11 Studera funktionerna nedan.

$f(x) = 3000 - 200x$ $\quad$ $h(x) = 150x + 200$

$g(x) = 3000 \cdot 1{,}07^x$ $\quad$ $c(x) = 200 \cdot 0{,}95^x$

Välj två av funktionerna som är lika på något sätt och beskriv vad funktionerna har gemensamt.

Upprepa detta för två andra funktioner.

11. f(x) och h(x) är bägge linjära funktioner

g(x) och c(x) –"– exponentiella –"–

f(x) och c(x) –"– avtagande –"–

g(x) och h(x) –"– växande –"–

---

12 För en funktion gäller $f(x) = 2x - 3$ och definitionsmängden är $-3 < x \leq 4$.

Vilken är funktionens värdemängd?

12. $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 3 = -9$

$f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$

funktionen linjär => inga mellanliggande max/min

$-9 < f(x) \leq 5$

13 Skriv ekvationen för den linje L_1 som går genom punkten (1, 2) och som aldrig skär den linje L_2 som har ekvationen $y = -3x + 8$.

13. $L_1: \quad y = -3x + m$

$(1,2) \Rightarrow -3 \cdot 1 + m = 2 \Rightarrow m = 5$

$\underline{y = -3x + 5}$

---

14 För funktionen f gäller att
$$f(x) = \frac{2x}{3} + m$$
Bestäm m så att $f(3) = 3f(2)$.

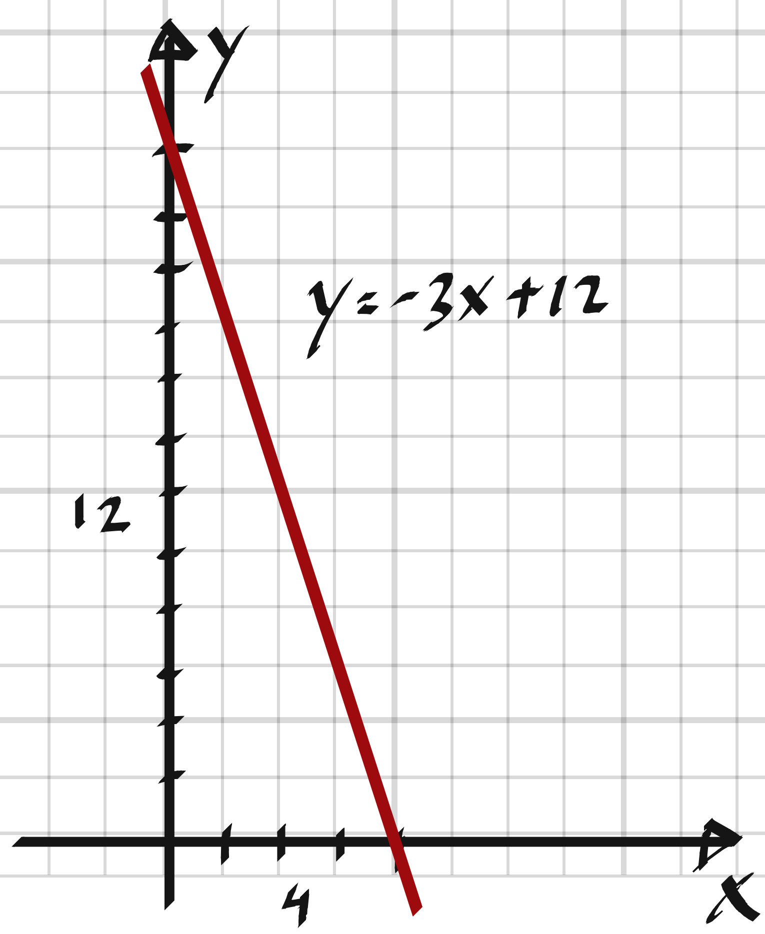
14. $$\frac{2 \cdot 3}{3} + m = 3\left(\frac{2 \cdot 2}{3} + m\right)$$

$2 + m = 4 + 3m \Rightarrow \underline{m = -1}$

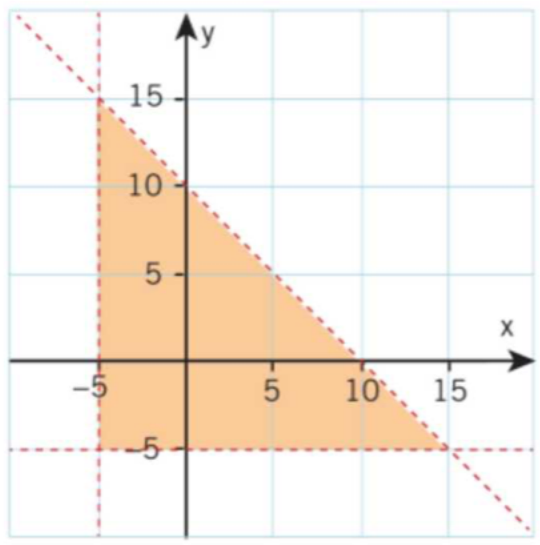
---

15 En rät linje har ekvationen $3x + y - 12 = 0$. Linjen bildar tillsammans med koordinat-axlarna en triangel.
Beräkna triangelns area.

15. $A = \dfrac{4 \cdot 12}{2} = \underline{24 \text{ a.e.}}$



16 Beskriv det färgade området med en olikhet.



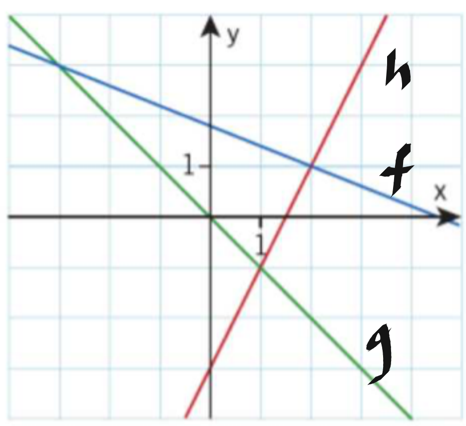
16.

$x > -5$

$y > -5$

$y < 10 - x$

17



I koordinatsystemet visas tre räta linjer. Linjerna är grafer till funktionerna $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$.

Det gäller att $f(0) > g(0) > h(0)$.

a) För vilket x gäller att $f(x) = g(x)$?

b) Bestäm $f(100) + h(100)$

c) Lös ekvationen $f(x) + g(x) + h(x) = 0$

d) Bestäm $h(a)$ då $h(a + 1) = 3$

e) För vilka x gäller att $g(x) < 0$ och $h(x) < 0$?

$f(x) = 1{,}8 - 0{,}4x$

$g(x) = -x$

$h(x) = 2x - 3$

17. a) $x = -3$

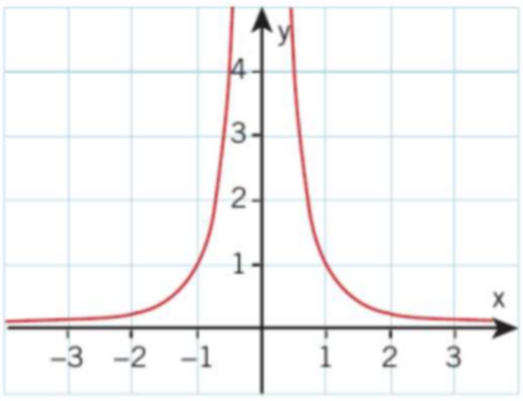
b) $1{,}8 - 0{,}4 \cdot 100 + 2 \cdot 100 - 3 = 158{,}8$

c) $1{,}8 - 0{,}4x - x + 2x - 3 = 0 \Rightarrow 0{,}6x = 1{,}2 \Rightarrow x = 2$

d) $a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$

e) $0 < x < 1{,}5$

18



Vilken funktion är ritad i figuren?

I $y = \dfrac{1}{x}$ II $y = \dfrac{1}{x^2}$ III $y = 2 \cdot 0{,}5^x$

Motivera ditt val.

18. Funktion II: $y = \dfrac{1}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{x} < 0$ då $x < 0$

$2 \cdot 0{,}5^x = 2$ då $x = 0$

---

19 Ge exempel på två olika funktioner $f(x)$ där $f(f(1)) = 4$.

19. $f(x) = ax + b$

$f(1) = a + b$; $f(f(1)) = a(a+b) + b = a^2 + ab + b$

$f(f(1)) = 4 \Rightarrow a^2 + ab + b = 4$

Om a väljes 1 $\Rightarrow 1 + b + b = 4 \Rightarrow b = \dfrac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x + \dfrac{3}{2}$

Om a väljes 2 $\Rightarrow 4 + 2b + b = 4 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = 2x$

---

20 För en funktion gäller att $f(0) = 4$ och $f(2) = 8$
Bestäm $f(1)$ om funktionen är
a) linjär b) exponentiell.

20. a) $f(x) = kx + m$

$k = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{8 - 4}{2 - 0} = 2$

$f(0) = 4 \Rightarrow m = 4$

$f(x) = 2x + 4$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 4 = \underline{6}$

b) $f(x) = c \cdot a^x$

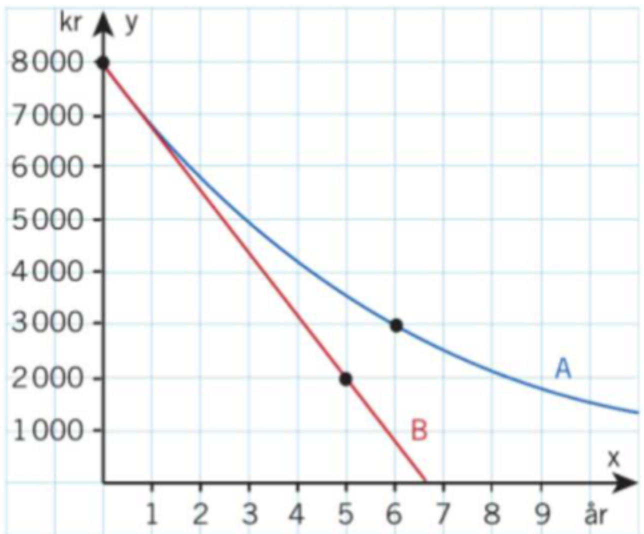
$c \cdot a^0 = 4 \Rightarrow c = 4$

$4 \cdot a^2 = 8 \Rightarrow a = \cancel{\pm}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$f(x) = 4 \cdot (\sqrt{2})^x$

$f(1) = \underline{4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32}}$

24 Teddy köper en ny dator. Graferna visar två modeller för hur datorns värde kan tänkas minska efter köpet.



a) Hur stor är skillnaden i värde efter 6 år mellan de två modellerna?

b) Efter hur lång tid har värdet minskat med 75 % enligt de två modellerna?

c) Den ena modellen kan beskrivas med formeln $y = kx + m$ och den andra med formeln $y = C \cdot a^x$.

Bestäm konstanterna k, m, C och a.

d) Vilka begränsningar har modellerna?

24.

a) $\approx 3000 - 800 = \underline{2200 \text{ kr}}$

b) $8000 \cdot 0{,}25 = 2000$

A: $\underline{x \approx 8.3 \text{ år}}$, B: $\underline{x = 5 \text{ år}}$

c) A: $\underline{C = 8000}$

$(6, 3000) \Rightarrow 8000 \cdot a^6 = 3000 \Rightarrow \underline{a = \left(\frac{3}{8}\right)^{1/6} \approx 0{,}85}$

$y_A = 8000 \cdot 0{,}85^x$

B: $\underline{m = 8000}$

$(5, 2000) \Rightarrow 5k + 8000 = 2000 \Rightarrow \underline{k = -\frac{6000}{5} = -1200}$

$y_B = 8000 - 1200x$

d)

A sjunker aldrig till noll.

B sjunker lika mycket varje år.

Det troliga är nog att datorn sjunker mer i början.

25 Två modeller för antal miljoner bakterier i en bakteriekultur efter t timmar beskrivs av funktionerna

$f(t) = 22 \cdot 1{,}0129^t$ och $g(t) = 22 + 0{,}9t$.

a) Tolka och beskriv de två modellerna.

b) Finns det något värde på $t > 0$ så att $f(t) > g(t)$?

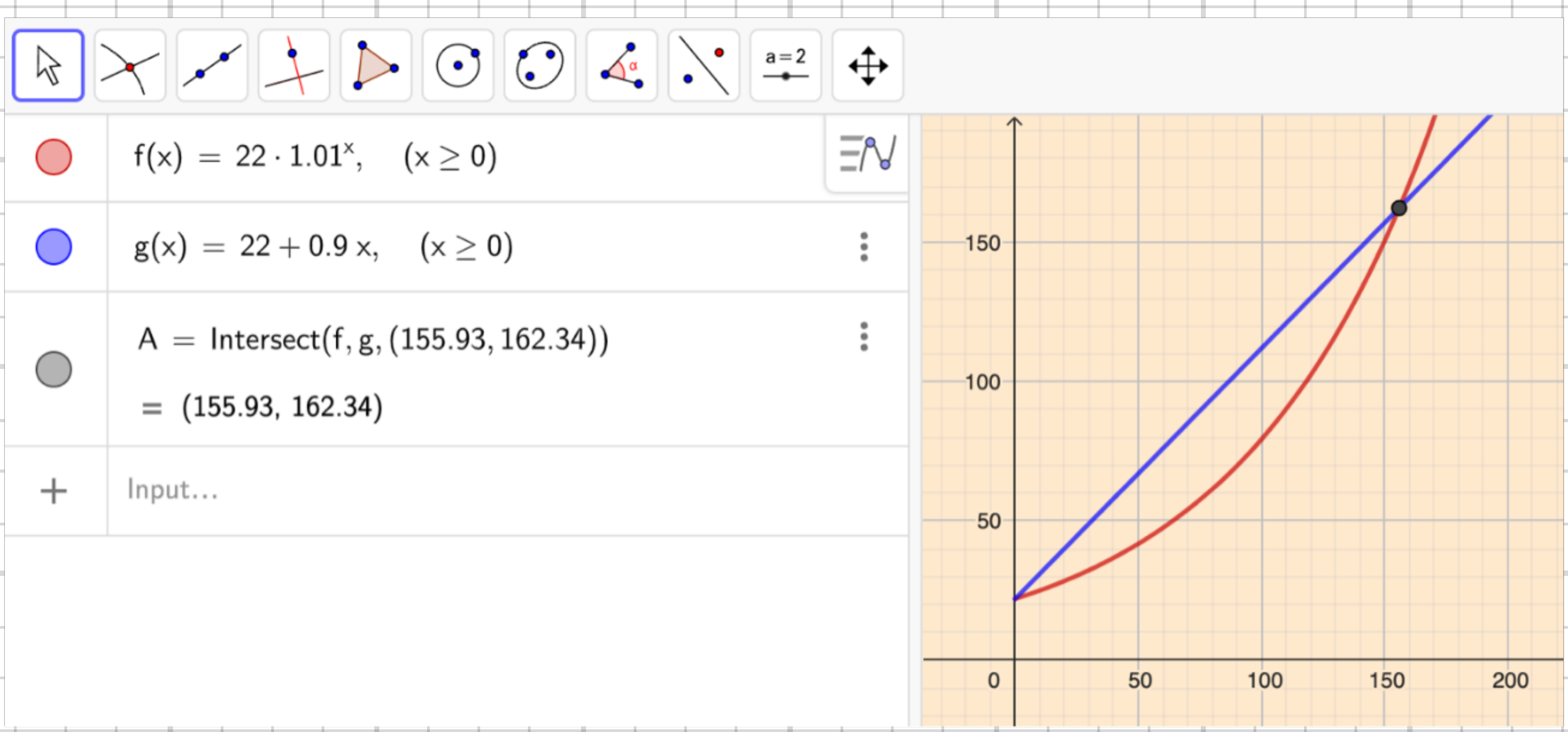
25.

a) f(t) startar med 22 milj. bakterier och ökar antalet med 1,29 % per timme.

g(t) startar med 22 milj. bakterier och ökar med 0,9 milj. per timme.

b) $22 \cdot 1{,}0129^t > 22 + 0{,}9t$

Lösning i Geogebra $\Rightarrow$ $t > 156$ h



26 Tabellen visar hur världens befolkning har ökat.

År	Världens befolkning (miljoner)
1900	1 700
2000	6 100
2100	?

Beräkna världens befolkning år 2100. Använd en modell där ökningen mellan år 1900 och år 2100 beskrivs av en

a) linjär funktion

b) exponentiell funktion.

26.

a) $k = \dfrac{6100 - 1700}{2000 - 1900} = 44$ milj/år

$f(x) = 44x + 1700$

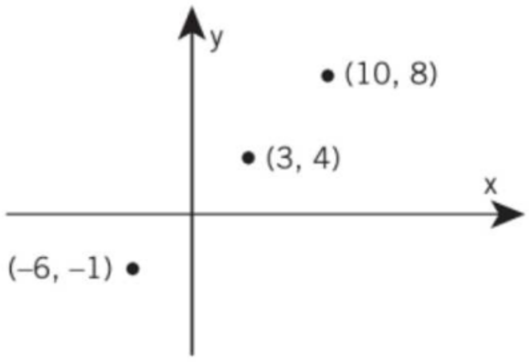
$f(200) = 44 \cdot 200 + 1700 = \underline{10\,500 \text{ miljoner}}$

b) $1700 \cdot a^{(2000-1900)} = 6100 \Rightarrow a = \left(\dfrac{61}{17}\right)^{1/100} = 1{,}0129$

$g(x) = 1700 \cdot 1{,}0129^{x}$

$g(200) = 1700 \cdot 1{,}0129^{200} = \underline{22\,000 \text{ miljoner}}$

27 I ett koordinatsystem finns tre punkter som markerats i figuren.



Wilma anser att dessa tre punkter ligger på en rät linje.

Madeleine menar att punkterna inte alls ligger på en rät linje utan att det bara är så det ser ut.

Undersök vem som har rätt. *(NP)*

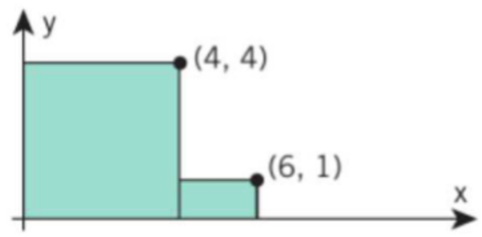
27. $k_1 = \dfrac{8-4}{10-3} = \dfrac{4}{7}$

$k_2 = \dfrac{8-(-1)}{10-(-6)} = \dfrac{9}{16}$

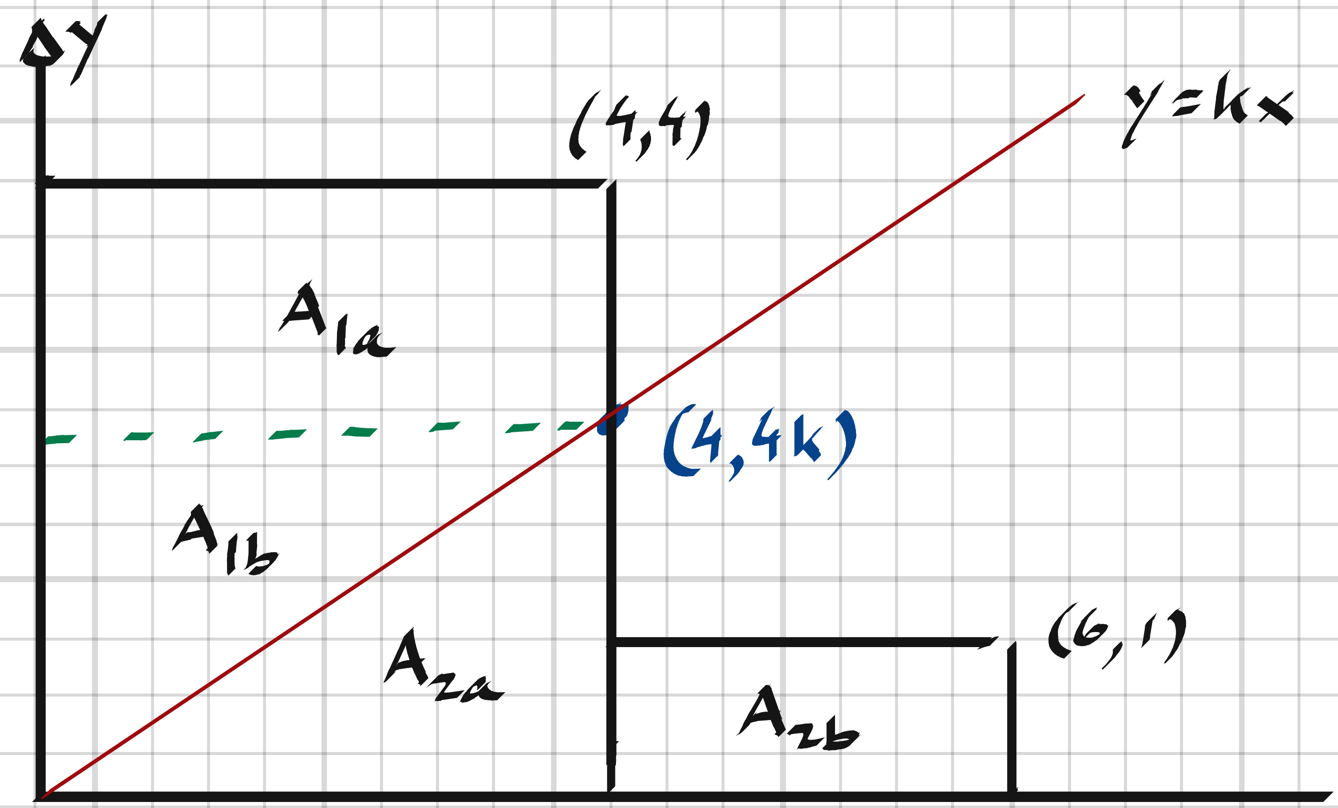
$k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ Punkterna ligger inte på en rät linje.

28 Det färgade området består av en kvadrat och en rektangel. Det delas i två lika stora delar av linjen $y = kx$.

Bestäm det exakta värdet på k.



28.



$$A_1 = A_{1a} + A_{1b} = 4 \cdot (4-4k) + \frac{4 \cdot 4k}{2}$$

$$A_2 = A_{2a} + A_{2b} = \frac{4 \cdot 4k}{2} + 2 \cdot 1$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow 4(4-4k) = 2 \Rightarrow$$

$$k = \frac{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8}$$

29 Ett jämntjockt ljus som brinner har en längd som avtar linjärt med tiden. Ett 30 cm långt ljus brinner ner 8 cm på 4 timmar.

a) Hur lång tid tar det för ljuset att brinna ner helt?

b) Ange en funktion som beskriver hur ljusets längd y cm beror av brinntiden x timmar.

c) Två andra ljus, A och B, har en längd som, när de brinner, minskar enligt följande:

Beskriv skillnader och likheter.
Hur ser ljus A och B ut?

d) Vilka funktioner motsvaras av graferna?

e) Lovisa har två olika ljus med samma höjd hemma. Ett är sfäriskt och ett är koniskt.

Skissa, i samma koordinatsystem, två grafer som visar hur höjden på Lovisas ljus varierar med brinntiden.

29. b) $f(x) = 30 - \frac{8}{4}x = \underline{30 - 2x}$

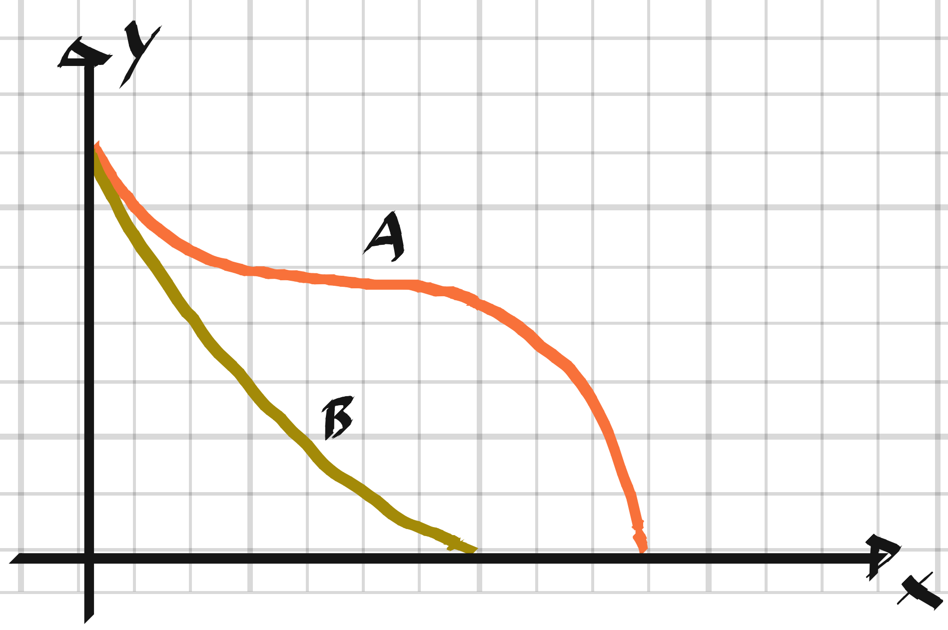
a) $f(x) = 0 \Rightarrow 30 - 2x = 0 \Rightarrow \underline{x = 15\text{ h}}$

c) Ljusen är olika långa men brinner ner på samma tid.

d) $\underline{y_A = 15 - 1{,}5x}$

$\underline{y_B = 40 - 4x}$

e)



30 a) För funktionen f gäller att $f(x) = 3x$
Undersök om det gäller att $f(20) = 2 \cdot f(10)$

b) För funktionen g gäller att $g(x) = 100 - 3x$
Undersök om det gäller att $g(20) = 2 \cdot g(10)$

c) För funktionen h gäller att $h(x) = kx + m$
Undersök för vilka värden på k och m som det gäller att $h(2a) = 2 \cdot h(a)$ för alla värden på a.

30. a) $f(20) = 3 \cdot 20 = 60$
$f(10) = 3 \cdot 10 = 30$ $\Rightarrow$ $f(20) = 2 \cdot f(10)$

b) $g(20) = 100 - 3 \cdot 20 = 40$
$g(10) = 100 - 3 \cdot 10 = 70$ $\Rightarrow$ $g(20) \neq 2 \cdot g(10)$

c) $k \cdot 2a + m = 2(k \cdot a + m)$ $\Rightarrow$

För alla värden på k då $m = 0$

---

31 Bestäm a så att $f(2a) = 1 - f(a)$ då
$f(x) = \frac{x^2}{10}$

31. $\frac{(2a)^2}{10} = 1 - \frac{a^2}{10}$ $\Rightarrow$

$5a^2 = 10$

$a = \pm\sqrt{2}$