

1 Beräkna

a) $\frac{6!}{(6-2)!}$ b) $\binom{6}{2}$

1. a) $\frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \underline{30}$

b) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{30}{2} = \underline{15}$

2



a) Vilken veckodag är det 50 dagar efter en onsdag?

b) Beräkna $50 \pmod{7}$

2. b) $\underline{50 \pmod{7} = 1}$

a) $\text{onsdag} + 1 \text{ dag} = \underline{\text{torsdag}}$

3 Talet 524288 kan skrivas 2^{19}

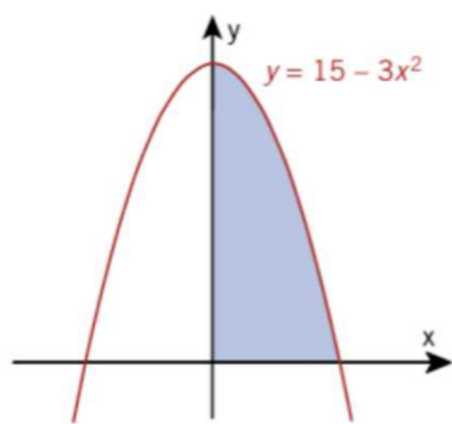
Beräkna summan

$$2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 524288$$

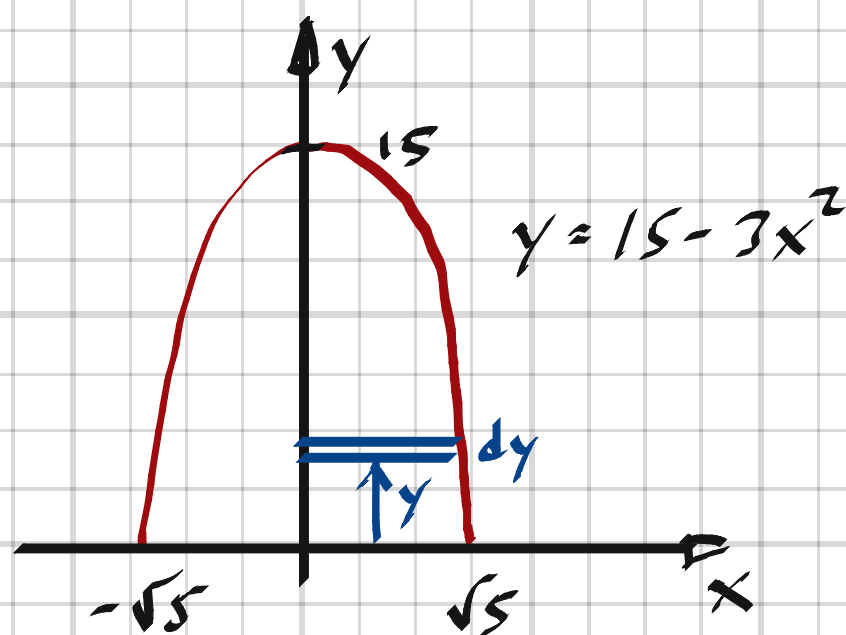
3. Geometrisk summa med $k=2$ och 19 termer

$$\text{Summan} = 2 \cdot \frac{2^{19} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (524288 - 1) = \underline{1048574}$$

4



Det färgade området roterar runt y-axeln.
Beräkna rotationskroppens volym.



4.

$$dV = \pi x^2 dy = \pi \left(5 - \frac{y}{3}\right) dy$$

$$V = \int_0^{15} dV = \pi \cdot \int_0^{15} \left(5 - \frac{y}{3}\right) dy = \pi \left[5y - \frac{y^2}{6}\right]_0^{15} =$$

$$= \left(5 \cdot 15 - \frac{15^2}{6}\right) \pi = 15 \left(\frac{5 \cdot 6 - 15}{6}\right) \pi = \frac{15^2}{6} \pi = \frac{225}{6} \pi = \underline{\underline{\frac{75\pi}{2} \text{ v.e.}}}}$$

5 Anna påstår att alla tal

$2^n - 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ är primtal.

Visa att hon har fel.

5. Exempelvis ger $n=4$ talet $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 \neq$ primtal

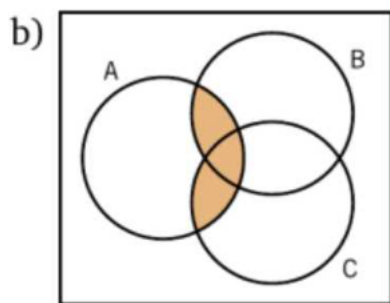
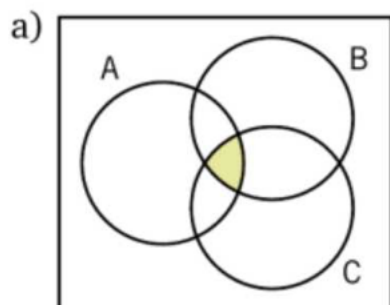
6 Måns säger att han direkt kan se att ekvationen

$6x + 3y = 43$ saknar heltalslösningar.

Hur kan han se det?

6. $43 \pmod{3} \neq 0$

7 Beskriv med symboler den färgade delen av Venndiagrammet.



7. a) $A \cap B \cap C$

b) $A \cap (B \cup C)$

8 Beräkna eventuella max- och minvärden och skissa grafen till $f(x) = x^2e^x$.

$$8. \quad f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

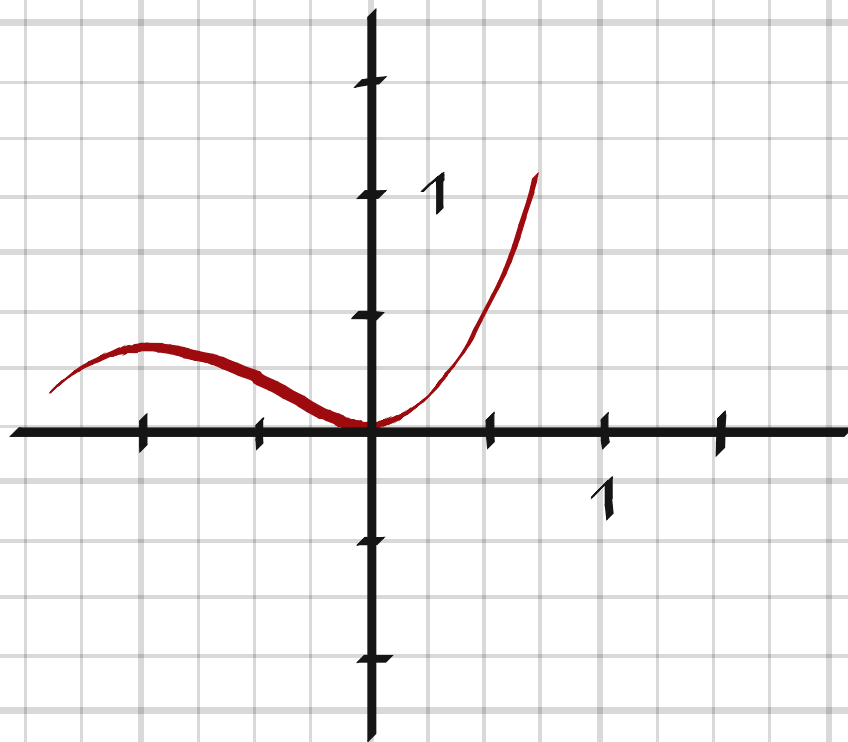
$$f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = e^x(2+4x+x^2)$$

$$f''(x_1) = e^0(2+4 \cdot 0 + 0) > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$f''(x_2) = e^{-2}(2-4 \cdot 2 + 2^2) < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$f_{\min} = f(x_1) = f(0) = 0$$

$$f_{\max} = f(x_2) = f(-2) = \frac{4}{e^2}$$



10 Visa, med hjälp av ett induktionsbevis, att
b $n^3 - 4n$ är delbart med 3 för alla heltal $n \geq 3$.

Test:

$$n=3 \Rightarrow n^3 - 4n = 3^3 - 4 \cdot 3 = 27 - 12 = 15 = 3 \cdot 5 \quad \text{ok!}$$

Antagande: Regeln gäller även för $n=p \Rightarrow$

$$n^3 - 4n = p^3 - 4p = 3k$$

Påstående: Regeln gäller även för $n=p+1 \Rightarrow$

$$(p+1)^3 - 4(p+1) = 3 \cdot m$$

Bevis:

$$(p+1)^3 - 4(p+1) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - 4p - 4 =$$

$$= p^3 - 4p + 3(p^2 + p - 1) = 3k + 3l = 3(k+l) = 3 \cdot m$$

$$k, l, m \in \mathbb{Z}$$

#

11 För funktionen f gäller att $f(2) = 3$ och $f'(x) = 2x$ för alla x .
Bestäm en primitiv funktion $F(x)$ till f sådan att $F(-1) = 0$.

$$11. \quad f(x) = x^2 + C_1$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow C_1 = 3 - 2^2 = -1$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x + C_2$$

$$F(-1) = 0 \Rightarrow C_2 = -1 - \frac{(-1)^3}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\underline{F(x) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}}$$

12 Bestäm koefficienten framför x^6y^2 i utvecklingen av $(x^3 + 2y)^4$.

12.

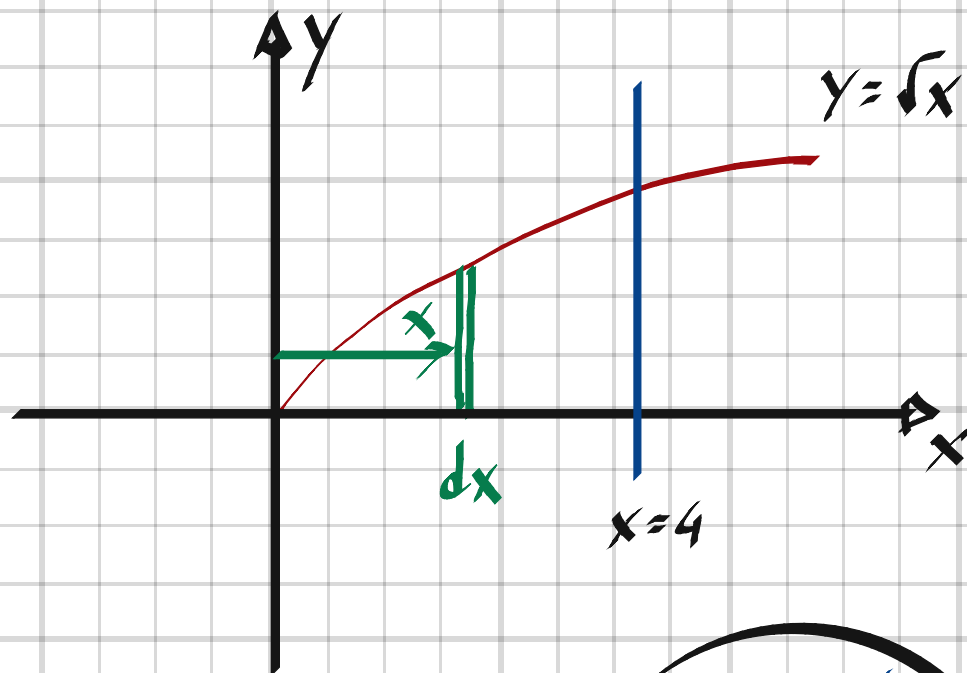
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(x^3 + 2y)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \cdot (x^3)^{4-k} \cdot (2y)^k \Rightarrow k=2 \text{ ger } c \cdot x^6y^2\text{-term}$$

$$\text{Koefficienten, } c = \binom{4}{2} \cdot 2^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2^2 = 3! \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = \underline{24}$$

13 En kropp har som basyta det område som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$, x-axeln och linjen $x = 4$.

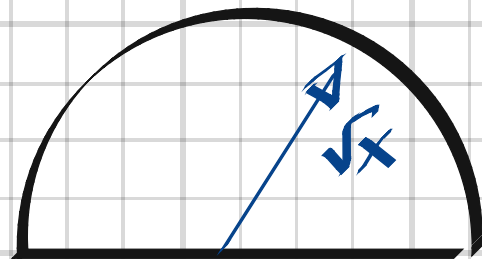
Beräkna kroppens volym, om varje mot x-axeln vinkelrätt plan som skär kroppen har en snittyta som är en halvcirkel.



13.

$$dV = \frac{\pi \cdot x}{2} \cdot dx$$

$$V = \int_0^4 dV = \frac{\pi}{2} \int_0^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \underline{4\pi \text{ v.e.}}$$



14 Bestäm talet a i sambandet

$$\binom{98}{95} + 2\binom{98}{96} + \binom{98}{97} = \binom{100}{a}$$

14. Pascals formel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$HL = \binom{100}{a} = \binom{99}{a-1} + \binom{99}{a} = \binom{98}{a-2} + \binom{98}{a-1} + \binom{98}{a-1} + \binom{98}{a} =$$

$$= \binom{98}{a-2} + 2\binom{98}{a-1} + \binom{98}{a}$$

Symmetri: $\binom{100}{a} = \binom{100}{100-a}$

Om $HL = VL \Rightarrow \underline{a = 97 \text{ eller } a = 3}$

15 Lös ekvationssystemen

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9 \\ 10x + 11y = 12 \end{cases}$$

Vilken slutsats kan du dra? Försök bevisa den.

$$15. \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = \frac{12 - 8 \cdot 2}{4} = -1$$

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9 \\ 10x + 11y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 70x + 80y = 90 \\ 70x + 77y = 84 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = \frac{90 - 80 \cdot 2}{70} = -1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$$

$$y = -\frac{7}{8}x + \frac{9}{8}$$

$$y = -\frac{10}{11}x + \frac{12}{11}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{n}{n+1}x + \frac{n+2}{n+1} \\ y = -\frac{n+3}{n+4}x + \frac{n+5}{n+4} \end{cases}$$

$$-\frac{n}{n+1}x + \frac{n+2}{n+1} = -\frac{n+3}{n+4}x + \frac{n+5}{n+4}$$

$$\left(\frac{n+3}{n+4} - \frac{n}{n+1} \right) x = \frac{n+5}{n+4} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$\left((n+1)(n+3) - (n+4) \cdot n \right) \cdot x = (n+1)(n+5) - (n+4)(n+2)$$

$$x = \frac{n^2 + 6n + 5 - n^2 - 6n - 8}{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n} = \frac{-3}{3} = \underline{-1}$$

$$y = -\frac{n}{n+1} x + \frac{n+2}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = \underline{2}$$

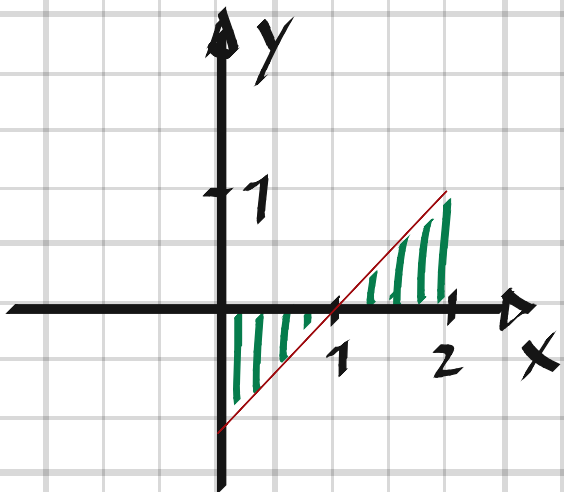
16 Välj numeriska värden på konstanterna k och m ($k \neq 0$, $m \neq 0$) så att integralen

$$\int_0^2 (kx + m) dx$$

får värdet 0 med ditt val av k och m .

(NP)

16.



$$\Rightarrow \underline{k=1, m=-1}$$

17 Studera talföljden 8, 15, 24, 35, ...

- Finn en enkel regel och ange ytterligare två tal i följden.
- Ange regeln som en formel för det n :te talet.
- Ange regeln som en rekursionsformel.

17. b) $a_n = \underline{(n+1)(n+3)}$

a) $a_5 = (5+1)(5+3) = \underline{48}$

$$a_6 = (6+1)(6+3) = \underline{63}$$

c) $a_1 = 8$

$$\underline{a_{n+1} = a_n + 2n + 5}$$

18 Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
gäller för alla positiva heltal n .

Test:

$$n=1 \Rightarrow VL = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} = 1, HL = 2 - \frac{1}{1} = 1, VL = HL \text{ ok!}$$

Antagande: Sambandet gäller även för $n=p$, dvs

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{p}$$

Påstående: Sambandet gäller även för $n=p+1$, dvs

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} - 2 + \frac{1}{p+1} \leq 0$$

Bevis:

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} - 2 + \frac{1}{p+1} = \underbrace{\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(p+1)^2} - 2 + \frac{1}{p+1}}_{\leq 2 - \frac{1}{p}}$$

$$\text{Om HL skall bli } \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{(p+1)^2} - 2 + \frac{1}{p+1} + 2 - \frac{1}{p} \leq 0$$

$$\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} = \frac{p + p(p+1) - (p+1)^2}{p(p+1)^2} =$$

$$= \frac{p + p^2 + p - p^2 - 2p - 1}{p(p+1)^2} = \frac{-1}{p(p+1)^2} \leq 0, p > 0 \#$$

19 Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x -koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \leq x \leq 4$

(NP)

$$19. \quad f'(x) = \frac{3}{2} \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{9}{4} \left(x - \frac{4}{9}\right) = \frac{9}{4}x - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[x\sqrt{x} \right]_1^4 = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = \underline{7 \text{ l.e.}}$$

20 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... är de första 10 talen i den oändliga talföljd som uppkallats efter matematikern Leonardo Fibonacci. Följden kan beskrivas med den rekursiva formeln

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ med } a_0 = a_1 = 1$$

- Visa att två tal som följer direkt efter varandra i talföljden är relativt prima.
- Visa att summan av sex på varandra följande Fibonaccital alltid är delbar med fyra.

Relativt prima innebär att talen saknar gemensam faktor, förutom faktorn 1.

20.

a) Test: $n=2 \Rightarrow a_2 = 1+1 = 2$

Talen 2 och 1 relativt prima ok!

Antagande: Formeln gäller för $n=p \Rightarrow$

$$a_p = a_{p-1} + a_{p-2}$$

Påstående: Formeln gäller även för $n=p+1 \Rightarrow$

$$a_{p+1} = a_p + a_{p-1}$$

Bevis:

$$a_{p+1} = a_p + a_{p-1} = a_{p-1} + a_{p-2} + a_{p-1} = 2a_{p-1} + a_{p-2}$$

$$a_{p+2} = a_{p+1} + a_p = a_p + a_{p-1} + a_p = 2a_p + a_{p-1} \Rightarrow$$

Om a_{p+1} är relativt prima så måste

även a_{p+2} vara relativt prima. #

$$b) \quad a_{n-5} = a_{n-3} - a_{n-4} \quad \text{o. S. V} \Rightarrow$$

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} =$$

$$= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} = a_n + 3a_{n-1} - a_{n-2} = 4a_{n-1}$$

#

21 Funktionen f definieras av formeln

$$f(x) = \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}$$

- a) Rita en enkel skiss av funktionens graf.
Har kurvan några asymptoter?
- b) Visa med hjälp av derivata att kurvan har två extrempunkter.
- c) Visa att det finns tal a och b sådana att funktionen kan skrivas

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{x+1}$$

d) Beräkna $\int_3^4 \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} dx$

21. a) Asymptoter: $x=2, x=-1$

$$\begin{aligned} b) f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 - x - 2) - (x+4)(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{x^2 - x - 2 - 2x^2 - 7x + 4}{(x^2 - x - 2)^2} \\ &= - \frac{x^2 + 8x - 2}{(x^2 - x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 2 = 0 \Rightarrow \underline{x = -4 \pm \sqrt{18} = -4 \pm 3\sqrt{2}}$$

$$c) \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{a(x+1) + b(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(a+b)x + a - 2b}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-2b=4 \end{cases} \Rightarrow -3b=3 \Rightarrow b=-1, a=2 \Rightarrow$$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

$$d) \int_3^4 \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} dx = 2 \cdot \int_3^4 \frac{1}{x-2} \cdot dx - \int_3^4 \frac{1}{x+1} \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot [\ln(x-2)]_3^4 + [\ln(x+1)]_4^3 = 2 \cdot (\ln 2 - 0) + \ln 4 - \ln 5 =$$

$$= 2\ln 4 - \ln 5 = \ln 16 - \ln 5 = \ln \frac{16}{5}$$

22 Strömstyrkan y milliampere genom en spole
beror av tiden x sekunder enligt ekvationen
 $y = 11,2 + 5,28x - 0,044x^2$ då $0 \leq x \leq 60$.

När ökar strömstyrkan med hastigheten
2,5 milliampere per sekund? (NP)

$$22. \quad y'(x) = 2,5 \quad \Rightarrow$$

$$5,28 - 0,088x = 2,5$$

$$x = \frac{5,28 - 2,5}{0,088} = 31,6 \approx \underline{32 \text{ s}}$$

23 Du vill undersöka om talen 481 och 997
är primtal.

a) Vilken är den största tänkbara faktorn
du måste undersöka i de två fallen?

b) Är både 481 och 997 primtal?
Motivera ditt svar.

$$23. \quad a) \quad \underline{\sqrt{481} \approx 21,9 \Rightarrow \text{faktorn } 21}$$

$$\underline{\sqrt{997} \approx 31,6 \Rightarrow \text{faktorn } 31}$$

$$b) \quad \underline{997 \text{ är ett primtal, } 481 = 13 \cdot 37}$$

The screenshot shows a software interface with a toolbar at the top containing icons for selection, text, lines, shapes, and zooming. Below the toolbar, the following text is displayed:

```
l1 = PrimeFactors(481)
= {13, 37}

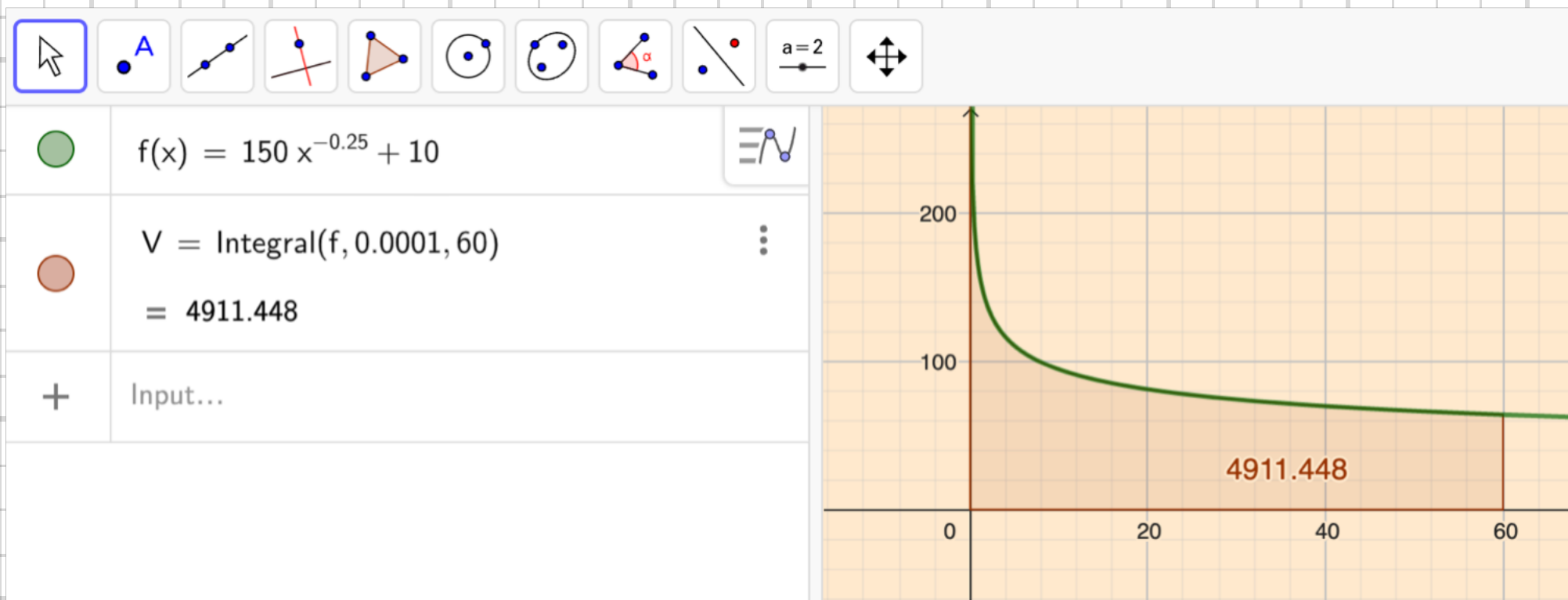
l2 = PrimeFactors(997)
= {997}
```

At the bottom, there is a plus sign and a vertical line, indicating a list of objects.

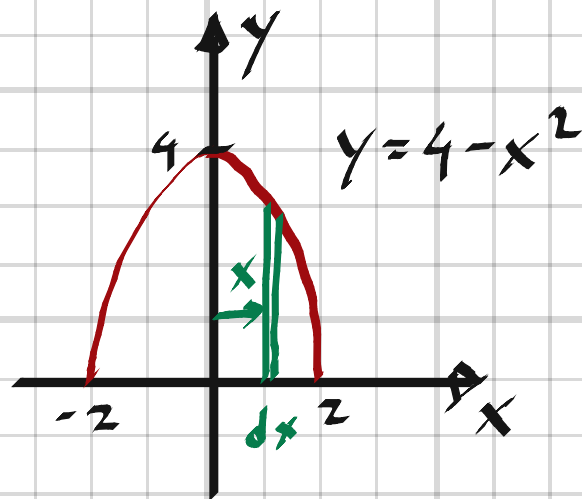
24 En vattentank fylls med en pump som ger $(150 \cdot t^{-0,25} + 10)$ liter/min där t är tiden i minuter.
Hur mycket vatten ger pumpen under 1 h räknat från $t = 0$?

24,

$$V = \int_0^{60} (150t^{-0,25} + 10) dt = \left[\frac{150 \cdot t^{0,75}}{0,75} + 10t \right]_0^{60} =$$
$$= 200 \cdot 60^{0,75} + 10 \cdot 60 \approx \underline{\underline{4900 \text{ liter}}}$$



25 Beräkna den rotationsvolym som uppstår då $y = 4 - x^2$ roterar kring x -axeln.
Vilken volym får vi då $y = 6 - x^2$ roterar kring $y = 2$?



25.

$$dV = 2\pi y^2 dx = 2\pi (4 - x^2)^2 dx = 2\pi (16 - 8x^2 + x^4) dx$$

$$V = \int_0^2 dV = 2\pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx =$$

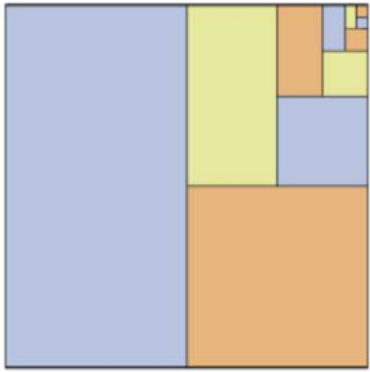
$$= 2\pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{32 \cdot 15 - 64 \cdot 5 + 32 \cdot 3}{15} = \underline{\underline{\frac{512}{15} \pi \text{ v.e.}}}}$$

Volymen blir densamma eftersom både kurva och rotationsaxel flyttas upp två steg.

26 Talföljden

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$...
är geometrisk.



- a) Beräkna summan av de 6 första talen.
Svara i bråkform.
- b) Beräkna det minsta antal termer i talföljden
som ska adderas för att summan ska
överstiga $\frac{999999}{1000000}$

26.

$$a) \text{ Summan} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{63}{64}}}$$

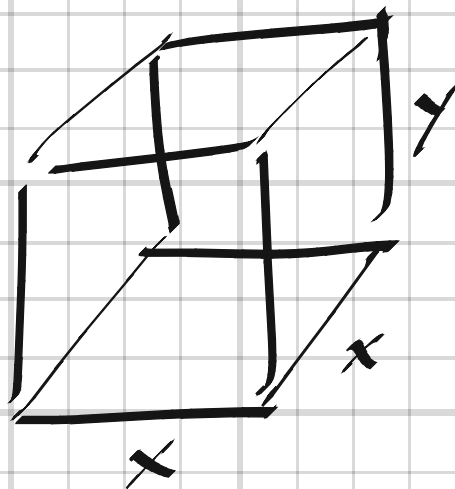
$$b) \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} > \frac{999999}{1000000}$$

$$\frac{1}{2^n} > \frac{1}{1000000}$$

$$2^n > 1000000$$

$$n > \frac{\lg 1000000}{\lg 2} = \frac{6}{\lg 2} \approx \underline{\underline{20}}$$

27 En plastlåda utan lock ska ha formen av ett rätblock. Bottenplattan ska vara kvadratisk och tillverkas av tjock plast som kostar 2,00 kr/m². De fyra sidorna ska göras av tunnare plast med priset 0,90 kr/m². Lådans volym ska vara 0,020 m³. Bestäm de mått på lådan som ger minsta möjliga materialkostnad.



27.

$$V = x^2 \cdot y = 0,02$$

$$P = 2x^2 + 0,9 \cdot 4xy$$

$$P = 2x^2 + 3,6 \cdot \frac{0,02}{x} = 2x^2 + \frac{0,072}{x}$$

$$\frac{dP}{dx} = 4x - \frac{0,072}{x^2}$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{0,072}{4} \Rightarrow x \approx 0,262 \text{ m}$$

$$y \approx 0,291 \text{ m}$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 4 + \frac{0,144}{x^3} > 0 \text{ för alla } x > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

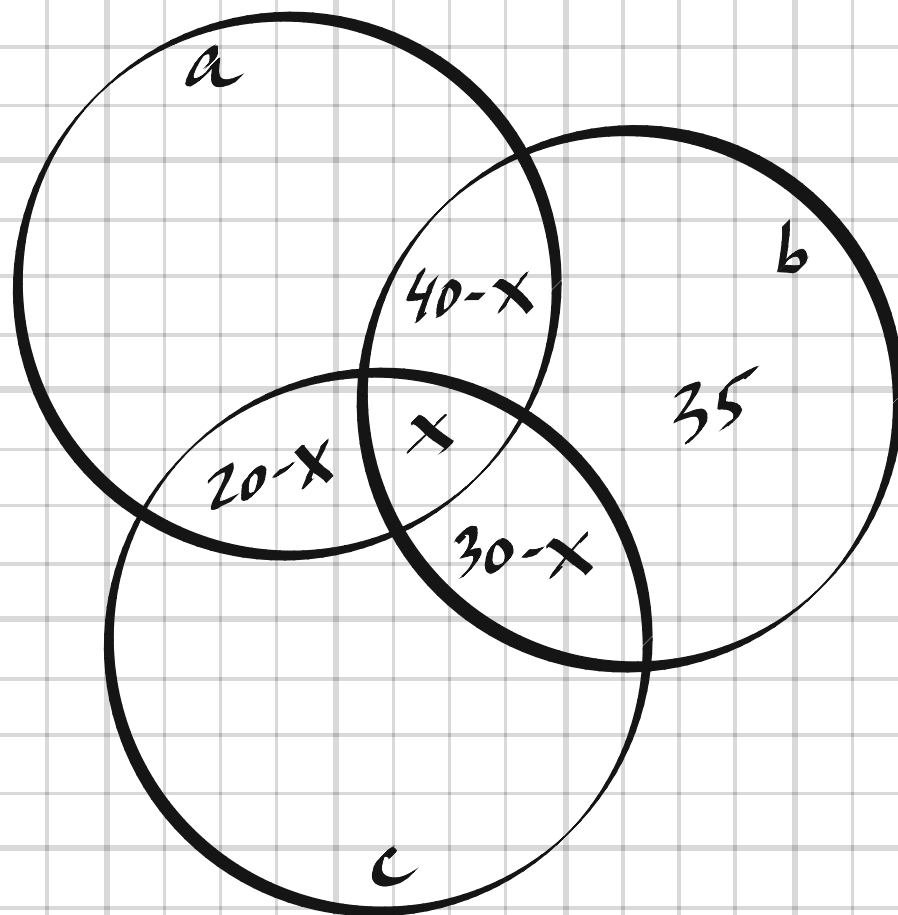
Lådan ska ha måtten 26x26x29 cm

28 Leif är kriminolog och i samband med ett brott ska han göra en gärningsmannaprofil. Som en del i det arbetet söker han på tre brottsrelaterade ord a , b och c i en av polisens databaser och finner då följande:

- Det finns 75 sidor som innehåller ordet a , 100 sidor som innehåller ordet b och 200 sidor som innehåller ordet c .
- 40 sidor innehåller både a och b .
- 30 sidor innehåller både b och c .
- 20 sidor innehåller a och c .
- 35 sidor innehåller b men inte a eller c .

Hur många sidor innehåller

- alla tre orden
- ordet c men inte a eller b ?



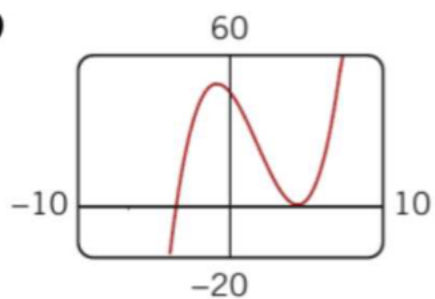
28.

$$a) \quad 35 + x + 30 - x + 40 - x = 100$$

$$x = 35 + 30 + 40 - 100 = \underline{5 \text{ st}}$$

$$b) \quad c = 200 - (20 - x) - x - (30 - x) = 150 + 5 = \underline{155 \text{ st}}$$

29



I figuren visas grafen till funktionen

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Grafen skär y -axeln i punkten $(0, 48)$ samt x -axeln i punkten $(-3, 0)$ och i den lokala minimipunkten $(4, 0)$.

- Bestäm konstanterna a , b och c .
- Bestäm kurvans lutning i punkten $(0, 48)$.
- Bestäm den lokala maximipunktens x -koordinat.
- Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan och de positiva koordinataxlarna.

$$29. \quad f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$(0, 48) \Rightarrow c = 48$$

$$(-3, 0) \Rightarrow \begin{cases} 9a - 3b = 27 - 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36a - 12b = -84 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(4, 0) \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = -64 - 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48a + 12b = -336 \end{cases}$$

$$a) \quad 84a = -420 \Rightarrow \underline{a = -5, b = -8, c = 48}$$

$$b) \quad f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 8$$

$$\underline{k = f'(0) = -8}$$

c)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$3\left(x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{8}{3}\right) = 0$$

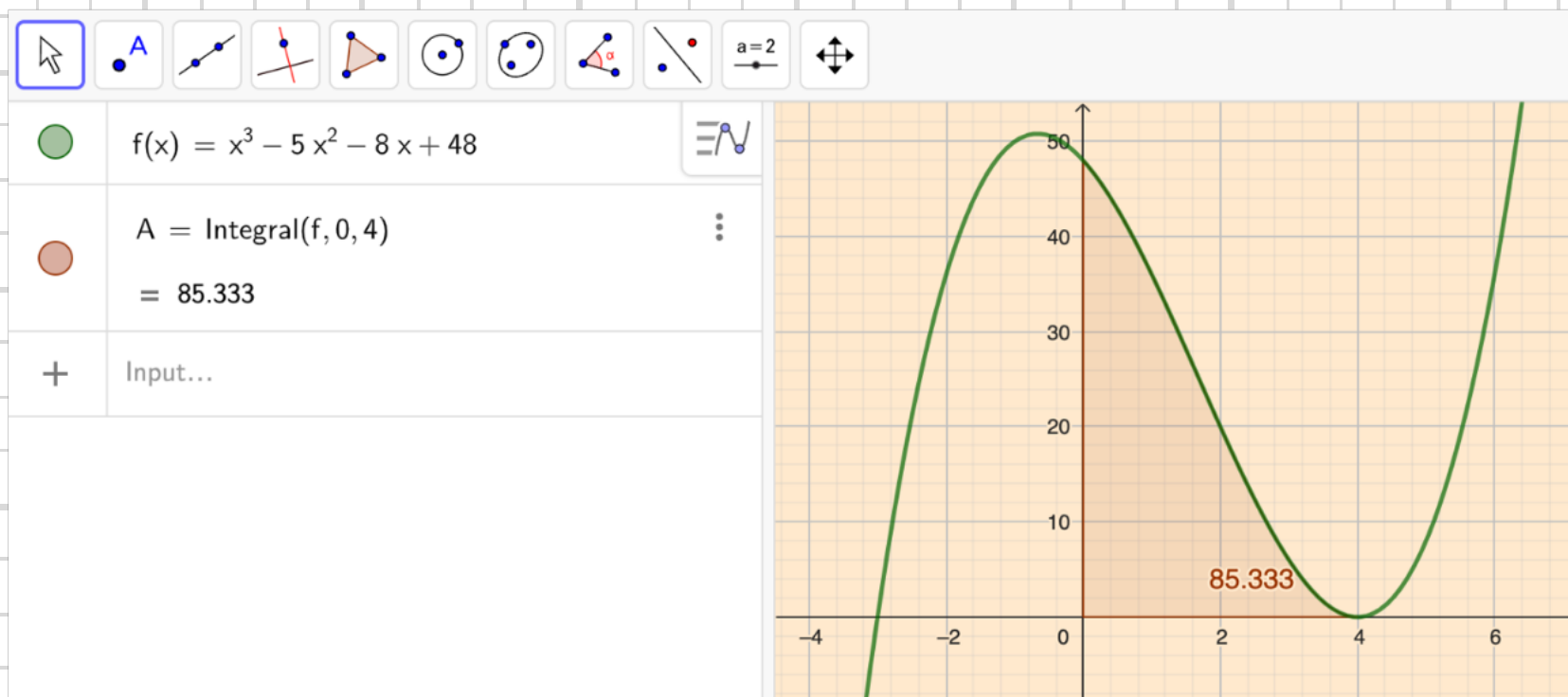
$$x = \frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{100}{36} + \frac{96}{36}} = \frac{10 \pm 14}{6} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$$

d)

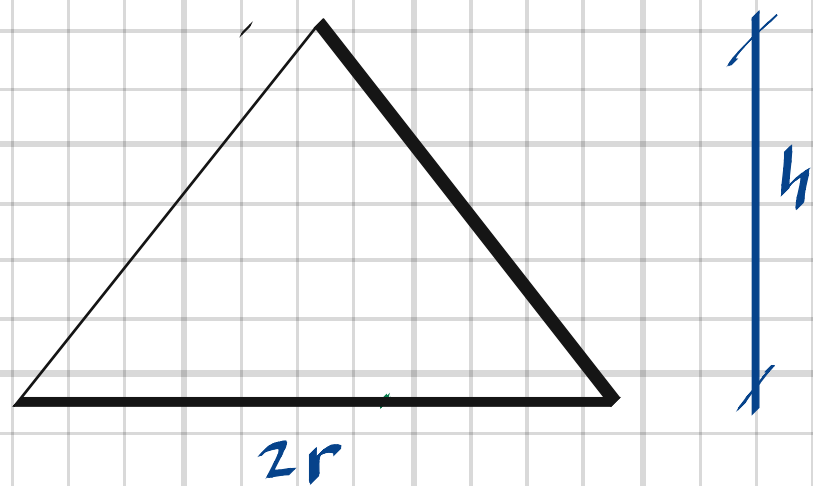
„orre integrationsgränser = $\frac{10+14}{6} = 4$

$$A = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (x^3 - 5x^2 - 8x + 48) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 48x \right]_0^4 = \frac{768 - 1280 - 768 + 2304}{12} = \frac{1024}{12} = \underline{\underline{\frac{256}{3} \text{ a.e.}}}$$



30 Sand tippas med hastigheten $2,0 \text{ m}^3/\text{min}$.
Sandhögen får formen av kon vars höjd är lika
med basytans radie.
Hur snabbt ökar sandhögens höjd i det
ögonblick då den är $4,0 \text{ m}$ hög?



30.

$$h = r \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

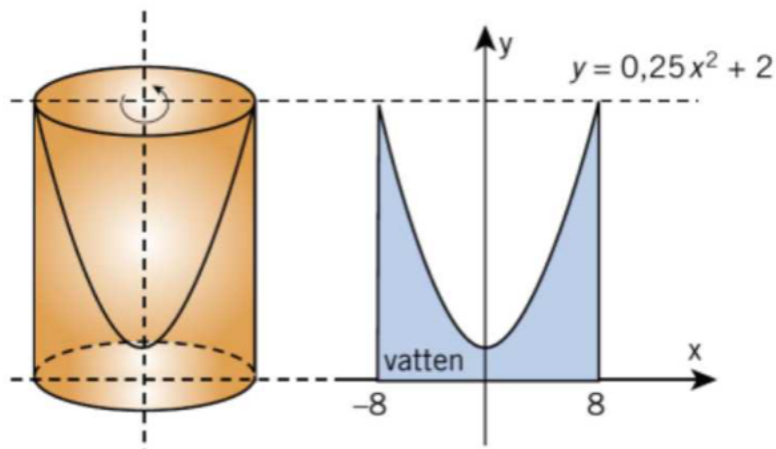
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^3}{3}$$

$$\frac{dV}{dr} = \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = \pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

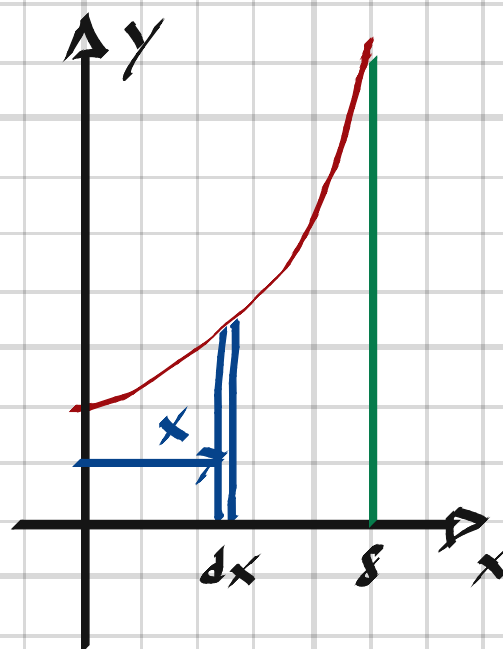
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dr} = \frac{1}{\pi \cdot 4^2} \cdot 2 = \underline{\underline{0,04 \text{ m/s}}}$$

31 En cylindrisk glasbehållare med inre diametern 16 cm är från början helt fylld med vatten. Behållaren roteras och så länge rotationshastigheten ökar rinner vatten över behållarens kant.

Vid en viss rotationshastighet står vattenytan i behållaren enligt figur 1. Sedd från sidan beskriver då vattenytan en parabel som ges av sambandet $y = 0,25x^2 + 2$ (Se figur 2).



Hur mycket vatten har vid denna tidpunkt runnit ur behållaren? (NP)



$$31. \quad V = V_2 - V_1$$

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot 8^2 (0,25 \cdot 8^2 + 2) = 1152\pi \text{ cm}^3$$

$$dV_1 = 2\pi x \cdot dx \cdot y = 2\pi (0,25x^3 + 2x) dx$$

$$V_1 = \int_0^8 dV_1 = 2\pi \left[0,0625x^4 + x^2 \right]_0^8 = 2\pi (256 + 64) = 640\pi \text{ cm}^3$$

$$V = 1152\pi - 640\pi = 512\pi \text{ cm}^3 \approx 1,6 \text{ dm}^3 = \underline{1,6 \text{ liter}}$$

32 Ett föremål rör sig med en acceleration a m/s² som beskrivs av $a(t) = 3,0 - e^{0,20t}$ där t är tiden i sekunder. Vid tidpunkten $t = 0$ är föremålets hastighet 9,5 m/s. Bestäm hastigheten vid den tidpunkt då accelerationen $a = 0$.

$$32. \quad a=0 \Rightarrow 3 - e^{0,2t} = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{0,2} \text{ s} \approx 8,960 \text{ s}$$

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt + c = \left[3t - 5e^{0,2t} \right]_0^t + c = 3t - 5e^{0,2t} + 5 + c$$

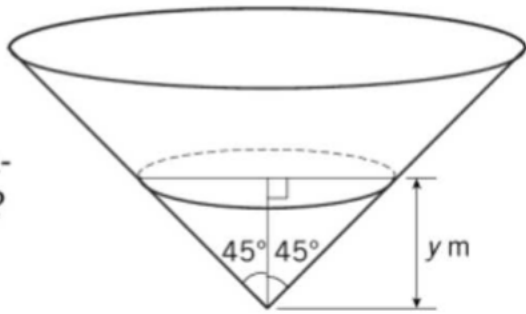
$$v(0) = 9,5 \Rightarrow -5 + 5 + c = 9,5 \Rightarrow c = 9,5$$

$$v(t) = 3t - 5e^{0,2t} + 14,5$$

$$v\left(\frac{\ln 3}{0,2}\right) = 15 \ln 3 - 15 + 14,5 = 15 \ln 3 - 0,5 = \underline{\underline{16 \text{ m/s}}}$$

33 En rak cirkulär kon med toppvinkeln 90° placeras med höjden vertikal och toppen nedåt. Konen fylls med vatten med tillströmningshastigheten $q \text{ m}^3/\text{s}$.

Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är $y \text{ m}$?



$$33. \quad \theta = 45^\circ \Rightarrow y = r$$

$$V = \frac{\pi r^2 y}{3} = \frac{\pi y^3}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi y^2 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = q \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{q}{\pi y^2} \text{ m/s}$$

34 Madina tog i början av år 2012 ett annuitetslån på 75 000 kr. Enligt lånevillkoren ska hon betala igen lånet med 5 lika stora belopp (annuiteter) i slutet av varje år med början år 2012. Låneräntan är 6,25%.
Hur stor är varje annuitet?

34.

Bankens kostnad (uteblivna intäkt)

$$\text{för lånet} = 75000 \cdot 1.0625^5 = 101556 \text{ kr}$$

$$\text{Madinas kostnad} = x + x \cdot 1.0625 + x \cdot 1.0625^2 + \dots + x \cdot 1.0625^5$$

där $x = \text{annuiteten}$. \Rightarrow

$$x \cdot \frac{1.0625^5 - 1}{1.0625 - 1} = 101556$$

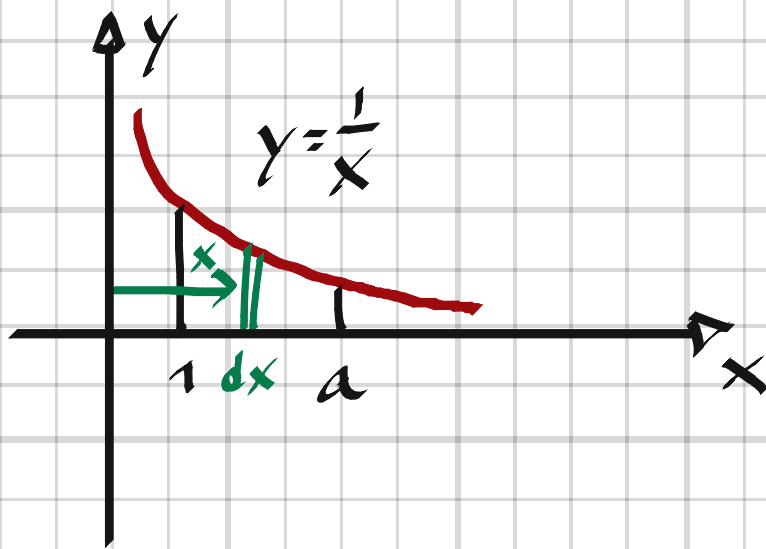
$$x = \frac{101556 \cdot 0.0625}{1.0625^5 - 1} = \underline{\underline{17926 \text{ kr}}}$$

35 Kurvan $y = 1/x$ roterar runt x -axeln. Om vi tittar på volymen som uppstår mellan $x = 1$ och $x = a$ (> 1) så påstår Nina att volymen har ett största värde, dvs är begränsad oavsett värde på a .

a) Visa att Nina har rätt.

b) Gäller detta också för kurvan $y = 1/\sqrt{x}$?

c) För vilka värden på p gäller det kurvorna $y = 1/x^p$?



$$35, \quad a) \quad dV = \pi y^2 dx = \pi \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$V = \int_1^a dV = \pi \cdot \left[\frac{1}{x} \right]_1^a = \pi - \frac{\pi}{a}$$

$$a \rightarrow \infty \Rightarrow V = \pi - 0 = \pi \text{ v.e.}$$

$$b) \quad dV = \pi \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$V = \int_1^{\infty} dV = \pi \cdot [\ln x]_1^{\infty} \text{ är divergent} \Rightarrow \text{nej}$$

$$c) \quad dV = \pi y^2 dx = \pi \cdot x^{-2p} dx$$

$$V = \int_1^a dV = \frac{\pi}{1-2p} \left[x^{1-2p} \right]_1^a = \frac{\pi}{1-2p} (a^{1-2p} - 1)$$

Termen a^{1-2p} skall gå mot 0 då $a \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$1-2p < 0 \Rightarrow \underline{p > \frac{1}{2}}$$

36 Bestäm konstanten a exakt så att kurvan $y = \ln x - 2\ln(x + a)$ tangerar linjen $y = 2$.

$$36. \quad y' = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+a}$$

Tangerar linjen $y = 2 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$

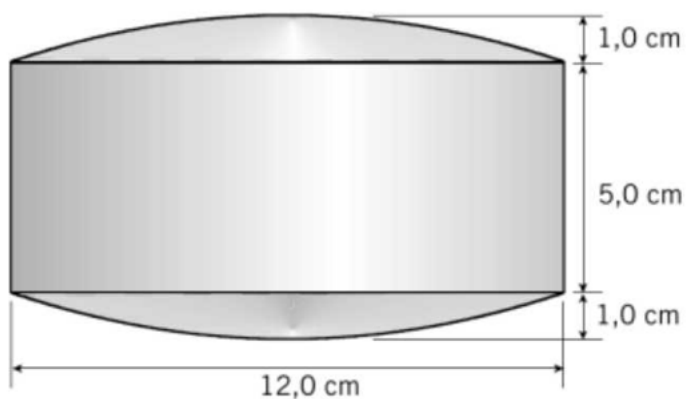
$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+a} = 0 \Rightarrow 2x = x+a \Rightarrow x = a$$

$$y = 2 \Rightarrow \ln a - 2\ln(a+a) = 2 \Rightarrow$$

$$\ln a - \ln(2a)^2 = 2 \Rightarrow \ln \frac{a}{4a^2} = 2 \Rightarrow$$

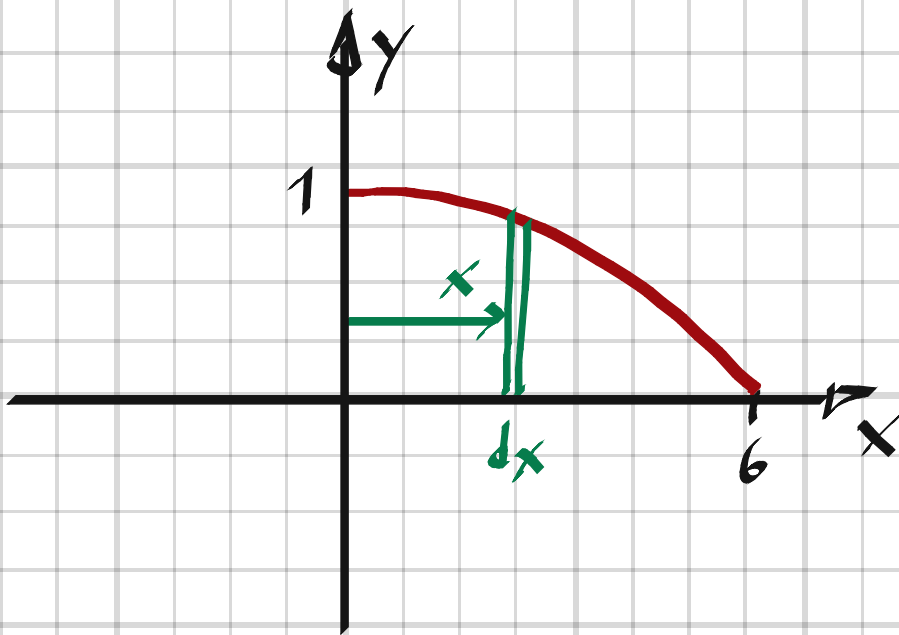
$$\frac{1}{4a} = e^2 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{4e^2}}$$

37 En vacker vårkväll tänker surströmmings-älskaren Anders avnjuta innehållet i en burk som han köpt förra sommaren. Under vintern har burkens botten och lock börjat bukta ut eftersom innehållet jäser. Det som från början kunde beskrivas som en rak cirkulär cylinder, med diametern 12,0 cm och höjden 5,0 cm är nu en kropp som från sidan ser ut som på bilden nedan.



Anders observerar att locket, och även botten, "profil" ganska exakt kan beskrivas med grafen till en andragradsfunktion av typen $y = ax^2 + bx + c$

Beräkna volymökningen i procent, när burken svällt så att den buktar ut 1,0 cm på varje sida samtidigt som diameter och kanthöjd är oförändrade. (NP)



$$37. \quad V_0 = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 5 = 180\pi \text{ cm}^3$$

Parabeln är symmetrisk kring y -axeln $\Rightarrow b=0$

$$(0, 1) \Rightarrow c=1$$

$$(6, 0) \Rightarrow 36a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{36} \Rightarrow y = 1 - \frac{x^2}{36}$$

$$dV = 2 \cdot 2\pi x dx \cdot y = 4\pi \left(x - \frac{x^3}{36}\right) dx$$

$$V = \int_0^6 dV = 4\pi \int_0^6 \left(x - \frac{x^3}{36}\right) dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{144}\right]_0^6 =$$

$$= \frac{36 \cdot 72 - 1296}{144} \cdot 4\pi = 36\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Volymökningen} = \frac{36\pi}{180\pi} = 0,2 = \underline{\underline{20\%}}$$