' + 3x^2y = 9x^2$

$e^{x^3}y' + e^{x^3}y = e^{x^3}\cdot 9x^2$

$\frac{d}{dx}(e^{x^3}\cdot y) = e^{x^3}\cdot 9x^2$

$e^{x^3}\cdot y = 3e^{x^3} + C$

$\underline{y = Ce^{-x^3} + 3}$

4451 I en behållare med varmt vatten sjönk vattnets temperatur T med tiden t enligt

$$\frac{dT}{dt} = -(T - T_r) \cdot B$$

T_r är omgivningens temperatur och B är en okänd värmeöverföringskonstant.

Ta fram en funktion för temperaturen om temperaturen vid $t = 0$ är 100 °C.

4451.

$$T' = -(T - T_r) \cdot B$$

$$T' + TB = T_r B$$

$$e^{Bt} \cdot T' + e^{Bt} TB = e^{Bt} T_r B$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{Bt} \cdot T\right) = e^{Bt} T_r B$$

$$e^{Bt} \cdot T = e^{Bt} \cdot T_r + C$$

$$T = Ce^{-Bt} + T_r$$

$$T(0) = 100 \Rightarrow C = 100 - T_r$$

$$\underline{T(t) = (100 - T_r) e^{-Bt} + T_r}$$

4452 Visa först att $x^2e^{x^2} - e^{x^2}$ är en primitiv funktion till $2x^3e^{x^2}$ och lös sedan differentialekvationen $y' + 2xy = 2x^3$

4452. $\frac{d}{dx}(x^2e^{x^2} - e^{x^2}) = 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2xe^{x^2} = 2x^3e^{x^2}$

$$e^{x^2}y' + e^{x^2}\cdot 2xy = e^{x^2}\cdot 2x^3$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}\cdot y) = e^{x^2}\cdot 2x^3$$

$$e^{x^2}\cdot y = e^{x^2}(x^2-1) + C$$

$$\underline{y(x) = Ce^{-x^2} + x^2 - 1}$$

4453 Lös differentialekvationen $\sin x \cdot y' + \cos x \cdot y = x$

4453. $\frac{d}{dx}(\sin x \cdot y) = x$

$$\sin x \cdot y = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\underline{y(x) = \frac{x^2 + C}{2\sin x}} \qquad (C = 2C_1)$$

4454 Lös differentialekvationen

$y' + \sin x \cdot y = 4 \sin x$

4454. $e^{-\cos x} \cdot y' + e^{-\cos x} \cdot \sin x \cdot y = e^{-\cos x} \cdot 4 \sin x$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\cos x} \cdot y\right) = e^{-\cos x} \cdot 4 \sin x$$

$$e^{-\cos x} \cdot y = 4e^{-\cos x} + C$$

$$\underline{y = Ce^{\cos x} + 4}$$

Lösning i Geogebra: