3101 Bestäm y' om

a) $y = 5x^3 - \frac{1}{4}x^8$

b) $y = 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$

d) $y = \frac{2x^{5/2}}{3} - \frac{5x^{-7/2}}{4}$

3101. a) $y' = 15x^2 - 2x^7$

b) $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$

c) $y' = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}$

d) $y' = \frac{5x\sqrt{x}}{3} + \frac{35x^{-9/2}}{8}$

3102 Derivera följande funktioner

a) $y = 5\cos 3x - 3\sin 4x$

b) $y = 2e^{3x} - 5e^{-2x}$

c) $y = \ln 3x - \frac{1}{3x} + 3^x$

d) $y = (x^3 + 1)^{10}$

3102. a) $y' = -15\sin 3x - 12\cos 4x$

b) $y' = 6e^{3x} + 10e^{-2x}$

c) $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} + 3^x \cdot \ln 3$

d) $y' = 30x^2(x^3+1)^9$

Som en modell för hur många bakterier N som återstår i en kultur t min efter det att den behandlats med ett bakteriedödande medel används funktionen

$N = 20\,000 \cdot e^{-0{,}45t}$

Med vilken hastighet minskar antalet bakterier vid tidpunkten 4,0 min?

3103. $N' = -0{,}45 \cdot 20000 \cdot e^{-0{,}45t}$

$N'(4) = -1488 \approx \underline{-1500 \text{ st/min}}$

3104 Derivera

a) $y = x \cdot \sin x$

b) $y = 2x \cdot e^{3x}$

c) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

d) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

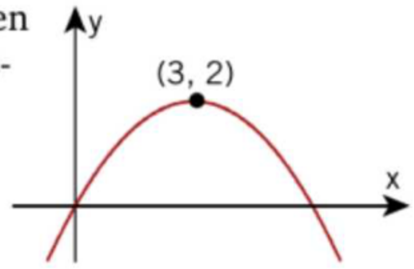
3104. a) $\underline{y' = \sin x + x \cdot \cos x}$

b) $\underline{y' = 2 \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} = 2e^{3x}(1 + 3x)}$

c) $\underline{y' = -\dfrac{2}{x^3} \cdot e^x + \dfrac{1}{x^2} \cdot e^x = e^x\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)}$

d) $\underline{y' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$

3105 I figuren har grafen till en andragradsfunktion f ritats.



Vilka av nedanstående påståenden är sanna?

A $f'(x) \geq 0$ för $x \geq 0$

B $f'(x) \geq 0$ för $x \leq 3$

C $f'(x) \leq 0$ för $x \leq 0$

D $f'(x) \leq 0$ för $x \geq 3$

3105. B och D.

3106 Ange med hjälp av tabellen ett ungefärligt värde på $f'(3,3)$.

x	3,1	3,2	3,3	3,4
$f(x)$	7,1	6,6	6,2	5,9

3106.

$$f'(3,3) \approx \frac{5,9-6,6}{3,4-3,2} = -0,7/0,2 = -0,7 \cdot 5 = -3,5$$

3107 Ange en funktion som uppfyller att $f'(0) = 2$ och $f''(0) = 4$.

3107. ex.v $f(x) = 2x^2 + 2x$

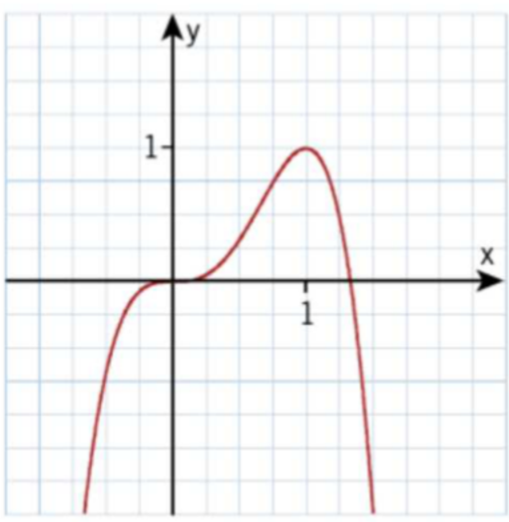
3108 a) Bestäm $\frac{dN}{dt}$ om $N = t^3 \cdot \ln t$.

b) Bestäm y' om $y = \frac{1+x}{1-x}$

3108. a) $\frac{dN}{dt} = 3t^2 \cdot \ln t + t^3 \cdot \frac{1}{t} = \underline{t^2(3\ln t + 1)}$

b) $y' = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \underline{\frac{2}{(1-x)^2}}$

3109 Figuren visar grafen till en tredjegradsfunktion $y = f(x)$.



a) Förklara hur man i figuren kan se att $f'(1) = 0$ och $f'(-0{,}5) > 0$.

b) För vilka x är funktionen växande?

c) För vilka x är funktionen avtagande?

3109.

a) Funktionen har en extrempunkt i $f(1) \Rightarrow f'(1) = 0$

-"- är växande för $x = -0{,}5 \Rightarrow f'(-0{,}5) > 0$

b) $x \leq 1$

c) $x \geq 1$

3110 Bestäm $f''(4)$ exakt om

$f(x) = 1/\sqrt{2x+1}$

3110.

$$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 3(2x+1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$f''(4) = 3 \cdot 9^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{9 \cdot 9 \cdot \sqrt{9}} = \underline{\frac{1}{81}}$$

3111 Låt $f(x) = x \cdot e^x$ och lös ekvationen

a) $f(x) = 0$

b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x) + f(x) = 0$

3111.

a) $x \cdot e^x = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$ (då $e^x \neq 0$)

b) $e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \underline{x = -1}$

c) $e^x(1+x) + xe^x = 0$

$e^x(1+2x) = 0 \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}}$

3112 Undersök om ekvationerna
$f(x) = 0$ och $f'(x) = 0$
har några reella lösningar då
$f(x) = 0{,}5x + 1 + 4{,}5/x$

3112. $0.5x + 1 + \frac{4.5}{x} = 0$

$0.5x^2 + x + 4.5 = 0 \quad , \quad x \neq 0$

$0.5(x^2 + 2x + 9) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ saknar reella lösningar.

$0.5 - \frac{4.5}{x^2} = 0$

$x^2 = 9 \; ; \; x = \pm 3 \Rightarrow f'(x)$ har 2 reella lösningar.

3113 Låt $f(x) = \dfrac{2 - \cos x}{\sin x}$ och lös ekvationen

a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$

3113. a) $\frac{2 - \cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow 2 = \cos x > 1 \Rightarrow$ saknar lösning

b) $\frac{\sin^2 x - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2\cos x}{\sin^2 x}$

$\frac{1 - 2\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow$

$x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

3114 Lös ekvationen $y' = 0$, om

a) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ b) $y = x^2 \cdot \ln x$

3114. a) $y' = \dfrac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{x = \pm 1}$

b) $y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{x = e^{-\frac{1}{2}}}$

3115 Temperaturen i en bastu är $f(t)$ °C vid tiden t timmar efter uppvärmningens början. Man vet att

$f'(t) = e^{-t}(200 - 200t)$

a) När börjar temperaturen att sjunka?

b) Hur förändras temperaturen då $t = 0,50$?

c) Hur förändras temperaturen då $t = 3,0$?

3115. a) Temp. sjunker då $f'(t) < 0 \Rightarrow$

$200 - 200t < 0 \Rightarrow t > 1$ timme.

b) $f'(0,5) = e^{-0,5}(200-100) = 100e^{-0,5} \approx +61$ °C/h.

c) $f'(3) = e^{-3}(200-600) = -400e^{-3} \approx -20$ °C/h.

3116 Låt $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ och visa att y' i förenklad form kan skrivas

$$y' = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

3116.

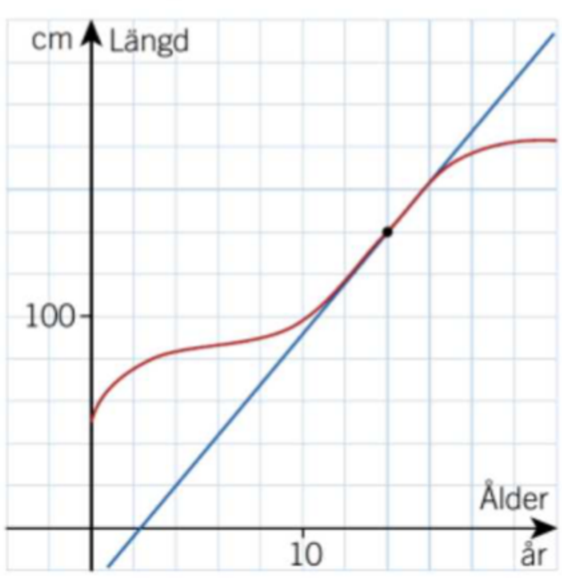
$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin x \cdot \cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2} \quad \#$$

3117 Den röda grafen visar Kalles längd som en funktion av åldern.

Bestäm den inritade tangentens lutning samt ange med enhet vad det beräknade värdet betyder i detta sammanhang.



3117.

$$f'(14) \approx \frac{140}{12} \approx \underline{12 \text{ cm/år}}$$

Kalles längd ökar med 12 cm/år då han är 14 år.

3118 Antag att $g(t)$ är vattenförbrukningen i kubikmeter i en kommun under ett normaldygn och att t är tiden i timmar efter midnatt.

Vad betyder det i detta sammanhang att

a) $g(8) - g(6) = 180$

b) $g(24) = 1\,000$

c) $\frac{g(12) - g(0)}{12} = 40$

d) $g'(8) = 30$?

3118.

a) Vatten förbrukningen mellan kl. 6 och kl. 8 är 180 m^3.

b) Vattenförbrukningen är 1000 m^3 för ett normaldygn.

c) Medelförbrukningen per timme är 40 m^3 under de första 12 timmarna.

d) Vattenförbrukningen är 30 m^3/h kl. 8.

3119 Beräkna $h'(2)$, om
$f'(2) = 4$, $g'(2) = -3$, $f(2) = -1$,
$g(2) = 1$, $f'(1) = 2$ och

a) $h(x) = f(x) + g(x)$
b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
c) $h(x) = f(x)/g(x)$
d) $h(x) = f(g(x))$

3119.

a) $h'(x) = f'(x) + g'(x) \Rightarrow h'(2) = 4 - 3 = \underline{1}$

b) $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow h'(2) = 4 \cdot 1 + (-1)(-3) = \underline{7}$

c) $h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \Rightarrow h'(2) = \dfrac{4 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3)}{1^2} = \underline{1}$

d) $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow h'(2) = 2 \cdot (-3) = \underline{-6}$

3120 Den sträcka $s(t)$ m som ett föremål rör sig på tiden t s beskrivs av formeln

$s(t) = t^3 + 3t \quad 0 \le t \le 4{,}0$

a) Bestäm medelhastigheten i tidsintervallet $1{,}0 \le t \le 3{,}0$.

b) Bestäm hastigheten $s'(t)$ då $t = 2{,}0$.

c) Bestäm accelerationen då $t = 2{,}0$.

d) När är hastigheten 45 m/s?

e) Bestäm accelerationen vid den tidpunkt då hastigheten är 18 m/s.

3120.

a) $s_m = \dfrac{s(3{,}0) - s(1{,}0)}{3{,}0 - 1{,}0} = \dfrac{36 - 4}{2} = \underline{16 \text{ m/s}}$

b) $s'(t) = 3t^2 + 3 \Rightarrow s'(2) = 3 \cdot 2^2 + 3 = \underline{15 \text{ m/s}}$

c) $s''(t) = 6t \Rightarrow s''(2) = 6 \cdot 2 = \underline{12 \text{ m/s}^2}$

d) $3t^2 + 3 = 45 \Rightarrow t = \sqrt{14} \approx \underline{3{,}7 \text{ s}}$

e) $3t^2 + 3 = 18 \Rightarrow t = \sqrt{5} \Rightarrow s''(\sqrt{5}) \approx \underline{13{,}4 \text{ m/s}^2}$

3121 Bestäm derivatan av

$y = (g(x))^{100}$ om $g(x) = 2 + x^4$

3121. $y' = 100 \cdot g(x)^{99} \cdot g'(x) =$

$= 100 \cdot (2 + x^4)^{99} \cdot 4x^3 = \underline{400x^3(2 + x^4)^{99}}$

3122 Visa att för funktionen $f(x)$ gäller

$f'(x) = k \cdot f(x)$.

Vilket värde har k?

a) $f(x) = 6 \cdot e^{x/2}$ b) $f(x) = 3 \cdot 4^x$

3122. a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 6e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot f(x) \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{2}}}$

b) $f'(x) = \ln 4 \cdot 3 \cdot 4^x = \ln 4 \cdot f(x) \Rightarrow \underline{\underline{k = \ln 4}}$

3123 Visa att om $y = \dfrac{\sin(x^2)}{2x}$ så är

$y' + y/x = \cos(x^2)$

3123. $y' = \dfrac{2x \cos x^2 \cdot 2x - 2 \cdot \sin x^2}{4x^2}$

$VL = \dfrac{2x \cos x^2 \cdot 2x - 2 \cdot \sin x^2}{4x^2} + \dfrac{\sin x^2}{2x^2}$

$= \dfrac{2x \cos x^2 \cdot 2x - 2 \cdot \sin x^2 + 2 \sin x^2}{4x^2} = \cos x^2 = HL$ #

3124 Bestäm utan räknare

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi/6 + h) - \cos(\pi/6)}{h}$$

3124. $f(x) = \cos x \quad , \quad x = \frac{\pi}{6}$

$f'(x) = -\sin x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Alt. lösning:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos h - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin h - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos h - 1) - \frac{1}{2}\cdot\sin h}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos h - 1}{h} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin h}{h} \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{-\frac{1}{2}}$$

3125 En svängningsrörelse beskrivs av funktionen
$s = 0{,}045 \cdot \sin 7{,}5t$
där s mäts i m och t i s.
Bestäm de tre första tidpunkterna då
$t > 0$ och
a) hastigheten är noll
b) accelerationen är maximal.

3125. a) $v = s' = k \cdot \cos 7.5t \quad , k > 0$

$v = 0 \Rightarrow \cos 7.5t = 0 \Rightarrow 7.5t = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$t = \frac{\pi}{15} + n \cdot \frac{2\pi}{15}$

$n = 0, 1, 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}, \frac{5\pi}{15} \approx \underline{0.21, 0.63, 1.05 \text{ s}}$

b) $s'' = -l \cdot \sin 7.5t \quad , s''' = -m \cdot \cos 7.5t \quad , s^{(4)} = p \cdot \sin 7.5t$

$l, m, p > 0$

$s''' = 0 \Rightarrow \cos 7.5t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{15} + n \cdot \frac{2\pi}{15}$

$(n=0) \quad s^{(4)}\left(\frac{\pi}{15}\right) = p \cdot \sin \frac{\pi}{2} = p > 0 \Rightarrow$ minimum

$(n=1) \quad s^{(4)}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = p \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -p < 0 \Rightarrow$ maximum $\quad \underline{t_1 = 0.63 \text{ s}}$

$(n=2) \quad s^{(4)}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = p \cdot \sin \frac{5\pi}{2} = p > 0 \Rightarrow$ minimum

$(n=3) \quad s^{(4)}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = p \cdot \sin \frac{7\pi}{2} = -p < 0 \Rightarrow$ maximum $\quad \underline{t_2 = 1.47 \text{ s}}$

$(n=4) \quad s^{(4)}\left(\frac{9\pi}{2}\right) = p \cdot \sin \frac{9\pi}{2} = p > 0 \Rightarrow$ minimum

$(n=5) \quad s^{(4)}\left(\frac{11\pi}{2}\right) = p \cdot \sin \frac{11\pi}{2} = -p < 0 \Rightarrow$ maximum $\quad \underline{t_3 = 2.30 \text{ s}}$

3126 På en obemannad fyr finns en lampa som ger ljusstyrkan L enheter, där

$L = 90 \cdot \ln(0{,}045P)$

om effekten P W varierar i intervallet $200 \leq P \leq 2000$.

Med den använda strömkällan avtar effekten med tiden t i månader enligt ekvationen $P = 2000 - 75t$

Beräkna och tolka $\frac{dL}{dt}$ då strömkällan varit i bruk i 1 år.

3126. $L = 90 \cdot \ln(0{,}045(p(t)))$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{90}{(p(t))} \cdot p'(t) = \frac{90}{2000-75t} \cdot (-75) = -\frac{6750}{2000-75t}$$

$$\frac{dL}{dt}(12 \text{ mån}) = -\frac{6750}{2000-75 \cdot 12} = -6{,}1 \ L/\text{mån}$$, dvs

Ljusstyrkan minskar med 6,1 L enheter per månad.

3127 a) Bestäm numeriskt genom att studera differenskvoten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ett närmevärde, med tre värdesiffror, till $f'(1)$ om $f(x) = 5^x$

b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^7 - 3^7}{h}$ genom att tolka det som värdet av en derivata i en punkt.

3127. a) $$f'(1) \approx \frac{5^{1+0{,}0001} - 5^1}{0{,}0001} \approx \underline{8{,}05}$$

b) $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$

$$f'(3) = 7 \cdot 3^6 = \underline{5103}$$

3128 Visa att den centrala differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

är lika med $f'(x)$ för alla polynom av andra graden.

3128. $f(x) = k \cdot x^2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{2h} =$$

$$= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2 + 2xh - h^2}{2h} = k \cdot \lim_{h \to 0} (2x) = k \cdot 2x$$

3129 Visa att $\frac{dP}{dt} = P(1\,000 - P)$ om

$P = \frac{1\,000}{1 + C \cdot e^{-1\,000t}}$ där C är en konstant.

Låt $q = 1 + C \cdot e^{-1000t} \Rightarrow$

$q' = -1000 C e^{-1000t}$

3129.

$$P = 1000 \cdot (1 + C \cdot e^{-1000t})^{-1} = 1000 \cdot q(t)^{-1}$$

$$VL = \frac{dP}{dt} = -1000 \cdot q(t)^{-2} \cdot q'(t) = \frac{1000^2 C e^{-1000t}}{(1 + C e^{-1000t})^2} =$$

$$= P^2 \cdot C e^{-1000t} = P^2 \cdot \left(\frac{1000}{P} - 1\right) = P(1000 - P) = HL$$

#

3133 Visa med derivatans definition att

a) om $f(x) = k$ där k är en konstant så är $f'(x) = 0$.

b) om $f(x) = kx + m$ där k och m är konstanter så är $f'(x) = k$.

c) om $f(x) = 5x^2 + k$ där k är en konstant så är $f'(x) = 10x$.

3133.

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)+m-(kx+m)}{h} = k$$

c) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)^2+k-(5x^2+k)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5x^2+10xh+h^2-5x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(10x+h) = 10x$$

3134 Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(x)$ då

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$

3134.

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$$

3135 Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(x)$ då $f(x) = \frac{2}{x}$

3135.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x - 2(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{x(x+h)} = -\frac{2}{x^2}$$

3136 Visa med derivatans definition att om $f(x) = ax^2 + bx + c$ där a, b och c är konstanter så är $f'(x) = 2ax + b$.

3136.

$$\lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b) = 2ax + b$$

#

3137 Visa med hjälp av regeln för derivering av en kvot att

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

3137.

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{0 \cdot f'(x) - 1 \cdot f'(x)}{(f(x))^2} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

#

3138 Funktionen f är deriverbar och $f(0) = 0$.
För alla x gäller sambandet
$f(x) + \sin f(x) = x$.
Visa att $f'(0) = \frac{1}{2}$

3138.

$$f'(x) + f'(x) \cdot \cos f(x) = 1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 2f'(0) = 1 \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

3139 a) Visa att om $f(x) = |x|$ så är

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \text{ då } x > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \text{ då } x < 0$$

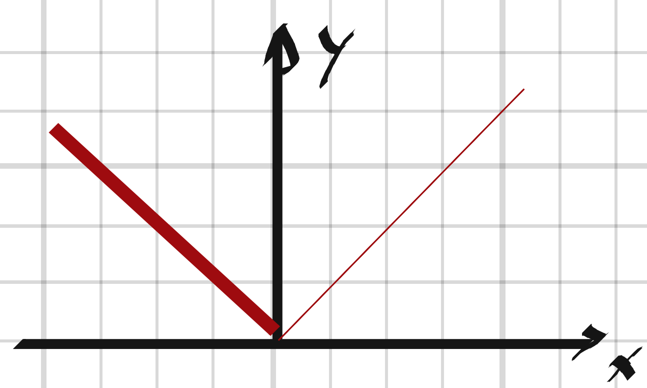
b) Rita grafen till $f(x) = |x|$ och förklara varför funktionen är kontinuerlig men inte deriverbar då $x = 0$.

3139. a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \quad x > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1, \quad x < 0$$

b)



I punkten (0,0) kan man inte avgöra kurvans lutning.

3140 Använd derivatans definition och binomialsatsen för att visa att

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

3140.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{5}{0} \cdot x^5 + \binom{5}{1} x^4 h + \binom{5}{2} x^3 h^2 + \binom{5}{3} x^2 h^3 + \binom{5}{2} x h^4 + \binom{5}{5} h^5 - x^5}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(5x^4 + 10x^3 h + 10x^2 h^2 + 5x h^3 + h^4\right) = 5x^4 \quad \#$$

3141 Visa med derivatans definition att om $f(x) = x\sqrt{x}$ så är

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

Du får använda att $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3141.

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)(x+h)^{1/2} - x \cdot x^{1/2} =$$

$$= (x+h)(x+h)^{1/2} - x(x+h)^{1/2} + x(x+h)^{1/2} - x^{3/2} =$$

$$= (x+h-x)(x+h)^{1/2} + x(x+h)^{1/2} - x^{3/2} =$$

$$= h(x+h)^{1/2} + x\left((x+h)^{1/2} - x^{1/2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)^{1/2} + x\left((x+h)^{1/2} - x^{1/2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (x+h)^{1/2} + \lim_{h\to 0} x \cdot \frac{(x+h)^{1/2} - x^{1/2}}{h} =$$

$$= x^{1/2} + x \cdot D\sqrt{x} = x^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \quad \#$$

3143 Bestäm riktningskoefficienten för

a) tangenten till kurvan $y = x^2 + 3x$ i den punkt på kurvan som har x-koordinaten 1

b) normalen till kurvan $y = x^2 + 3x$ i origo.

3143. a) $y' = 2x + 3$

$k = y'(1) = 2 \cdot 1 + 3 = \underline{5}$

b) $k_n = -\frac{1}{y'(0)} = -\frac{1}{2 \cdot 0 + 3} = \underline{-\frac{1}{3}}$

3144 Bestäm ekvationen för dels tangenten, dels normalen till kurvan

a) $y = x^3 - x$ i punkten där $x = -1$.

b) $y = \frac{1}{x}$ i punkten där $x = 2$.

c) $y = \sqrt{3x + 1}$ i punkten där $x = 5$.

3144. a) $y' = 3x^2 - 1$

$g - y(-1) = y'(-1)(x - (-1))$

$g - 0 = 2(x + 1) \Rightarrow \underline{g = 2x + 2}$

$g_n - 0 = -\frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow \underline{g_n = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

---

b) $y' = -\frac{1}{x^2}$

$h - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow \underline{h = -\frac{1}{4}x + 1}$

$h_n - \frac{1}{2} = 4(x-2) \Rightarrow \underline{h_n = 4x - \frac{15}{2}}$

c) $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$j - 4 = \frac{3}{8}(x-5) \Rightarrow \underline{j = \frac{3}{8}x + \frac{17}{8}}$

$j_n - 4 = -\frac{8}{3}(x-5) \Rightarrow \underline{j_n = -\frac{8}{3}x + \frac{52}{3}}$

3145 a) Bestäm en linjär approximation till

$f(x) = \frac{2}{x} + x$ kring $x = 1$.

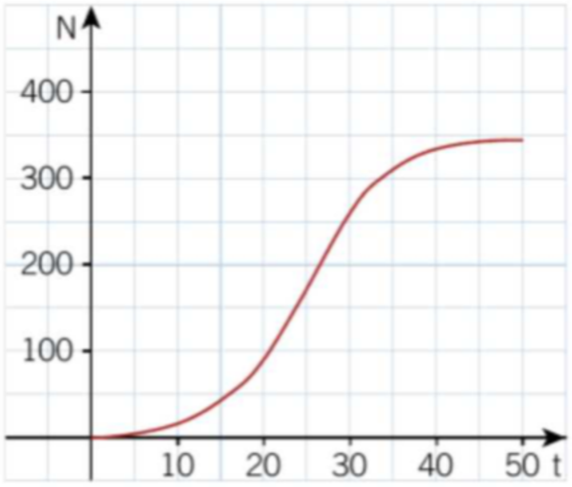
b) Bestäm felet om $f(1,1)$ bestäms med hjälp av approximationen.

3145. a) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 1 \Rightarrow f'(1) = -2 + 1 = -1$

$g - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow \underline{g = -x + 4}$

b) felet $= g(1.1) - f(1.1) = 2{,}9 - 2{,}918 = \underline{-0{,}018}$

3146 Diagrammet visar en matematisk modell för antalet bananflugor N som funktion av tiden t dygn.



a) När är tillväxthastigheten störst och hur stor är den då?

b) Bestäm en linjär approximation till $N(t)$ kring den tidpunkt då tillväxthastigheten är som störst.

3146.

a) Vid $t \approx 25$ dygn då tillväxthastigheten $\approx$

$$\approx \frac{170}{10} = 17 \text{ bananflugor/dygn.}$$

b) $N(25) \approx 175$

$$N - 175 = 17(t - 25) \Rightarrow N = 17t - 250$$

3147 Linjen $y = 2x - 2$ är tangent till kurvan $y = x^2 + ax + b$ i punkten $(3, 4)$. Finn talen a och b.

$y_1' = 2$

3147.

$y' = 2x + a$

$y_1'(3) = 2 \Rightarrow 2 = 2 \cdot 3 + a \Rightarrow \underline{a = -4}$

$y_1(3) = 4 \Rightarrow 4 = 3^2 - 4 \cdot 3 + b \Rightarrow \underline{b = 7}$

3148 a) Bestäm en linjär approximation till funktionen $f(x) = e^{2x} \cdot \sin 3x$ kring $x = 0$.

b) Bestäm, utan räknare, ett närmevärde till $f(0{,}05)$.

3148.

a) $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot 3\cos 3x = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$

$f'(0) = 3$; $f(0) = 0$

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow$

$\underline{y = 3x}$

b) $f(0.05) \approx g(0.05) = 3 \cdot 0.05 = \underline{0.15}$

3149 Ekvationen $\sqrt{1+x} = 0{,}5 - \sin x$ har en lösning nära $x = 0$.

a) Bestäm, utan räknare, ett närmevärde till lösningen med hjälp av två linjära approximationer.

b) Bestäm lösningen grafiskt med hjälp av din räknare.

3149. $f(x) = \sqrt{1+x}$; $g(x) = 0.5 - \sin x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$; $g'(x) = -\cos x$

$f'(0) = 0.5$; $g'(0) = -1$

$f(0) = 1$; $g(0) = 0.5$

$$0.5 \cdot (x-0) + 1 \approx -1(x-0) + 0.5$$

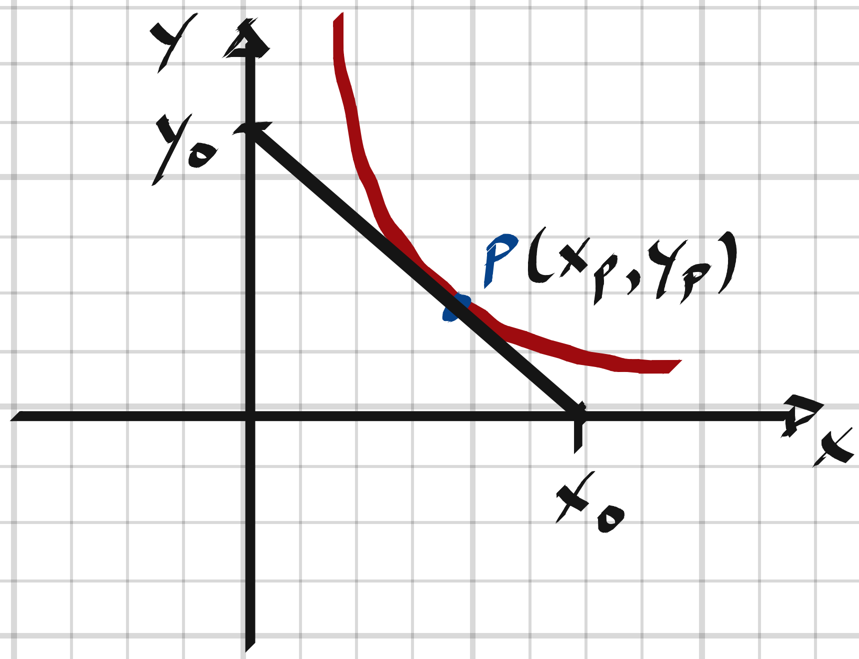
$$1.5x \approx -0.5$$

$$\underline{x \approx -\frac{1}{3} = -0.333}$$

b) <u>Geogebra ger $x \approx -0.326$</u>

3150 I en punkt P på kurvan $y = 4/x$ i första kvadranten dras tangenten. Denna begränsar tillsammans med koordinataxlarna en triangel.

Visa att arean av denna triangel är oberoende av valet av P.



3150.

$$y = \frac{4}{x}$$

$$y' = -\frac{4}{x^2}$$

$$f - y(x_P) = y'(x_P)(x - x_P) \Rightarrow$$

$$f(x) = -\frac{4}{x_P^2}x + \frac{4}{x_P} + \frac{4}{x_P} = -\frac{4}{x_P^2}x + \frac{8}{x_P}$$

i) $-\frac{4}{x_P^2} \cdot x_0 + \frac{8}{x_P} = 0 \Rightarrow x_0 = 2x_P$

ii) $-\frac{4}{x_P^2} \cdot 0 + \frac{8}{x_P} = y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{8}{x_P}$

Triangelarean, $T = \frac{x_0 \cdot y_0}{2} = 2x_P \cdot \frac{8}{x_P}/2 = 8$ a.e.

#

3151 Undersök hur man kan göra en *kvadratisk* approximation $y = g(x)$ till $f(x) = e^x$ kring $x = 0$.

3151. $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

$g'(x) = 2ax + b$

$g''(x) = 2a$

$g''(0) = f''(0) = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$g'(0) = f'(0) = 1 \Rightarrow b = 1$

$g(0) = f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \underline{g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

3152 a) Bestäm en linjär approximation till $f(x) = e^{ax}$ kring $x = 0$.

b) Hastigheten v hos ett fritt fallande föremål med massan m ökar enligt ekvationen

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right)$$

där t är tiden, k en konstant som beror av luftmotståndet och g är tyngdaccelerationen.

Visa med hjälp av approximationen i a) att $v(t) \approx gt$ för små värden på t.

3152. a) $f(x) = e^{ax}$; $f'(x) = ae^{ax}$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 1 = a(x - 0) \Rightarrow \underline{y = ax + 1}$$

b) små $t \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \approx -\frac{k}{m}t + 1 \Rightarrow$

$$v(t) \approx \frac{mg}{k}\left(1 + \frac{k}{m}t - 1\right) = gt \quad \#$$

3155 Låt A vara arean av en cirkel med radien r.

Bestäm ett samband mellan

$\frac{dA}{dt}$ och $\frac{dr}{dt}$

3155. $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \underline{2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}}$$

3156 Låt en kub med kantlängden a cm ha volymen V cm^3.

a) Bestäm ett samband mellan

$\frac{dV}{dt}$ och $\frac{da}{dt}$

b) Anta att kubens volym ökar med 15 cm^3/s. Hur snabbt ökar kubens kantlängd då $a = 25$?

c) Anta att kubens volym minskar med 12 cm^3/s. Hur snabbt minskar kubens kantlängd då $a = 18$?

3156. a) $V = a^3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt} = 3a^2 \cdot \frac{da}{dt}$$

b) $$\frac{da}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{3a^2} = 15 \cdot \frac{1}{3 \cdot 25^2} = 0.008 \text{ cm/s}$$

<u>Kantlängden ökar med 80 µm/s</u>

c) $$\frac{da}{dt} = -12 \cdot \frac{1}{3 \cdot 18^2} = -0,012 \text{ cm/s}$$

<u>Kantlängden minskar med 120 µm/s</u>

3157 En sten kastas i en damm. En cirkulär vågfront sprider sig då över dammen på ett sådant sätt att dess radie ökar med hastigheten 0,90 m/s i det ögonblick radien är 1,20 m.

Hur snabbt ökar arean av det cirkulära området som omsluts av vågen?

3157. $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 = \underline{6{,}8\ m^2/s}$$

3158 Kantlängden i en kub minskar med hastigheten 10 cm/min.

a) Hur snabbt minskar kubens volym, då kantlängden är 20 cm?

b) Hur snabbt minskar kubens totala begränsningsarea då kantlängden är 20 cm?

3158. a) $V = a^3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt} = 3a^2 \cdot \frac{da}{dt} = 3 \cdot 20^2 \cdot (-10) = -12000\ cm^3/min$$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{Minskningen} = 12000\ cm^3/min}$

b) $A = 6a^2$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{da} \cdot \frac{da}{dt} = 12a \cdot \frac{da}{dt} = 12 \cdot 20 \cdot (-10) = -2400\ cm^2/min$$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{Minskningen} = 2400\ cm^3/min}$

3159 En cylindrisk vattentank har höjden 5,0 m och radien 2,0 m. Vatten pumpas in i tanken med hastigheten 75 liter/min.

Hur snabbt stiger vattenytan?

$$V = h \cdot \pi r^2$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dh}{dV} = \frac{1}{\pi r^2}$$

3159.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot 2^2} \cdot 75 \cdot 10^{-3} = \underline{6 \text{ mm/min}}$$

3160 Låt V vara volymen av en kon med basradien r och höjden $6r$.

Bestäm ett samband mellan

$\frac{dV}{dt}$ och $\frac{dr}{dt}$

3160.

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot 6r}{3} = 2\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \underline{6\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}}$$

3161 Radien i en sfärisk ballong ökar med hastigheten 0,30 cm/min. I ett visst ögonblick är radien 4,0 cm.

Hur snabbt ändras då sfärens

a) volym b) area?

3161. a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 4^2 \cdot 0{,}3 = \underline{60{,}3 \text{ cm}^3/\text{min}}$$

b) $$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot 4 \cdot 0{,}3 = \underline{30{,}2 \text{ cm}^2/\text{min}}$$

3162 En sfärisk snöboll smälter på ett sådant sätt att volymen minskar med hastigheten 1,5 cm^3/min.

Hur snabbt minskar diametern i det ögonblick då radien är 6,0 cm?

3162.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

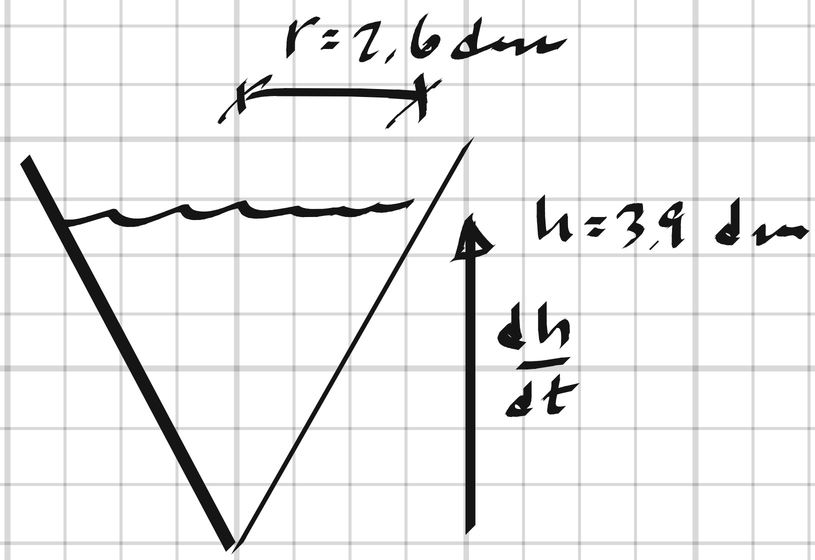
$$\frac{dV}{dD} = \frac{1}{2}\pi D^2$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dV}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi D^2}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi \cdot 12^2}\cdot(-1{,}5) = -6.6\cdot 10^{-3}\ \text{cm/min}$$

Diametern minskar med $6{,}6\cdot 10^{-3}$ cm/min

3163 En vattentank har formen av en kon med spetsen nedåt och basytan horisontell. Tankens basradie är 2,6 dm och höjden 5,2 dm. Vatten pumpas in i tanken med hastigheten 2,6 dm^3/min.

Hur snabbt stiger vattennivån när vattendjupet är 3,9 dm?



3163.

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

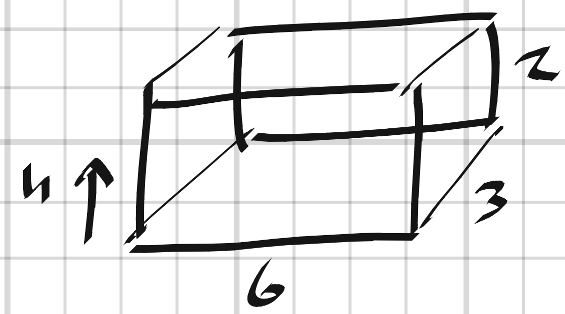
$$r = \frac{2{,}6}{5{,}2}\cdot h = \frac{h}{2} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi h^3}{12}$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi h^2}{4}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\pi\cdot 3{,}9^2}\cdot 2{,}6 = 0{,}22\ \text{dm/min}$$

3164 En vattenbehållare har formen av ett rätblock där basytan har måtten 3,0 dm × 6,0 dm och höjden är 2,0 dm. Vatten läcker ut ur tanken med hastigheten 0,40 liter/min.

Hur snabbt sjunker vattennivån då vattendjupet är 1,0 dm?



3164.

$V = 18h$

$\frac{dV}{dh} = 18$ liter/dm

$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{18} \cdot (-0{,}4) = -0{,}022$ dm/min

Vattennivån sjunker 2,2 mm/min

3165 I en kaffemaskin rinner kaffe från det koniska filtret ner i en cylindrisk kaffebehållare med hastigheten 150 cm³/min.

Hur snabbt ökar nivån i kaffebehållaren och hur snabbt sjunker nivån i filtret när kaffet i filtret har höjden 12,5 cm?

3165.

Filtret: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

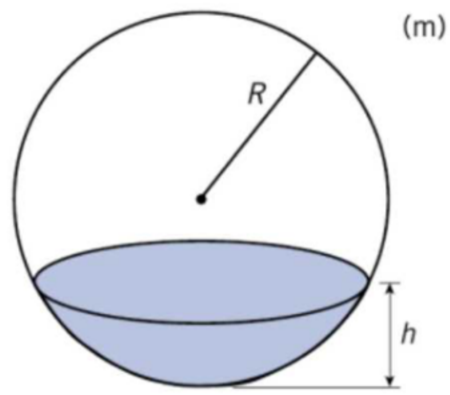
$r = \dfrac{h}{2} \Rightarrow V = \dfrac{\pi h^3}{12} \Rightarrow \dfrac{dV}{dh} = \dfrac{\pi h^2}{4}$

$\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{dh}{dV} \cdot \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{\pi h^2} \cdot \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{\pi \cdot 12{,}5^2} \cdot (-150) = \underline{-1{,}22 \text{ cm/min}}$

Behållaren: $V = \pi r^2 h \Rightarrow \dfrac{dV}{dh} = \pi r^2$

$\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{dh}{dV} \cdot \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{\pi r^2} \cdot \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{\pi \cdot 7{,}5^2} \cdot 150 = \underline{0{,}85 \text{ cm/min}}$

3166 En sfärisk oljetank med radien R m är fylld med olja till en höjd av h m (se figur).



Olja pumpas in i tanken med hastigheten 25 l/min.

Med vilken hastighet stiger oljenivån då $h = 0{,}5$ om $R = 5{,}0$?

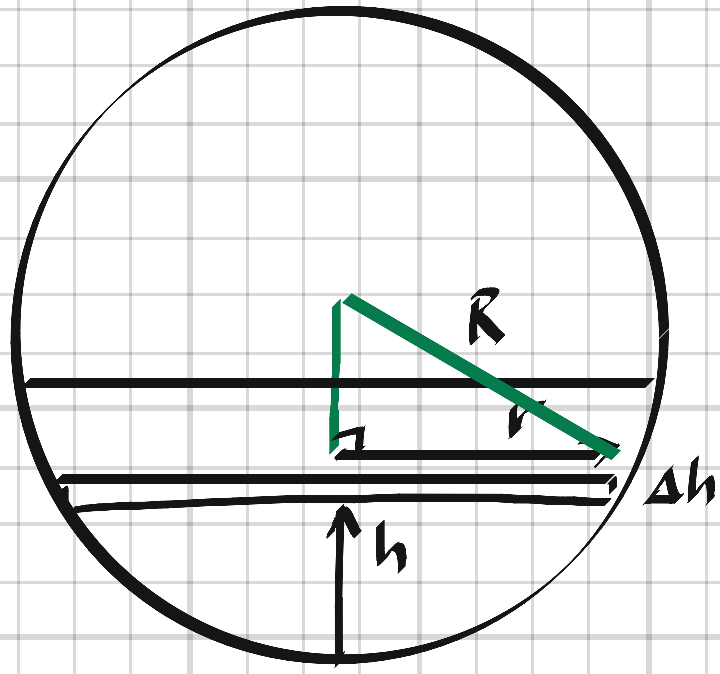
Bestäm detta genom

a) att betrakta en cylindrisk skiva med höjden Δh och volymen ΔV.

b) att använda formeln

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

för oljans volym V m^3.



3166. a) $r^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$

$$\Delta V = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta h = \pi(2Rh - h^2)\cdot \Delta h$$

$$\frac{dh}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta V}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{\pi(2Rh - h^2)}\cdot\frac{dV}{dt} =$$

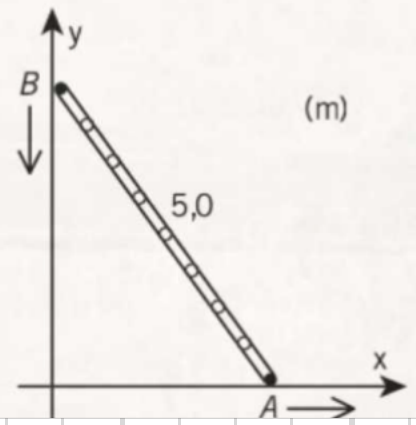
$$= \frac{1}{\pi(2\cdot 5\cdot 0{,}5 - 0{,}5^2)}\cdot 25\cdot 10^{-3} = \underline{1{,}7 \text{ mm/min}}.$$

b) $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) \Rightarrow \frac{dV}{dh} = 2\pi Rh - \pi h^2 = \pi(2Rh - h^2)$

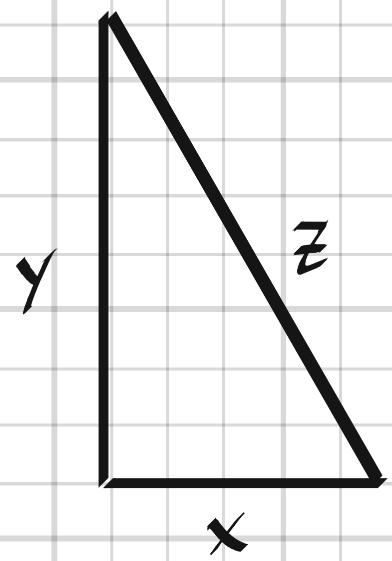
$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi(2Rh - h^2)}\cdot\frac{dV}{dt} = \underline{1{,}7 \text{ mm/min}}.$$

En stege AB som är 5,0 m lång står lutad mot en vägg som figuren visar. Fotpunkten A glider horisontellt med hastigheten 0,60 m/s.

Hur snabbt rör sig stegens topp B nedåt när A är 3,0 m från väggen?



3167.



$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

$$0 = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

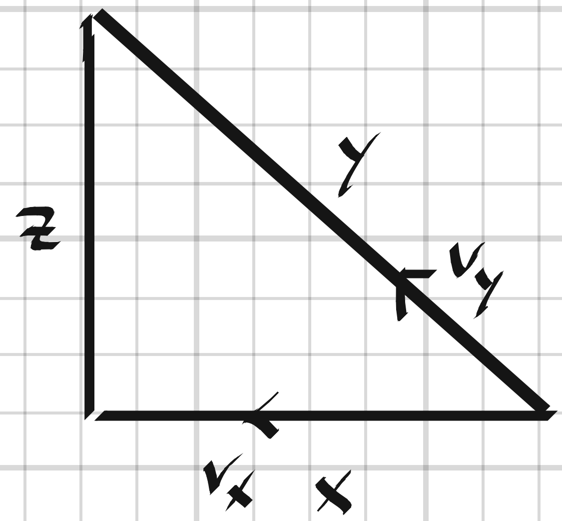
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{z^2 - y^2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} \cdot 0{,}6 = -0{,}45 \text{ m/s}$$

3168

En fiskare befinner sig på en klippa 25 m över vattennivån. Han vevar in fisken med hastigheten 1,5 m/s.

Hur snabbt rör sig fisken då linan är 40 m?

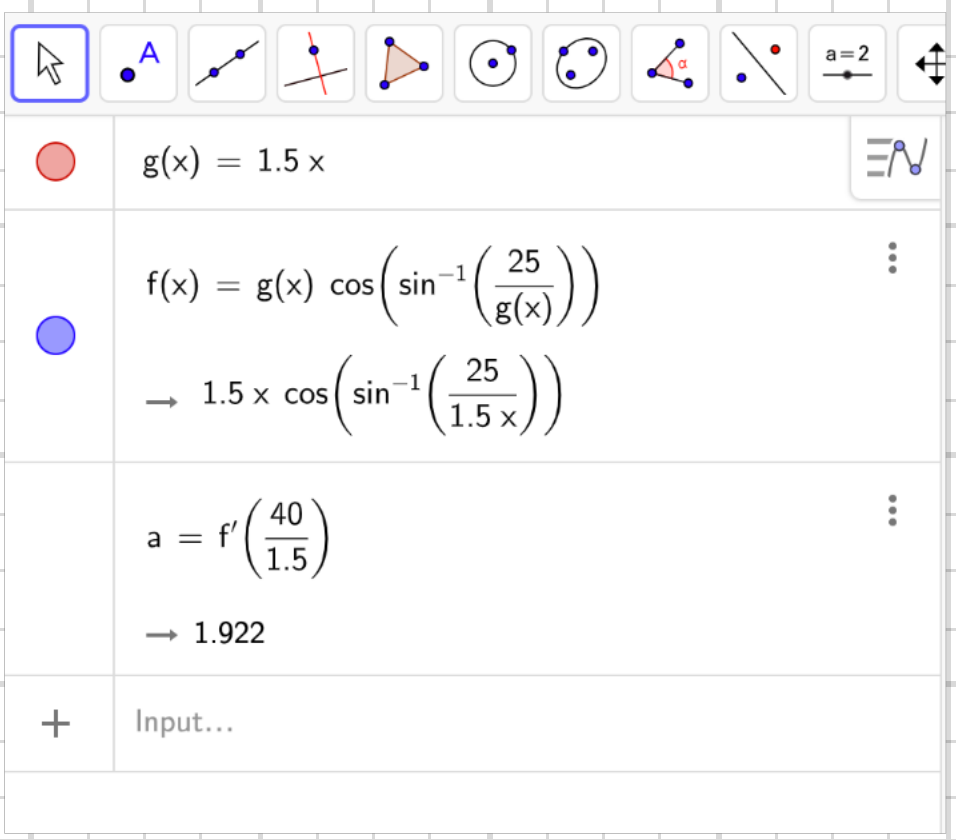


3168. $y^2 = x^2 + z^2 \Rightarrow$

$$2y \cdot \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \qquad (z^2 \text{ konstant})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{40}{\sqrt{40^2 - 25^2}} \cdot 1,5 = \underline{1,9 \text{ m/s}}$$

Alt. lösning Geogebra:



x = tiden

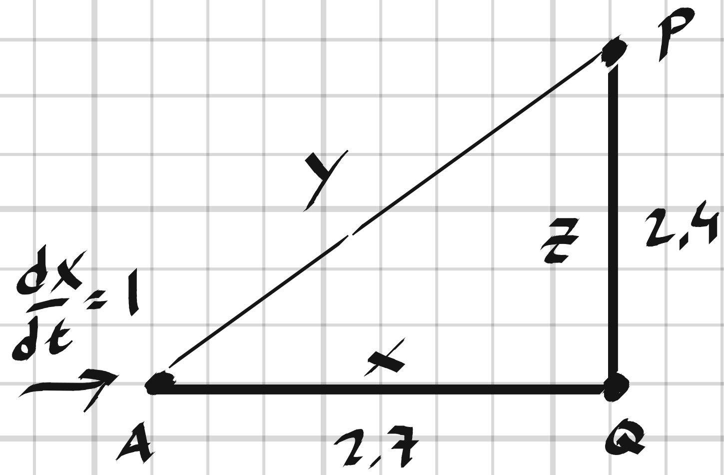
g(x) = längd i y-led (hypotenusan)

f(x) = längd i x-led

$\frac{40}{1.5}$ = tiden vid 40 m

3169 En apparat A rör sig på ett löpande band med hastigheten 1,0 m/s. En robotarm P befinner sig 2,4 m rakt över punkten Q på bandet.

Hur ändras avståndet PA då $AQ = 2,7$ m?



3169.

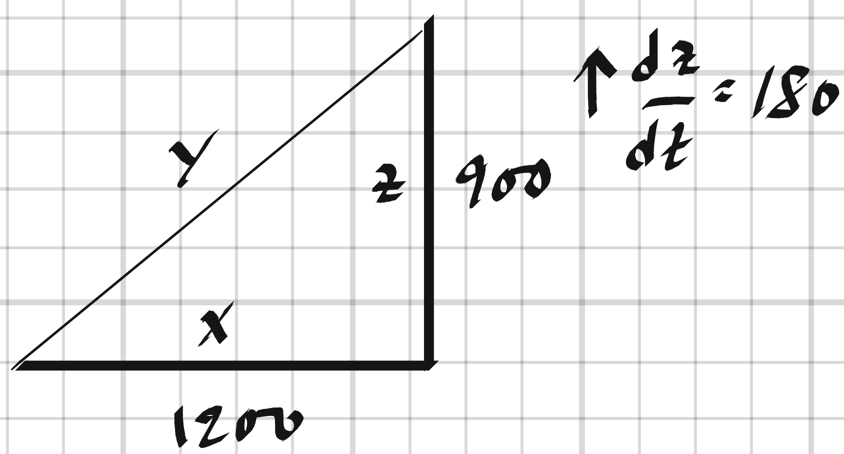
$$y^2 = x^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{2,7}{\sqrt{2,7^2+2,4^2}}\cdot 1 = 0,75 \text{ m/s}$$

3170 En person ser en raketuppskjutning på avståndet 1 200 m. När raketen når höjden 900 m är dess hastighet 180 m/s.

Hur snabbt ändras i detta ögonblick avståndet mellan iakttagaren och raketen?



$$y^2 = x^2 + z^2$$

$$2y\cdot\frac{dy}{dt} = 2z\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{z}{y}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{900}{\sqrt{1200^2+900^2}}\cdot 180 = 108 \text{ m/s}$$

3171 Om två resistanser på x ohm och z ohm parallellkopplas, kan ersättnings-resistansen y ohm beräknas med formeln

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

Om vi parallellkopplar två resistanser och vet att resistansen för den ena ökar med 4,0 ohm/min och för den andra minskar med 6,0 ohm/min, hur förändras ersättningsresistansen då $x = z = 40$?

$$y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^{-1} = \left(\frac{x+z}{xz}\right)^{-1}$$

$$y = \frac{xz}{x+z}$$

3171. $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow$

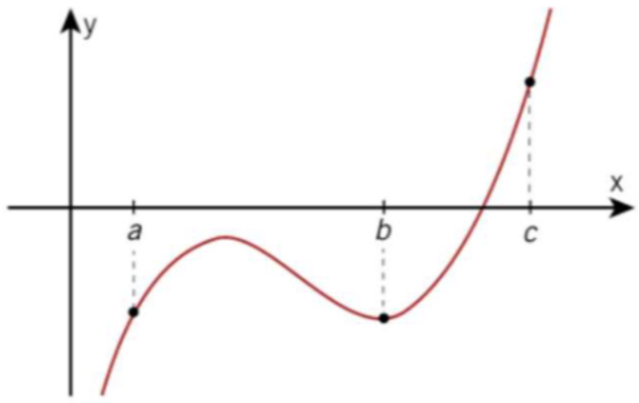
$$-\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{xz}{x+z}\right)^2\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{40^2}{40+40}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{40^2} \cdot 4 - \frac{1}{40^2} \cdot 6\right) = 400 \cdot \frac{-2}{1600} = -\frac{2}{4} = -0{,}5 \ \Omega/\text{min}$$

Ersättningsresistansen minskar med 0,5 Ω/min

3204 Figuren visar grafen till funktionen
$y = f(x)$



Är det sant att

a) både $f'(a)$ och $f'(c)$är positiva

b) $f'(b) = 0$ och $f''(b) > 0$

Motivera dina svar.

3204.

a) Ja, bägge punkterna ligger på en växande funktionsdel.

b) Ja, punkten ligger på ett minimum.

3205 För funktionen $y = f(x)$ vet vi att
$f(2) = 5 \qquad f'(2) = 0 \qquad f''(2) = -3.$
Är $f(2)$ ett maximi- eller minimivärde?
Motivera ditt svar.

3205. $f(2)$ är ett maxvärde, då förstaderivatan är noll och andraderivatan negativ.

3206 För en tredjegradsfunktion som är definierad för alla x gäller

x		0		3	
y'	+	0	–	0	+

a) För vilka x är funktionen avtagande?

b) För vilka x är funktionen växande?

c) Vilket x-värde ger ett minimum?

d) Vilket x-värde ger ett maximum?

3206. a) $0 \le x \le 3$ c) $x = 3$

b) $x \le 0$, $x \ge 3$ d) $x = 0$

3207 För $y = g(x)$ vet vi att $g'(x) = x(x-3)$.

a) Är $g(0)$ ett maximi- eller minimivärde?

b) Är $g(3)$ ett maximi- eller minimivärde?

3207. $g''(x) = 2x - 3$

a) $g''(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow g(0) =$ maxvärde

b) $g''(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow g(0) =$ minvärde

---

3208 Var är funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

a) växande b) avtagande?

3208. $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right) = 3(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow$ Extremvärden då $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2}{3}$

x		-2		$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$- \cdot - = +$

$+ \cdot - = -$

$+ \cdot + = +$

a) $x \leq -2$, $x \geq \frac{2}{3}$

b) $-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$

3209 Ge ett exempel på en funktion som för $x > 0$ har positiv andraderivata men är avtagande.

3209. ex.v. $f(x) = e^{-x}$

3210 Bestäm med hjälp av andraderivatan eventuella extremvärden (max och min) till funktionen $y = -x^3 + 12x$.

3210. $y' = -3x^2 + 12$

$y'' = -6x$

$y' = 0 \Rightarrow$ Extremvärden då $x = \pm 2$

$y''(-2) > 0 \Rightarrow$ minvärde $y(-2) = -(-2)^3 + 12 \cdot (-2) = -16$

$y''(2) < 0 \Rightarrow$ maxvärde $y(2) = -2^3 + 12 \cdot 2 = 16$

3211 För vilket värde på x har funktionen
$y = 5x^3 - 4x^2 - 12x - 25$
ett lokalt minimum?

3211. $y' = 15x^2 - 8x - 12 = 15\left(x^2 - \frac{8}{15}x - \frac{12}{15}\right) =$

$= 15\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{6}{5}\right)$

$y' = 0 \Rightarrow$ Extremvärden då $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{6}{5}$

$y'' = 30x - 8$

$y''(x_1) = y''\left(-\frac{2}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ maximum

$y''(x_2) = y''\left(\frac{6}{5}\right) > 0 \Rightarrow$ minimum $\Rightarrow$

Funktionen har minimum för $x = \frac{6}{5}$

3212 Funktionen f definieras genom

$f(x) = x^3 + 6x^2$

a) Bestäm lokala maximi-och minimipunkter.

b) Bestäm största och minsta värde i intervallet $-2 \le x \le 2$.

3212. $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ Extremvärden då $x_1 = 0,\ x_2 = -4$

a) $f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$

$f''(x_1) = f(0) > 0 \Rightarrow$ Minpunkt i $(0, f(0)) = (0,0)$

$f''(x_2) = f(-4) < 0 \Rightarrow$ Maxpunkt i $(-4, f(-4)) = (-4, 32)$

b) $f(-2) = (-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 = -8 + 24 = 16$

$f(2) = 2^3 + 6\cdot 2^2 = 8 + 24 = 32$

$-2 \le x \le 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Största värde} = 32 \text{ då } x = 2 \\ \text{Minsta värde} = 0 \text{ då } x = 0 \end{cases}$

3213 Funktionen $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$ är definierad för $-1 \le x \le 3$.

Rita funktionskurvan och ange funktionens största och minsta värde i intervallet.

3213. $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ Extremvärden för $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(x_1) = f''(-2) > 0 \Rightarrow$ Minvärde $f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 8 = -8$

$f''(x_2) = f''(0) < 0 \Rightarrow$ Maxvärde $f(0) = 8$

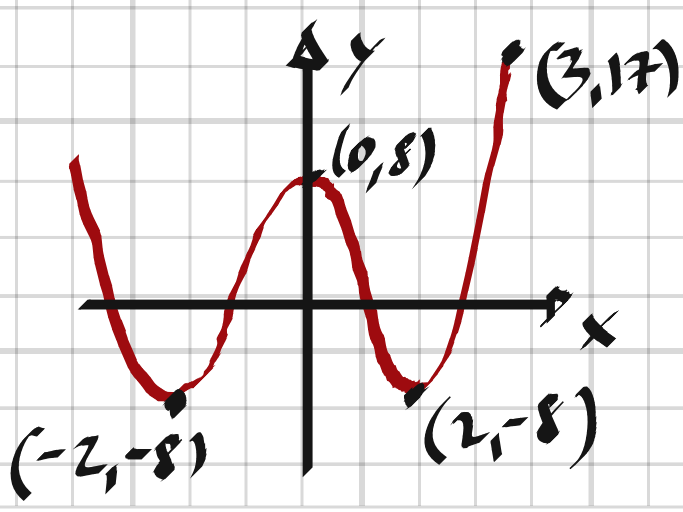
$f''(x_3) = f''(2) > 0 \Rightarrow$ Minvärde $f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 8 = -8$

Ändpunkter:

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ Maxvärde $f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + 8 = 1$

$f''(3) > 0 \Rightarrow$ Minvärde $f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + 8 = 17$

$-1 \le x \le 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{Största värde} = 17 & \text{då } x = 3 \\ \text{Minsta värde} = -8 & \text{då } x = 2 \end{cases}$



3214 Rita kurvan $y = x^4 - 2x^2 + 2$ genom att använda derivata.

3214. $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

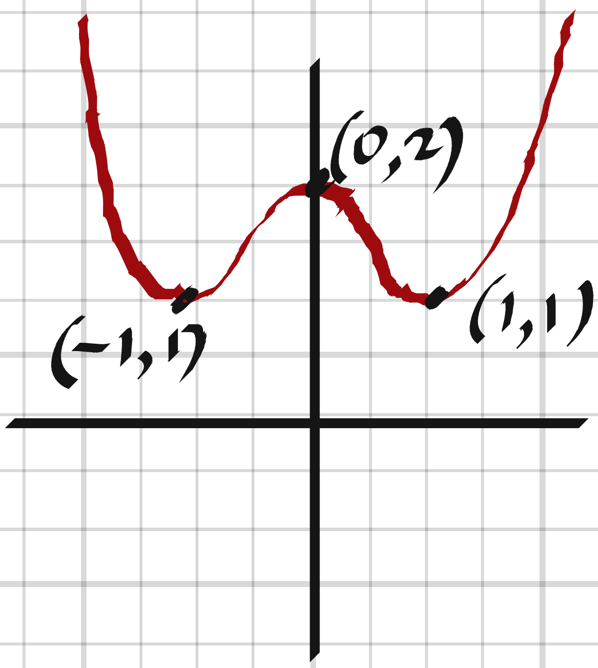
$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

$y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$

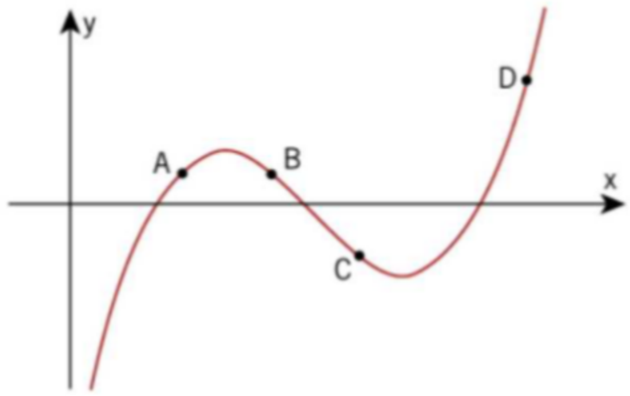
$y''(x_1) = y''(-1) > 0 \Rightarrow$ Minpunkt i $(-1, y(-1)) = (-1, 1)$

$y''(x_2) = y''(0) < 0 \Rightarrow$ Maxpunkt i $(0, y(0)) = (0, 2)$

$y''(x_3) = y''(1) > 0 \Rightarrow$ Minpunkt i $(1, y(1)) = (1, 1)$



3215 I vilken eller vilka av de markerade punkterna är $f(x) \cdot f'(x) > 0$?



3215.

A: $+ \cdot + = +$

B: $+ \cdot - = -$

C: $- \cdot - = +$

D: $+ \cdot + = +$

$\Rightarrow$ $f(x) \cdot f'(x) > 0$ i punkterna A, C och D

3216 Bestäm extremvärdena för $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$

3216.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}},\ k = 0, 1, 2$$

Endast en reel rot i $x = 1$ $\Rightarrow$ Extremvärde då $x = 1$.

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = f''(1) > 0 \Rightarrow \text{Minvärde } f(1) = 5$$

3217 Skissa en tänkbar graf till en funktion $y = f(x)$ för vilken

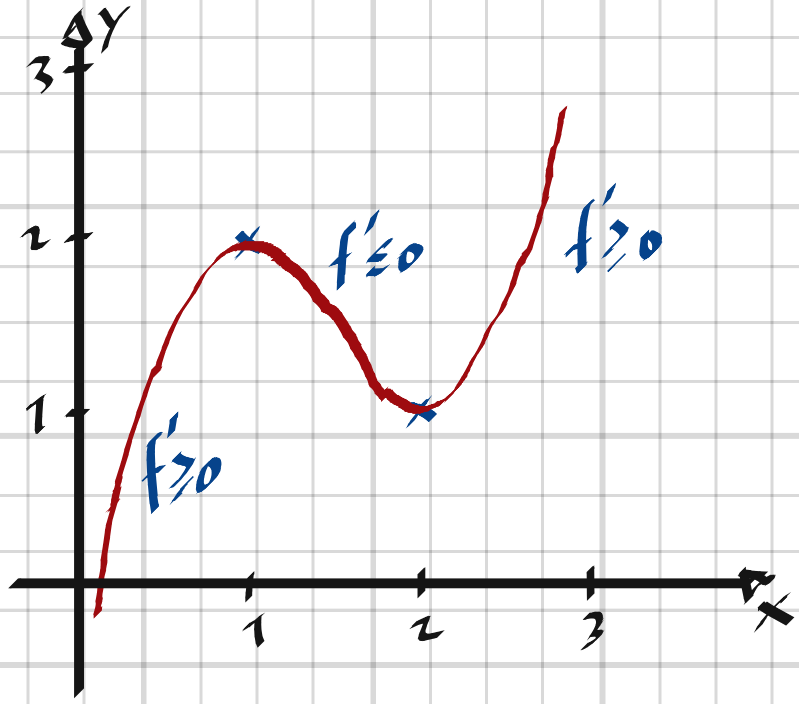
$f(1) = 2$ och $f(2) = 1$

$f'(x) \geq 0$ för $x \leq 1$ och för $x \geq 2$

$f'(x) \leq 0$ för $1 \leq x \leq 2$

Vi förutsätter att $y = f(x)$ har derivata för alla x.

3217.



3218 I vilket intervall är $y = \dfrac{e^x}{x+2}$ växande?

a) Använd en grafisk metod.

b) Använd en metod med derivata.

3218. a) Geogebra:

b) $$y' = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1$

$y'(x < -1) < 0$, $y'(x > -1) > 0$ $\Rightarrow$ Funktionen växande för $x > -1$

3219 Strömstyrkan i A i en krets varierar med tiden t s enligt ekvationen
$i = 4{,}4 + 2{,}5 \sin(50\pi t)$,
där $t > 0$

a) Ange största värde på i.

b) Ange minsta värde på i.

c) Ange det minsta t för vilket $i = 5{,}5$.

3219. a) Största värde $= 4.4 + 2.5 = \underline{6.9 \text{ A}}$

b) Minsta värde $= 4.4 - 2.5 = \underline{1.4 \text{ A}}$

c) $5.5 = 4.4 + 2 \cdot \sin(50\pi t)$

$\sin(50\pi t) = 0.55 \Rightarrow$

$50\pi t = 0.5824 + n \cdot 2\pi$

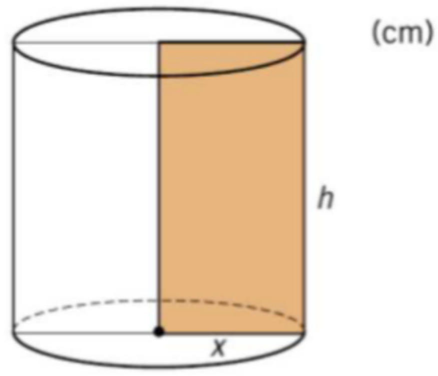
$\underline{t = 3.7 \text{ ms} \text{ då } n = 0}$

3220 En rektangel med sidorna x cm och h cm har omkretsen 24 cm. Om rektangeln får rotera kring en av sina sidor alstras en cylinder med volymen y cm^3 (se figuren).

a) Uttryck y som en funktion av x.

b) Ange funktionens definitionsmängd.

c) Bestäm såväl exakt som med tre värdesiffror den största volym som cylindern kan anta.



$2x + 2h = 24 \Rightarrow$

$h = 12 - x$

3220. a) $y(x) = \pi x^2 \cdot h = \pi x^2 (12 - x) = \underline{\pi(12x^2 - x^3)}$

b) $\underline{0 < x < 12}$

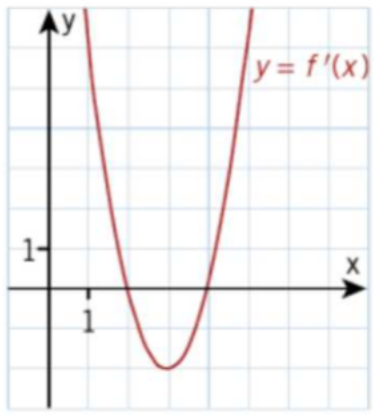
c) $y' = \pi(24x - 3x^2) = 3\pi x(8 - x)$

$y' = 0,\ x \neq 0 \Rightarrow x = 8$

$y'' = \pi(24 - 6x) = 6\pi(4 - x)$

$y''(8) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Maxvärde } y(8) = 256\pi \approx 804 \text{ cm}^3}$

3221 Figuren visar grafen till derivatan av $f(x)$



a) För vilket eller vilka x har kurvan $y = f(x)$ en minimipunkt?

b) För vilka x är andraderivatan negativ?

c) Har andraderivatan $f''(x)$ något nollställe?

d) Har funktionen $f(x)$ något nollställe?

Motivera dina svar.

3221. a) $x = 4$, f' växlar från $-$ till $+$ vid $x=4$

b) $x < 3$, f' avtagande för $x<3$

c) $x = 3$, där f' har en extrempunkt

d) 1, 2 eller 3 , f är en tredjegradsfunktion

3222 Ange i exakt form koordinaterna för eventuella maximipunkter på kurvan
$y = 2\sin x - x$
i intervallet $0 \le x \le 2\pi$.

3222. $y' = 2\cos x - 1$

$y' = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$0 \le x \le 2\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}, \; x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

$y'' = -2\sin x$

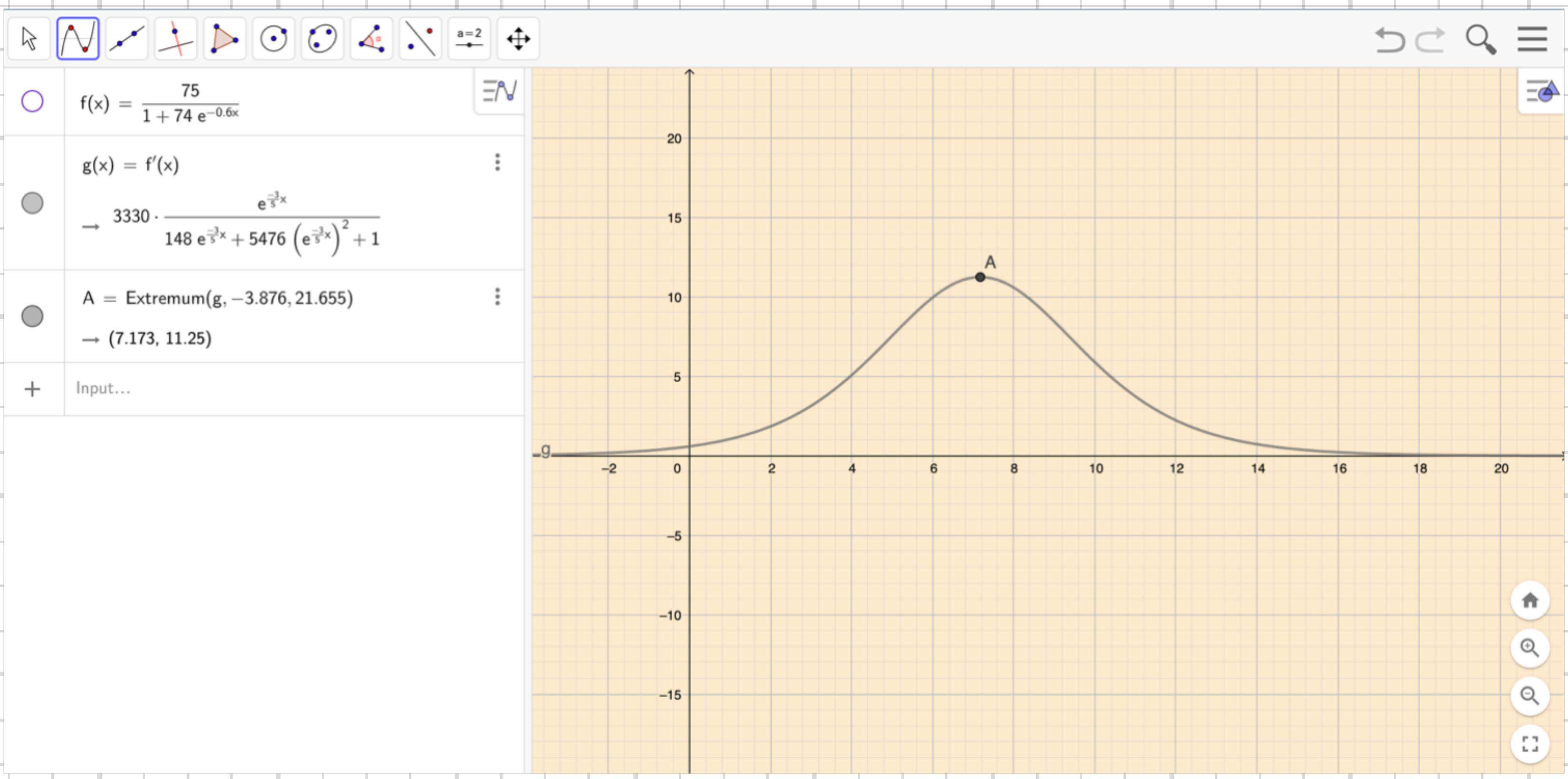
$y''(x_1) = y''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ Maxpunkt $\left(\frac{\pi}{3}, y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

$y''(x_2) = y''\left(\frac{5\pi}{3}\right) > 0 \Rightarrow$ Minpunkt

$0 \le x \le 2\pi \Rightarrow$ En maxpunkt $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

3223 Bestäm det x-värde för vilket derivatan till $y = \dfrac{75}{1 + 74e^{-0{,}6x}}$ antar sitt största värde.

3223. Geogebra ger $x = 7{,}17$



3224 I en rak cirkulär kon med basradien x cm, höjden h cm och volymen y cm^3 är summan av höjden och basdiametern 12 cm. Bestäm konens maximivolym.

$h + 2r = 12 \Rightarrow h = 12 - 2r$

3224 $y(r) = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi r^2(12-2r)}{3} = \pi\left(4r^2 - \dfrac{2r^3}{3}\right)$

$y'(r) = \pi(8r - 2r^2) = 2\pi r(4-r)$

$y' = 0,\ r \neq 0 \Rightarrow r = 4$ cm

$y''(r) = \pi(8-4r) = 4\pi(2-r)$

$y''(4) < 0 \Rightarrow$ Maxvärde $V(4) = \dfrac{\pi \cdot 4^2(12-2\cdot 4)}{3} = 67$ cm^3

3225 Bestäm konstanten a så att $f(x) = x^2 + a/x$ får ett lokalt minimum för $x = 2$.

3225. $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{a}{2}$

$x = 2 \Rightarrow 2^3 = \frac{a}{2} \Rightarrow \underline{a = 16}$

3226 Vattendjupet y m vid en hamninfart t h efter midnatt ges av ekvationen $y = 10 + 3\cos kt$, där k är en konstant.

a) Ange vattendjupet vid lågvatten respektive vid högvatten.

b) Beräkna och tolka största värdet för y' om tiden mellan lågvatten och högvatten är 6 timmar.

3226. a) $\underline{y_{lågv} = 10 - 3 = 7 \text{ m}}$

$\underline{y_{högv} = 10 + 3 = 13 \text{ m}}$

b) $y' = -3k \sin kt$

$k = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2 \cdot 6 = 12 \text{ h} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$y' = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot t \Rightarrow y'_{max} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

<u>Vattnet stiger/sjunker med maxhastigheten $\frac{\pi}{2}$ m/h.</u>

3227 Sök eventuella extremvärden till

a) $y = x^2 \cdot \ln x$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

3227. a) $y' = 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)$

$y' = 0$, $x \neq 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

Extremvärdet $f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot x - (x-1)^{1/2}}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Rightarrow$

$x = 2(x-1) \Rightarrow x = 2$

Extremvärdet $f(2) = \dfrac{\sqrt{2-1}}{2} = \dfrac{1}{2}$

3228 Undersök hur antalet rötter till ekvationen $2x^3 - 3x^2 + 1 + a = 0$ varierar med talet a.

3228. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 + a$

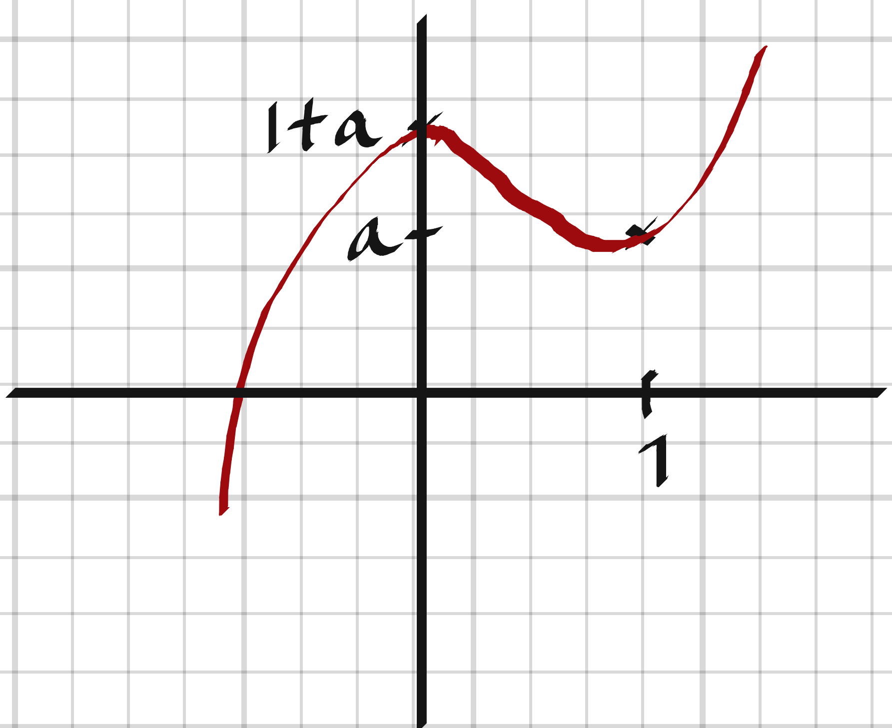
$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 1$

$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x-1)$

$f''(x_1) = f''(0) < 0 \Rightarrow$ Maxpunkt $(0, f(0)) = (0, 1+a)$

$f''(x_2) = f''(1) > 0 \Rightarrow$ Minpunkt $(1, f(1)) = (1, a)$



$a > 0 \Rightarrow$ 1 nollställe

$a = 0 \Rightarrow$ 2 nollställen

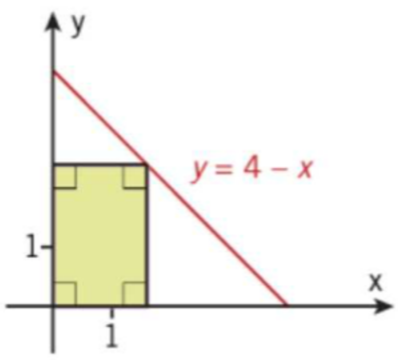
$-1 < a < 0 \Rightarrow$ 3 nollställen

$a = -1 \Rightarrow$ 2 nollställen

$a < -1 \Rightarrow$ 1 nollställe

3229 Figuren visar en del av den räta linjen $y = 4 - x$. Vid rotation kring x-axeln alstrar figurens rektangel en cylinder.

Beräkna maximivärdet för cylinderns volym.



3229. $V(x) = \pi(4-x)^2 \cdot x = \pi(x^3 - 8x^2 + 16x)$

$V'(x) = \pi(3x^2 - 16x + 16) = 3\pi\left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3}\right) =$

$= 3\pi(x-4)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

$V'(x) = 0$, $x \neq 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$V''(x) = \pi(6x - 16)$

$V''\left(\frac{4}{3}\right) = \pi(8 - 16) < 0 \Rightarrow$ Maxvärde $f\left(\frac{4}{3}\right) = 9{,}48\pi \approx 29{,}8$ v.e.

3230 Bestäm konstanterna a och b så att

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

har ett lokalt maximum för $x = -1$
och ett lokalt minimum för $x = 3$.

3230. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3}\right)$

Extrempunkter för $x = -1$ och $x = 3$ $\Rightarrow$

$f'(x) = (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow$

$$(x+1)(x-3) = x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3}$$

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2a}{3} = -2 \Rightarrow a = -3$$

$$\frac{b}{3} = -3 \Rightarrow b = -9$$

<u>Kontroll:</u> $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow 2a - 6 < 0 \Rightarrow a < 3$

$f''(3) > 0 \Rightarrow 18 + 2a > 0 \Rightarrow a > -9$

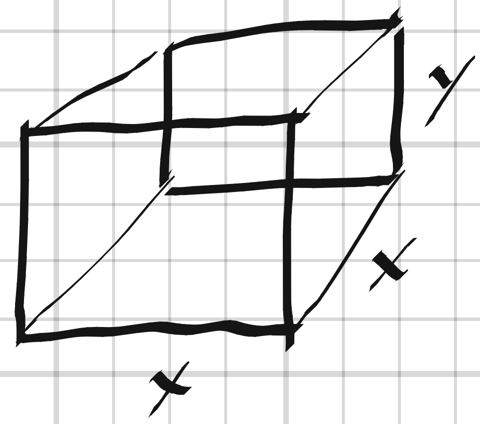
$\Rightarrow -9 < a < 3$

$a = -3$ ok!

Konstanterna $a = -3$ och $b = -9$

3231 Ett företag ska tillverka små burkar med volymen 900 cm^3. Burkarna ska vara utan lock och ha formen av ett rätblock med kvadratisk bottenyta. Materialet till sidoytorna kostar dubbelt så mycket per cm^2 som materialet till botten.

Vilka dimensioner på burken ger lägsta möjliga materialkostnad?



3231. $V = x^2 y = 900$

Antag kostnad/cm^2 för botten = 1 $\Rightarrow$
kostnad/cm^2 för sidoytorna = 2

$$K(x) = x^2 \cdot 1 + 4xy \cdot 2 = x^2 + \frac{8 \cdot 900}{x}$$

$$K'(x) = 2x - \frac{7200}{x^2}$$

$$K' = 0 \Rightarrow x^3 = 3600 \Rightarrow x = 3600^{1/3} e^{i \cdot k \cdot 2\pi}, \; k = 0, 1, 2$$

En reell lösning $x = 3600^{1/3} \approx 15{,}33$

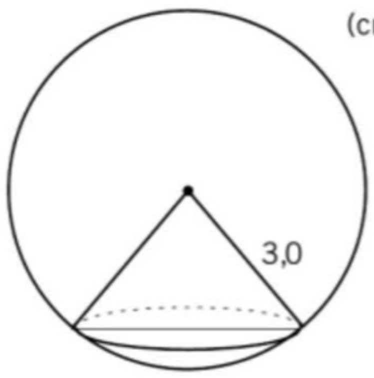
$$K''(x) = 2 + \frac{14400}{x^3} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$y = \frac{900}{x^2} \approx \frac{900}{15{,}33^2} = 3{,}83$$

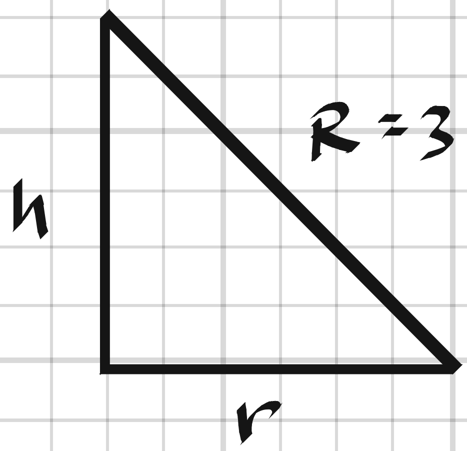
Dimensionerna $x \times x \times y = 15{,}3 \times 15{,}3 \times 3{,}8$ cm

3232 I ett klot med radien 3,0 cm placeras en rak cirkulär kon med spetsen i klotets medelpunkt och basytans periferi på klotytan (se figur).

Bestäm konens maximivolym.



$$V = \frac{bh}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



3232. $r^2 = R^2 - h^2 \Rightarrow$

$$V(h) = \frac{\pi(R^2 - h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(9h - h^3)$$

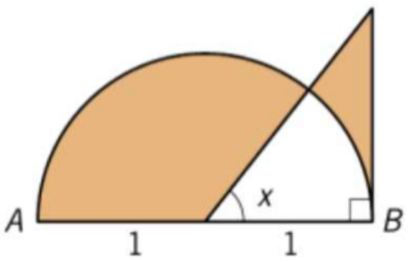
$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(9 - 3h^2) = \pi(3 - h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow h = \pm\sqrt{3}$$

$$V''(h) = -2\pi h$$

$V''(\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ Maxvärde $V(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}(9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = 2\pi\sqrt{3} \approx 11\ \text{cm}^3$

3233



I figuren är *AB* diameter i en halvcirkel med radien 1 l.e.

För vilket värde på vinkeln *x* är de färgade områdenas sammanlagda area minst?

Cirkelsektorns area =

$$= \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}$$

3233. $h = \tan x$

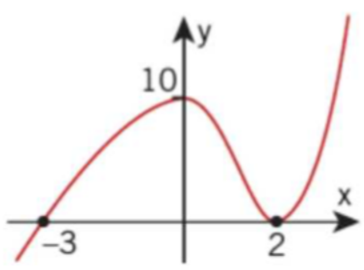
$$A(x) = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} + \frac{1 \cdot \tan x}{2} - 2 \cdot \frac{x}{2}$$

$$A'(x) = 0 + \frac{1 + \tan^2 x}{2} - 1 = \frac{\tan^2 x - 1}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \underline{x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$$

3234 Grafen till ett tredjegradspolynom skär koordinataxlarna som figuren visar.

Bestäm polynomet.



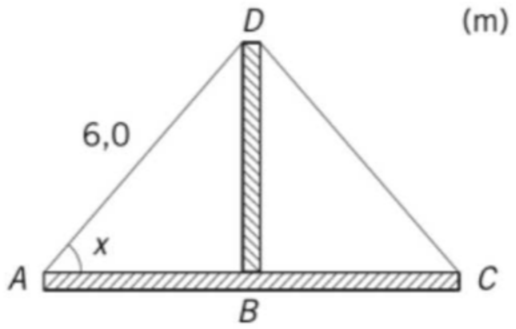
3234 $p(x) = k(x+3)(x-2)^2$

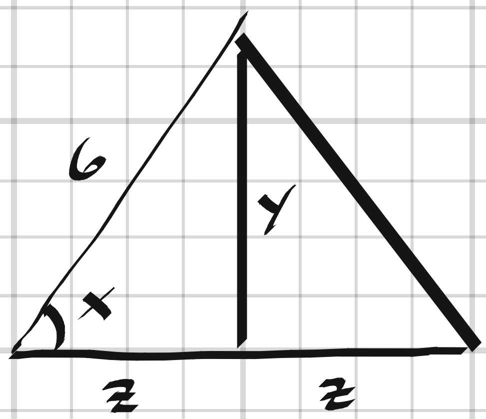
$$p(0) = 10 \Rightarrow k \cdot 3 \cdot (-2)^2 = 10 \Rightarrow k = \frac{5}{6}$$

$$\underline{p(x) = \frac{5}{6}(x+3)(x-2)^2}$$

3235 Figuren visar en takkonstruktion, där AC och BD är två bjälkar.

Vilken är den största sammanlagda längden av dessa två bjälkar?





$z = 6\cos x$

$y = 6\sin x$

3235. $L = 2z + y$

$L = 12\cos x + 6\sin x$

$L' = -12\sin x + 6\cos x$

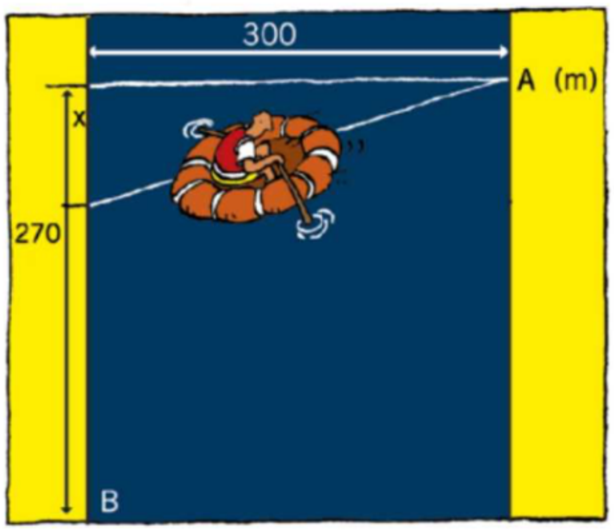
$L' = 0 \Rightarrow 2\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0{,}464$

$L''(x) = -12\cos x - 6\sin x$

$L''(0{,}464) = -13{,}4 < 0 \Rightarrow$ Maxlängden $= L(0{,}464) = 13{,}4$ m

3236 En person befinner sig med en liten, bärbar gummibåt i punkten *A* på ena sidan av en sjö med parallella stränder. Han ska förflytta sig från *A* till en punkt *B* på sjöns andra sida enligt figuren. Den totala tiden för förflyttningen antas vara *y* s.

Han paddlar i 3,0 m/s och springer i 5,0 m/s.



a) Uttryck *y* som funktion av *x* (se figur).

b) Undersök grafiskt om han kan klara förflyttningen under 2 min.

c) Bestäm genom derivering den kortaste tid förflyttningen kan ta.

3236. a) $y(x) = \dfrac{\sqrt{300^2 + x^2}}{3{,}0} + \dfrac{270 - x}{5{,}0}$

b) Nej, $x = 225$ ger $y_{min} = 134$ s.

c) $y' = \dfrac{x}{3\sqrt{300^2 + x^2}} - \dfrac{1}{5}$

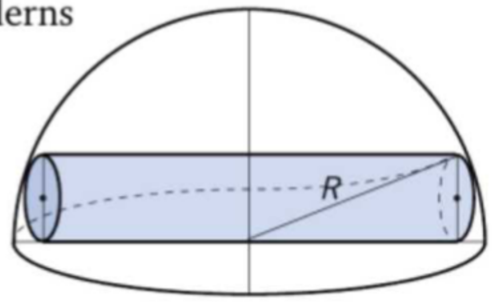
$y' = 0 \Rightarrow \dfrac{5x}{3} = \sqrt{300^2 + x^2} \Rightarrow \dfrac{25x^2}{9} = 300^2 + x^2$

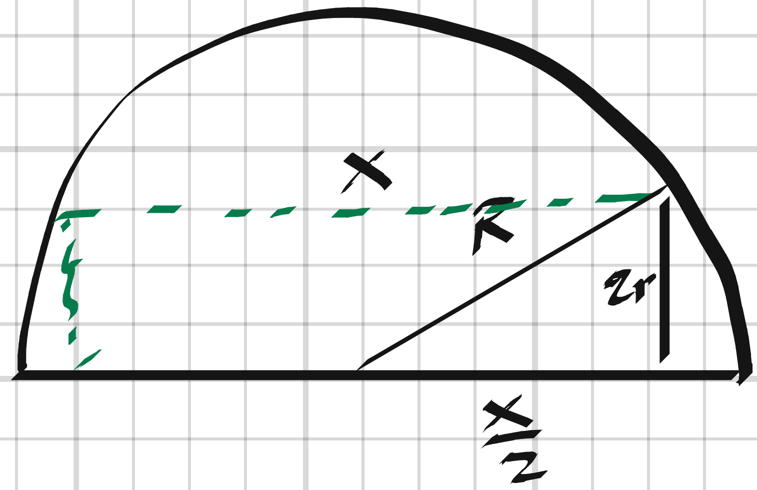
$x^2 = \dfrac{9 \cdot 300^2}{16} \Rightarrow x = \pm 225$

$y(225) = \dfrac{\sqrt{300^2 + 225^2}}{3} + \dfrac{270 - 225}{5} = 134\text{ s} = 2\text{ min }14\text{ s}$

3237 I ett halvklot med radien R inskrivs en rak cirkulär cylinder enligt figuren.

Bestäm cylinderns maximala volym.





3237.

$$R^2 = (2r)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{R^2 - \frac{x^2}{4}}{4} = \frac{R^2}{4} - \frac{x^2}{16}$$

$$V(x) = \pi r^2 \cdot x = \pi\left(\frac{R^2}{4}x - \frac{x^3}{16}\right)$$

$$V'(x) = \pi\left(\frac{R^2}{4} - \frac{3x^2}{16}\right)$$

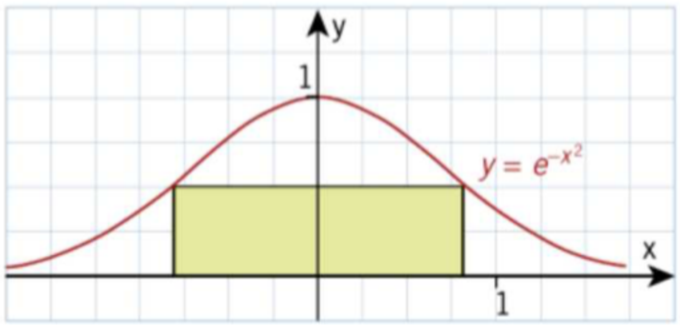
$$V'(x) = 0 \Rightarrow \quad \frac{R^2}{4} = \frac{3x^2}{16} \Rightarrow x = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$V''(x) = -\frac{6x}{16}$$

$$V''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \text{Maxvolymen} = V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{R^3}{2\sqrt{3}} - \frac{R^3}{6\sqrt{3}}\right) = \pi \cdot \frac{R^3}{3\sqrt{3}} = \underline{\frac{\pi\sqrt{3}R^3}{9}} \text{ v.e.}$$

3238 Undersök om arean av den i figuren markerade rektangeln mellan kurvan $y = e^{-x^2}$ och x-axeln antar något största värde. Ange i så fall detta i exakt form.



3238 $A(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$

$$A'(x) = 2\left(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A''(x) = -4xe^{-x^2} - \left(8xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}\right) =$$

$$= 4xe^{-x^2}(2x^2-3)$$

$$A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}(1-3) = -4\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} < 0 \Rightarrow$$

$$\text{Maxarean} = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{e}} \text{ a.e.}$$

3301 För funktionen f gäller att $f(x) = 4x - 1$

a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)$.

b) Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x)$.

c) Bestäm den primitiva funktion till $f(x)$ för vilken gäller att $F(-2) = 15$.

3301.

a) $F(x) = 2x^2 - x$

b) $F(x) = 2x^2 - x + C$

c) $2(-2)^2 - (-2) + C = 15 \Rightarrow C = 5$

$\underline{F(x) = 2x^2 - x + 5}$

3302 Beräkna integralen

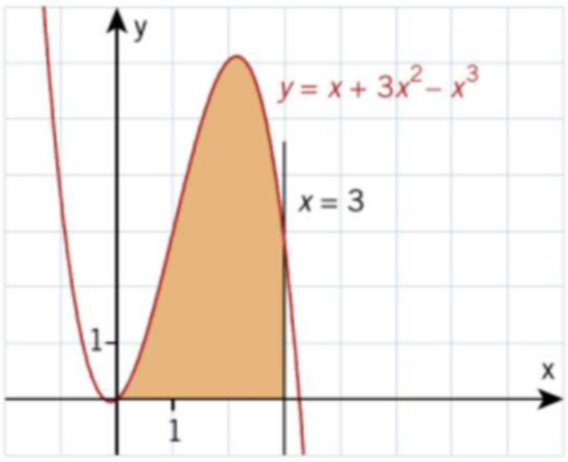
a) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$ b) $\int_1^e \frac{2}{x} \, dx$

3302.

a) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$

b) $\int_1^e \frac{2}{x} \, dx = \left[2\ln x\right]_1^e = 2 - 0 = \underline{2}$

3303 Beräkna arean av det färgade området i figuren.



3303.

$$A = \int_0^3 (x + 3x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = 4{,}5 + 27 - 20{,}25 = \underline{11{,}25 \text{ a.e.}}$$

3304 Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till $f(x)$ som uppfyller villkoret $F(0) = 10$

a) $f(x) = 3e^{-0,2x}$ b) $f(x) = 24\cos 3x$

3304. a) $F(x) = -15e^{-0,2x} + C$

$F(0) = 10 \Rightarrow C = 10 + 15e^{0} = 25$

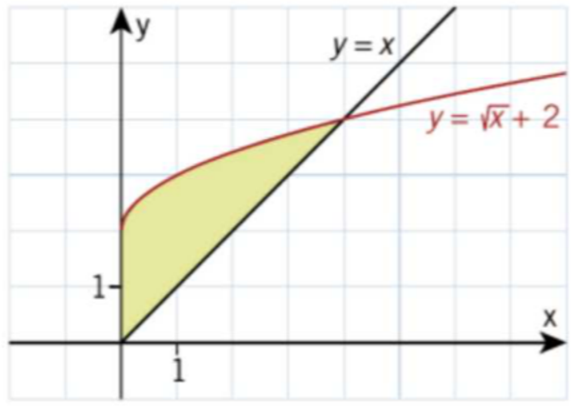
$\underline{F(x) = -15e^{-0,2x} + 25}$

b) $F(x) = 8\sin 3x + C$

$F(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

$\underline{F(x) = 8\sin 3x + 10}$

3305 Beräkna arean av det färgade området i figuren.



Skärningspunkt:

$x = \sqrt{x} + 2$

$x - \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

3305.

$$A = \int_0^4 (\sqrt{x} + 2 - x)\,dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} + 2 \cdot 4 - \frac{16}{2} = \frac{16 \cdot 2 + 8 \cdot 6 - 16 \cdot 3}{6} = \frac{16}{3} \approx 5{,}3 \text{ a.e.}$$

3306 För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Bestäm den primitiva funktion till $f(x)$ för vilken gäller att $F(4) = 0$.

3306.

$$F(x) = \frac{x^2}{6} + 2\sqrt{x} + C$$

$$F(4) = 0 \Rightarrow \frac{16}{6} + 4 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{20}{3}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{6} + 2\sqrt{x} - \frac{20}{3}$$

3307 Julia påstår följande:

Eftersom derivatan av x^2 är $2x$ och derivatan av $\sin x$ är $\cos x$ så är

$$F(x) = \frac{x^2 \cdot \sin x}{2}$$

en primitiv funktion till $f(x) = x \cdot \cos x$.

Är Julias påstående sant eller falskt? Motivera ditt svar.

3307.

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}(2x \cdot \sin x + x^2 \cos x) \neq x \cdot \cos x$$

Påståendet är falskt.

3308 Bestäm det positiva talet a så att

$$\int_1^a (2x+1)dx = \int_0^2 x^3 dx$$

3308.

$$\left[x^2 + x\right]_1^a = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$a^2 + a - 2 = 4 \quad ; \quad a^2 + a - 6 = 0$$

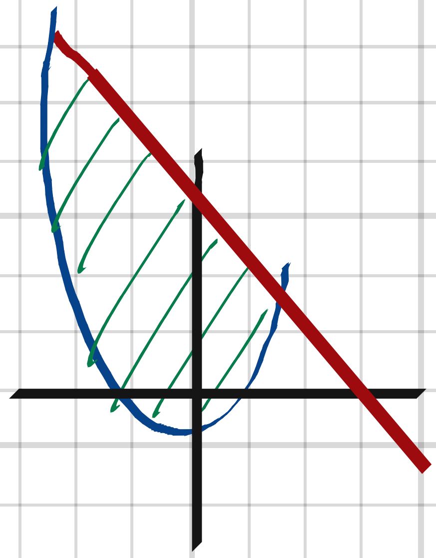
$$(a-2)(a+3) = 0 \quad \Rightarrow$$

Positiva $a = 2$

3309 Skissa figur och beräkna arean av det område som begränsas av kurvan

a) $y = x^2 - 1$ och linjen $y = -x + 5$

b) $y = e^{-x}$, linjerna $y = x + 1$, $x = 2$ och x-axeln.



3309. a) $x^2 - 1 = -x + 5$

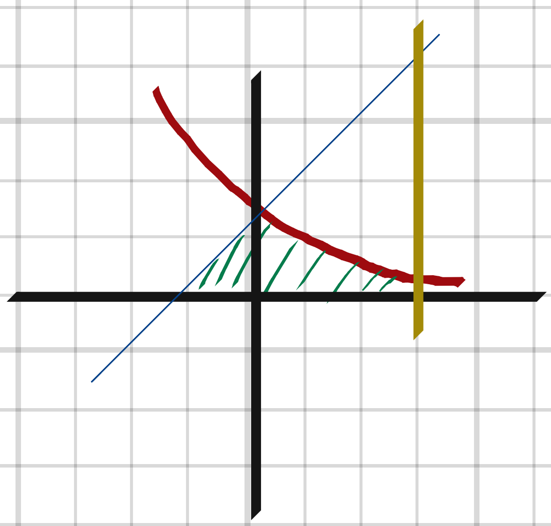
$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-x + 5 - x^2 + 1)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} =$$

$$= -2 + 12 - \frac{8}{3} - \left(-\frac{9}{2} - 18 + 9\right) = 10 - \frac{8}{3} + \frac{9}{2} + 9 =$$

$$= \frac{60 - 16 + 27 + 54}{6} = \frac{125}{6} \approx 20{,}8 \text{ a.e}$$



b) $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (x+1)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} e^{-x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} +$$

$$- \left[e^{-x}\right]_0^2 = 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(e^{-2} - 1\right) = \frac{3}{2} - e^{-2} \approx 1{,}36 \text{ a.e.}$$

3310 Beräkna integralen

a) $\int_1^e \frac{1}{x+1}dx$ b) $\int_0^4 \frac{1}{2x+1}dx$

3310.

a) $\int_1^e \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln(x+1)\right]_1^e = \ln(e+1) - \ln 2 = \underline{\ln \frac{e+1}{2}}$

b) $\int_0^4 \frac{1}{2x+1}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\ln(2x+1)\right]_0^4 = \frac{1}{2}\ln 9 = \underline{\ln 3}$

3311 a) Visa att $x \cdot \ln x - x$ är en primitiv funktion till $\ln x$.

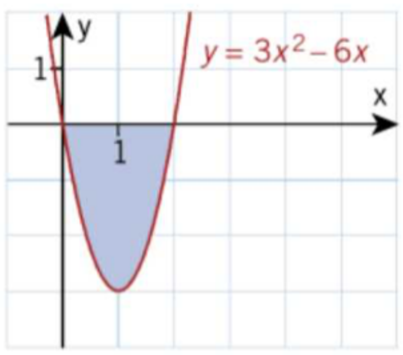
b) Beräkna integralen $\int_1^e \ln x\,dx$.

3311. a) $F(x) = x\cdot\ln x - x$

$f(x) = F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

b) $\int_1^e \ln x\,dx = \left[x\cdot\ln x - x\right]_1^e = e - e - (0-1) = 1$

3312



a) Visa att arean av det färgade området i figuren är exakt 4 a.e.

b) Christoffer påstår att det finns ett positivt heltal n sådant att

$$\int_0^n (3x^2 - 6x) = 0$$

Undersök om detta är sant.

3312.

a) $$A = \int_2^0 (3x^2 - 6x)\,dx = \left[x^3 - 3x^2\right]_2^0 = -8 + 12 = 4 \text{ a.e.}$$

b) $$\left[x^3 - 3x^2\right]_0^n = 0$$

$$n^3 - 3n^2 = 0$$

$$n^2(n-3) = 0$$

$$n > 0 \Rightarrow n = 3$$

3313 Bestäm talet a så att integralen

$\int_0^2 (x - ax^2)dx$ får värdet

a) 4 b) 0

3313.

a) $\int_0^2 (x - ax^2)dx = 4$; $\left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^2 = 4$

$2 - \frac{8a}{3} = 4 \Rightarrow \underline{a = -\frac{3}{4}}$

b) $2 - \frac{8a}{3} = 0 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{4}}$

3314 Ett föremål rör sig rätlinjigt.
Dess hastighet $v(t)$ m/s ges av ekvationen
$v(t) = 18t^2 - 12$, där t är tiden i s.

a) Bestäm vägfunktionen $s(t)$, om $s(0) = 15$.

b) Hur långt hinner kroppen från $t = 10$ till $t = 12$?

3314. a) $s(t) = \int_0^t v(t)dt + C = \underline{6t^3 - 12t + 15}$

b) $s(12) - s(10) = 6 \cdot 12^3 - 12 \cdot 12 - 6 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10 = \underline{4344 \text{ m}}$

3315 Beräkna integralen

a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ d) $\int_0^{\pi/2} 8\sin x\cos x\,dx$

b) $\int_0^1 (x^2+1)^2 dx$ e) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int_1^3 \frac{x+1}{x}\,dx$ f) $\int_0^1 \frac{x}{x+3}\,dx$

3315.

a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}\left[(2x+1)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(27-1) = \underline{\frac{26}{3}}$

b) $\int_0^1 (x^2+1)^2 dx = \int_0^1 (x^4+2x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^1 = \frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1 = \underline{\frac{28}{15}}$

c) $\int_1^3 \left(\frac{x+1}{x}\right)dx = \left[x+\ln x\right]_1^3 = 3+\ln 3-1-0 = \underline{2+\ln 3}$

d) $\int_0^{\pi/2} 8\sin x\cos x\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin 2x = 2\left[-\cos 2x\right] = \underline{4}$

e) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3}+x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 2\left(\frac{8}{3}+\frac{6}{3}-\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\right)$
$= \underline{\frac{20}{3}}$

f) $\int_0^1 \frac{x}{x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{x+3-3}{x+3}\,dx = \int_0^1 (x-3\ln(x+3))\,dx =$
$\underline{1-3\ln 4+3\ln 3}$

3316 Beräkna integralen

a) $\int_0^6 r^2 \cdot h dh$ b) $\int_0^n r^2 \cdot h dr$

3316.

a) $\int_0^6 r^2 h dh = r^2 \left[\frac{h^2}{2}\right]_0^6 = \underline{18r^2}$

b) $\int_0^n r^2 h dr = h \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^n = \underline{\frac{hn^3}{3}}$

3317 En sportbil håller i tidsintervallet $0 \leq t \leq 25$, där t är tiden i sekunder, en hastighet v m/s som bestäms av funktionen

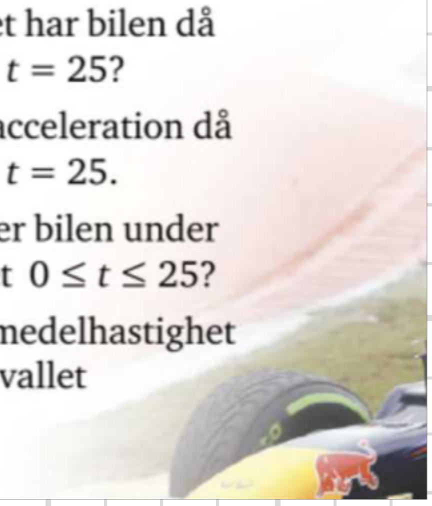
$v(t) = 10 \cdot t^{0,56}$

a) Vilken hastighet har bilen då $t = 10$ och då $t = 25$?

b) Bestäm bilens acceleration då $t = 10$ och då $t = 25$.

c) Hur långt hinner bilen under tids intervallet $0 \leq t \leq 25$?

d) Bestäm bilens medelhastighet under tidsintervallet $0 \leq t \leq 25$.



$v(t) = 10 \cdot t^{0,56}$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = 5,6\,t^{-0,44}$

$s(t) = \int_0^t v(t)dt = 6,41 \cdot t^{1,56}$

3317. a) $v(10) = 10 \cdot 10^{0,56} = \underline{36,3 \text{ m/s}}$; $v(25) = 10 \cdot 25^{0,56} = \underline{60,7 \text{ m/s}}$

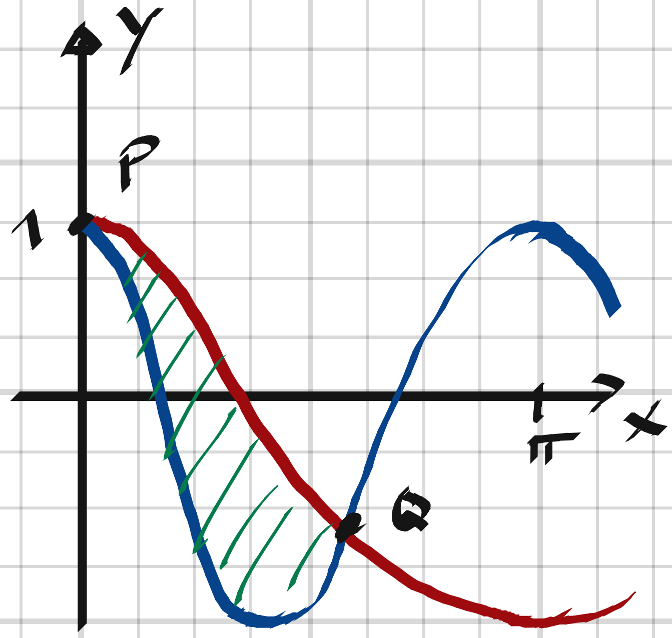
b) $a(10) = 5,6 \cdot 10^{-0,44} = \underline{2,03 \text{ m/s}^2}$; $a(25) = 5,6 \cdot 25^{-0,44} = \underline{1,39 \text{ m/s}^2}$

c) $s(25) = 6,41 \cdot 25^{1,56} = \underline{972 \text{ m}}$

d) $v_m = \frac{s(25) - s(0)}{25 - 0} = \frac{972}{25} = \underline{38,9 \text{ m/s}}$

3318 Rita kurvorna $y = \cos x$ och $y = \cos 2x$ för $0 \le x \le \pi$. De skär varandra dels i en punkt P på y-axeln, dels i en punkt Q.

Beräkna arean av det område som begränsas av kurvbågarna PQ.



3318.

$$\cos x = \cos 2x$$

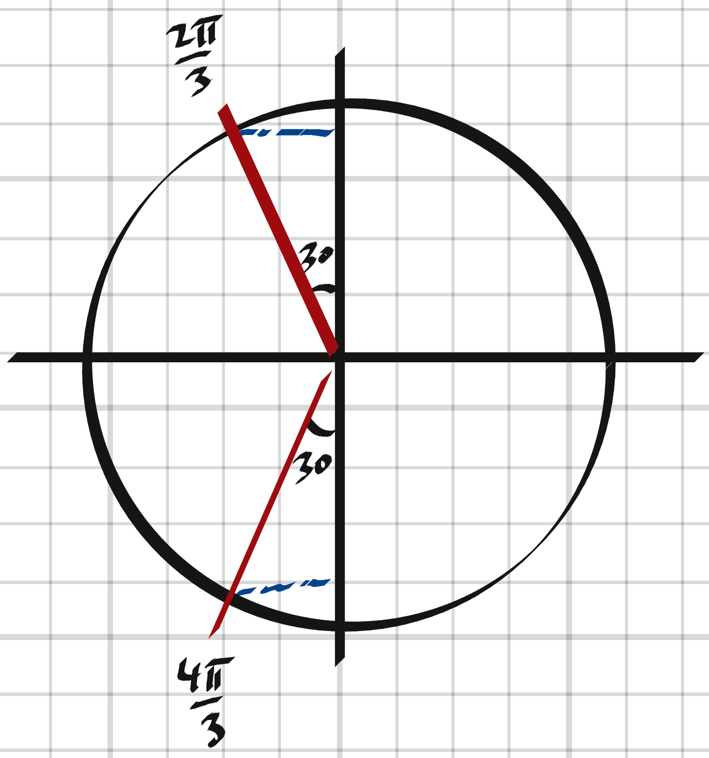
$$x = \pm 2x + n \cdot 2\pi$$

$$x > 0,\ n = 1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$A = \int_0^x (\cos x - \cos 2x)\,dx = \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \sin\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30 \text{ a.e.}}$$



3319 Medelvärdet av en funktion f över ett intervall $a \leq x \leq b$ definieras av integralen

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

a) Finn medelvärdet av $f(x) = \sin x$ över intervallet $0 \leq x \leq \pi$.

b) Medelvärdet av funktionen $f(x) = 6/x^2$ över intervallet $1 \leq x \leq b$, där $b > 1$ är lika med 1. Vilket värde har b?

3319. a) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \underline{\frac{2}{\pi}}$

b) $\frac{1}{b-1}\int_1^b \frac{6}{x^2}dx = 1 \Rightarrow -\frac{1}{b-1}\left[\frac{6}{x}\right]_1^b = 1 \Rightarrow$

$\frac{-1}{b-1}\left(\frac{6}{b}-6\right) = 1 \Rightarrow \frac{6}{b} - 6 = 1 - b$

$6 - 6b = b - b^2 \Rightarrow b^2 - 7b + 6 = 0 \Rightarrow$

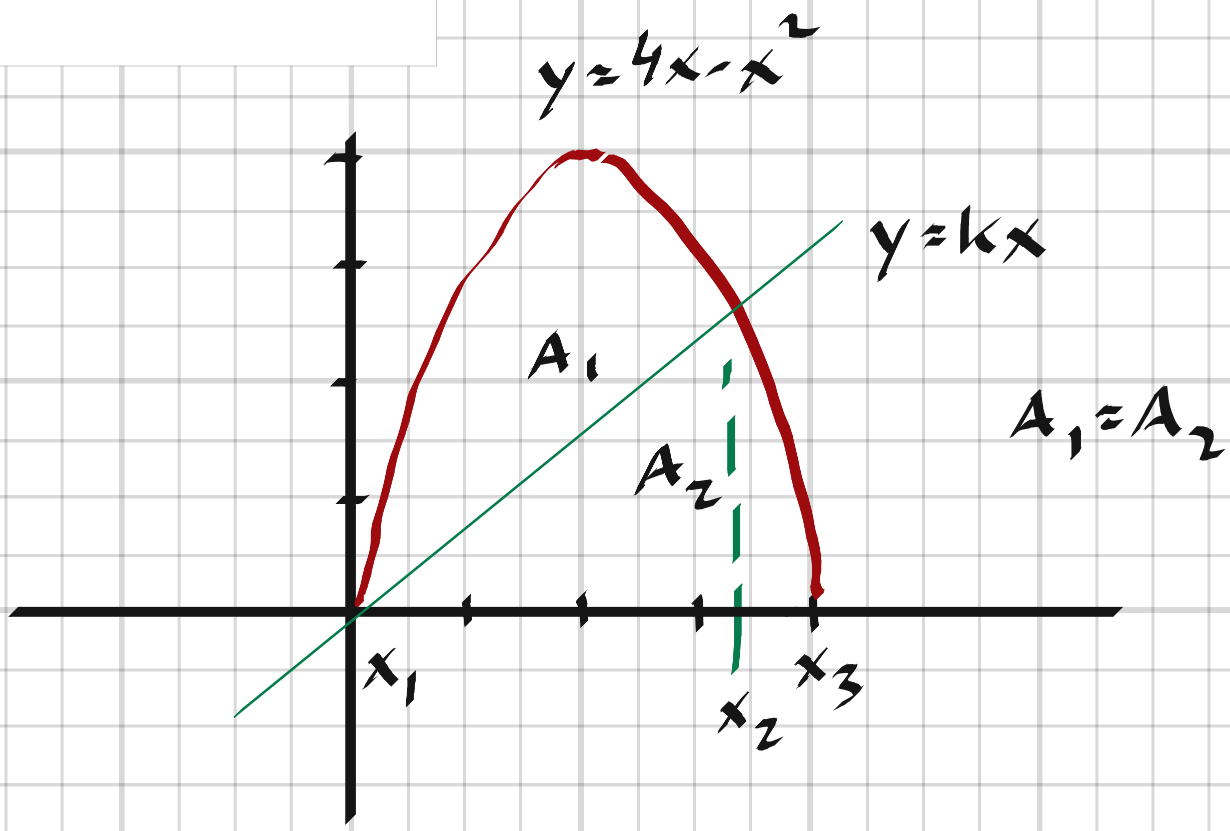
$(b-1)(b-6)$

$b > 1 \Rightarrow \underline{b = 6}$

3320 Kurvan $y = 4x - x^2$ begränsar tillsammans med x-axeln ett område.

Välj själv en linje som inte är parallell med axlarna och som delar området i två delar med lika stor area. Vilken ekvation får din linje?

3320.



$$4x - x^2 = kx \Rightarrow x^2 + kx - 4x = 0 \quad x(x-(4-k)) = 0$$

$$x_1 = 0, \; x_2 = 4-k, \; x_3 = 4$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} (4x - x^2 - kx)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx + \int_{x_2}^{x_3} (4x - x^2)\,dx$$

$$\left[(4-k)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{4-k} = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^{4-k} + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{4-k}^{4}$$

$$\frac{(4-k)^3}{2} - \frac{(4-k)^3}{3} = \frac{k(4-k)^2}{2} + 32 - \frac{64}{3} - 2(4-k)^2 + \frac{(4-k)^3}{3}$$

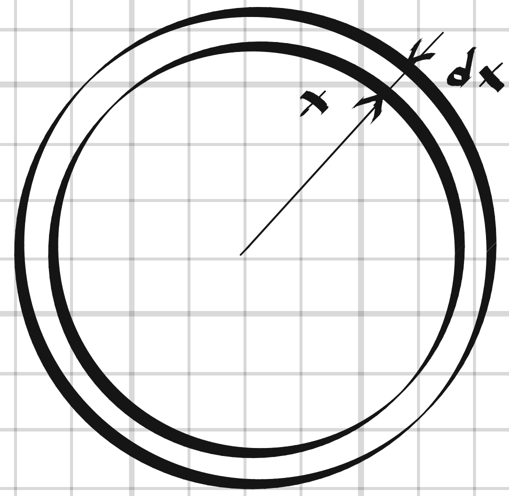
Ekv. löst i Geogebra $\Rightarrow k = 0.825 \Rightarrow$ $\underline{y = 0.825x}$

3321 I en kommun bedömer man att befolkningstätheten $f(x)$ invånare per kvadratkilometer varierar enligt formeln

$$f(x) = \frac{8000}{x\sqrt{x}}$$

där x km är avståndet till kommunens centrum.

Hur många personer bor det i cirkelringen från $x = 1$ till $x = 4$?



3321.

$$dA = 2\pi x\,dx$$

$$\text{Antal invånare} = \int_1^4 f(x)\cdot dA = 16000\pi \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 32000\pi\left[\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$= 32000\pi(2-1) = 32000\pi \approx \underline{100\,500}$$

3322 Antag att vi slumpvis väljer två tal x och y, sådana att $0 < x < \pi$ och $0 < y < 1$.

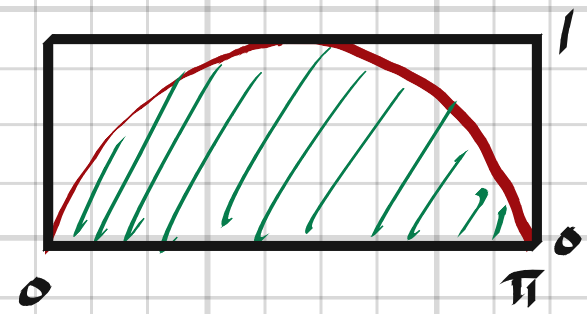
Vad är då sannolikheten att

a) $y < \sin x$ c) $y < \cos x$

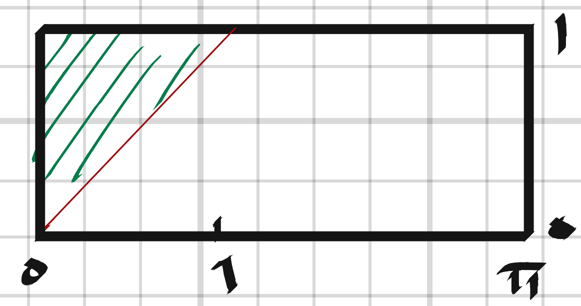
b) $y > x$ d) $y > 2x - x^2$?

3322.

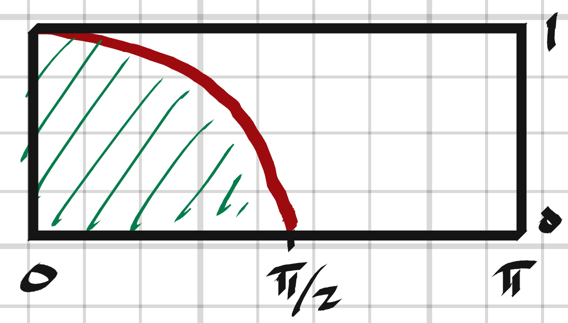
a) $$P = \frac{\int_0^{\pi} \sin x \, dx}{1 \cdot \pi} = \frac{\left[\cos x\right]_{\pi}^{0}}{\pi} = \frac{1-(-1)}{\pi} = \underline{\frac{2}{\pi}}$$



b) $$P = \frac{\frac{1 \cdot 1}{2}}{\pi} = \underline{\frac{1}{2\pi}}$$

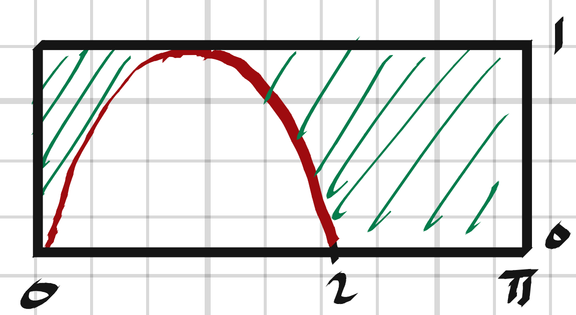


c) $$P = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx}{\pi} = \frac{\left[\sin x\right]_0^{\pi/2}}{\pi} = \underline{\frac{1}{\pi}}$$



d) $$P = \frac{\pi - \int_0^2 (2x - x^2)\, dx}{\pi} = \frac{\pi - (4 - \frac{8}{3})}{\pi} =$$

$$= \underline{\frac{\pi - \frac{4}{3}}{\pi}}$$



3323 Undersök sannolikheten för att andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har reella rötter, om p och q väljs slumpvis som reella tal i intervallet

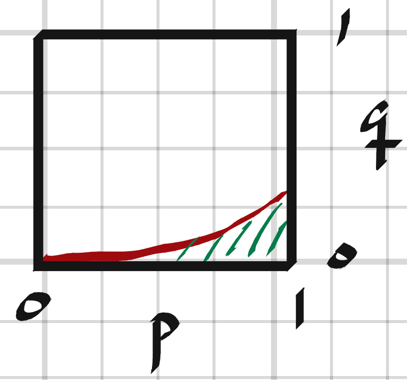
a) mellan 0 och 1

b) mellan 0 och 2

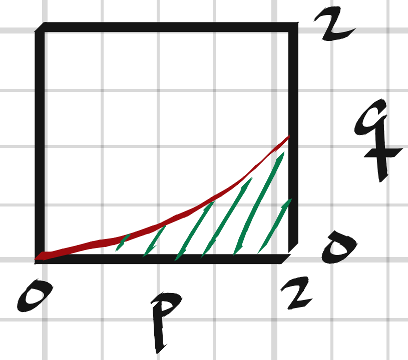
c) mellan 0 och 4.

3323 Reella rötter $\Rightarrow q \leq \frac{p^2}{4}$

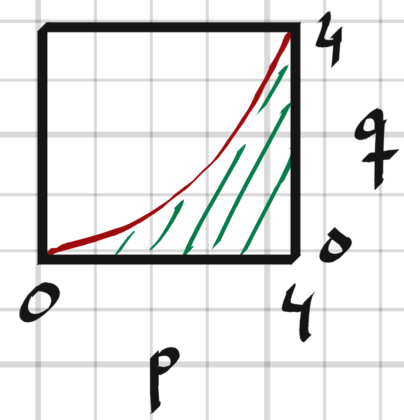
a) $P = \dfrac{\frac{1}{4}\int_0^1 p^2\,dp}{1} = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{1} = \underline{\frac{1}{12}}$



b) $P = \dfrac{\frac{1}{4}\int_0^2 p^2\,dp}{4} = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}}{4} = \underline{\frac{1}{6}}$

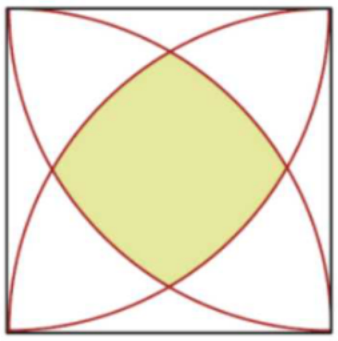


c) $P = \dfrac{\frac{1}{4}\int_0^4 p^2\,dp}{16} = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{64}{3}}{16} = \underline{\frac{1}{3}}$

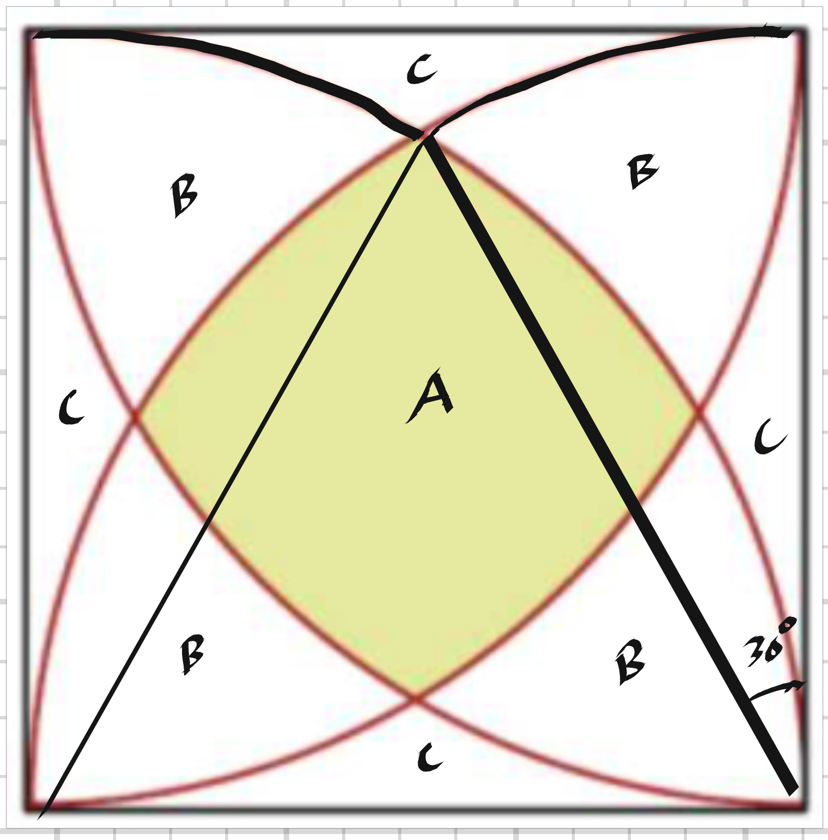


3324 En fallskärmshoppare landar slumpvis inom ett kvadratiskt skogsområde med sidan 1 mil.

I områdets fyra hörn finns radiosändare.



Vad är sannolikheten att hon i sin radio kan höra alla sändarna om räckvidden är 1 mil?



3324.

$$\begin{cases} A + 4B + 4C = 1 & \text{(Hel kvadrat)} \\ A + 3B + 2C = \frac{\pi}{4} & \text{(Kvartscirkel)} \\ \frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + 2\cdot\frac{30}{360}\cdot\pi\cdot 1^2 + C = 1 & \text{Hel kvadrat} \end{cases}$$

(Triangelarean + 2 cirkelbågar + C)

$$\Rightarrow \quad C = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \quad ; \quad 4C = 4 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{12 - 3\sqrt{3} - 2\pi}{3}$$

$$A + 4B = 1 - 4C = -3 + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{-36 + 12\sqrt{3} + 8\pi}{12}$$

$$A + 3B = \frac{\pi}{4} - 2C = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\pi + 6\sqrt{3} - 24}{12}$$

$$B = \frac{-12 + 6\sqrt{3} + \pi}{12} \quad ; \quad 4B = \frac{-12 + 6\sqrt{3} + \pi}{3}$$

$$A = 1 - 4B - 4C = \frac{3 - 3\sqrt{3} + \pi}{3} \approx \underline{0{,}315}$$

3327 Bestäm med partiell integration

a) $\int x \cdot e^{2x} dx$ b) $\int x \cdot \cos 2x dx$

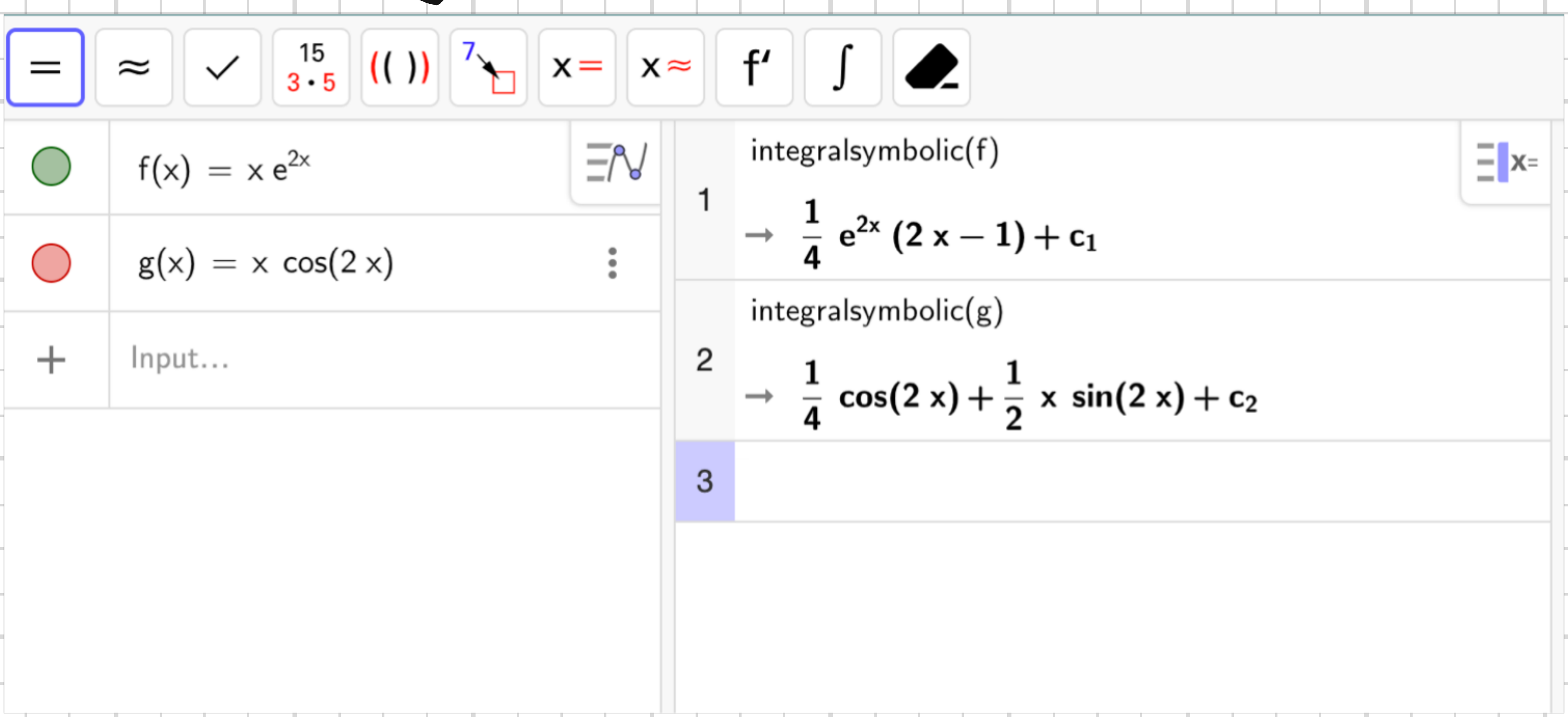
3327.

a) $\int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx + c = \underline{\frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c}$

b) $\int x \cdot \cos 2x dt = x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int 1 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x dx + c =$

$= \underline{\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c}$

Lösning i Geogebra:



3328 Bestäm

a) $\int x \cdot \ln x \, dx$ b) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$

3328.

a) $\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx + C =$

$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

b) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx + C =$

$= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 \cdot e^x dx + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

3329 Beräkna

a) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$ b) $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$

3329.

a) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \left[x \cdot \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x \, dx$

$= \left[x \sin x\right]_0^{\pi/2} + \left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$

b) $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$

$\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} = \frac{24 \ln 2 - 7}{9}$

3330 Beräkna

$$\int_0^2 (2x+1)(3x-1)\,dx$$

på två olika sätt, dels med partiell integration, och dels genom att först multiplicera ihop parenteserna.

Blev resultatet detsamma?

3330.

$$\int_0^2 (2x+1)(3x-1)\,dx = \left[(2x+1)\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\right]_0^2 - \int_0^2 2\cdot\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)dx =$$

$$= \left[(2x+1)\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\right]_0^2 - \left[x^3-x^2\right]_0^2 =$$

$$= 5\cdot4 - 0 - 4 + 0 = \underline{16}$$

$$\int_0^2 (6x^2+x-1)\,dx = \left[2x^3+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2 = 16+2-2 = \underline{16}$$

3331 Beräkna

a) $\int_1^{e^2}(x+\ln x)\,dx$ b) $\int_0^1 e^x(x+1)\,dx$

3331.

a) $\int_1^{e^2}(x+\ln x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2} + \int_1^{e^2}\ln x\,dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2} + \left[x\cdot\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}dx =$

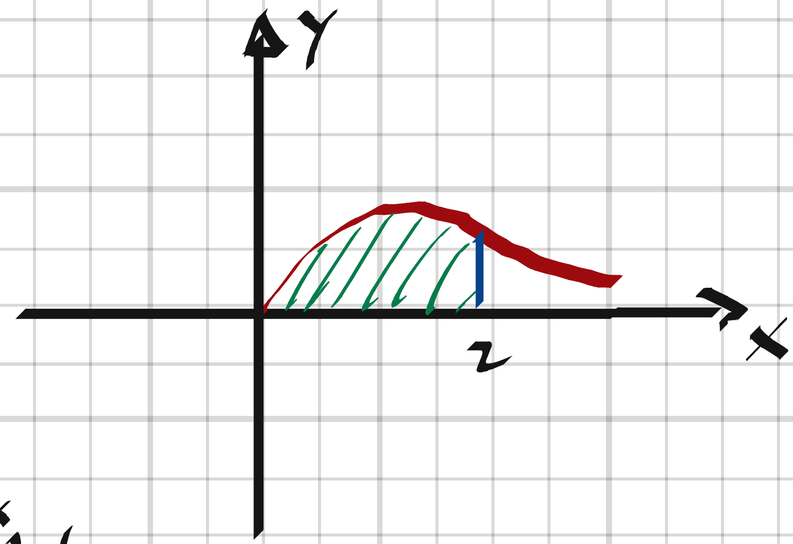
$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2} + \left[x\cdot\ln x\right]_1^{e^2} - \left[x\right]_1^{e^2} = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + 2e^2 - 0 - e^2 + 1 =$

$= \underline{\frac{e^4}{2} + e^2 + \frac{1}{2}}$

b) $\int_0^1 e^x(x+1)dx = \int_0^1 e^x x\,dx + \left[e^x\right]_0^1 = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + \left[e^x\right]_0^1 =$

$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1 = \underline{e}$

3332 Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = xe^{-x}$, x-axeln och linjen $x = 2$.

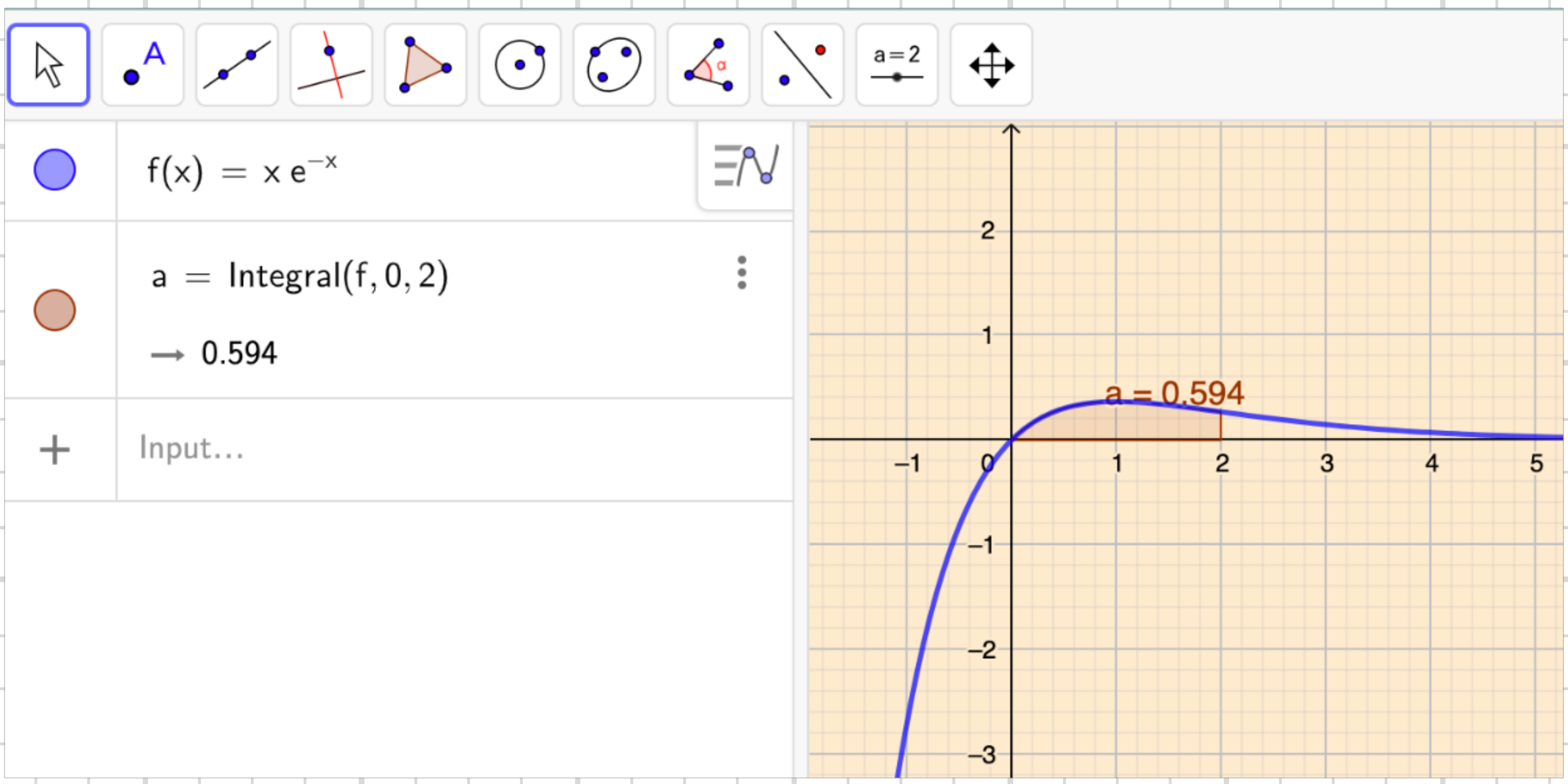


3332.

$$A = \int_0^2 x e^{-x}\,dx = \left[-x\cdot e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x})\,dx =$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^2 - \left[e^{-x}\right]_0^2 = \underline{-2e^{-2} - e^{-2} + 1 \approx 0{,}594 \text{ a.e.}}$$

Lösning i Geogebra:



3333 Anna påstår att hon med partiell integration kan ”bevisa” att 0 = 1.

$\int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx =$

$= x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$

Alltså $\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$

Subtrahera $\int \frac{1}{x}\, dx$ från båda leden.

Resultat $0 = 1$

Finn felet i Annas ”bevis”.

3333.

$VL = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_1$

$HL = 1 + \int \frac{1}{x} dx = 1 + \ln x + C_2$

$\Rightarrow$

$C_1 \neq C_2 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx$ kan inte subtraheras från bägge leden

3334 Kurvan $y = \sin x$ begränsar tillsammans med x-axeln och linjen $x = \pi/2$ ett område, vars tyngdpunkt betecknas (x_T, y_T).

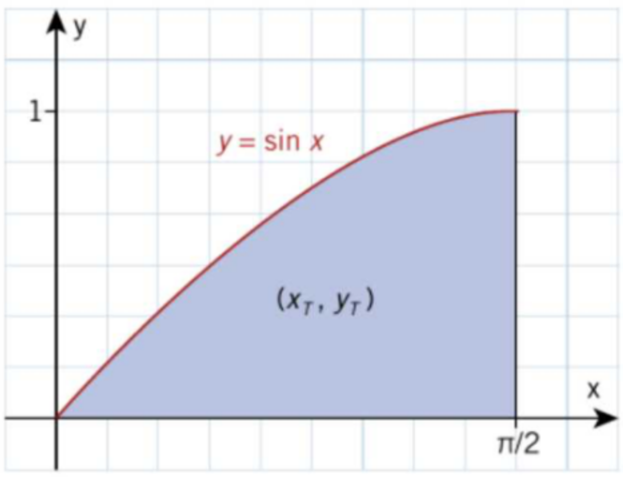
Tyngdpunktens koordinater kan beräknas med integralerna

$$x_T = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

$$y_T = \frac{1}{2A}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

där A är områdets area.

Ange tyngdpunktens koordinater i exakt form och kontrollera rimligheten i svaret med hjälp av figuren nedan.



$$A = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [\cos x]_{\pi/2}^{0} = 1 \text{ a.e.}$$

$$\Rightarrow \quad x_T = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

$$y_T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

$$x_T = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = [-x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [-x\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

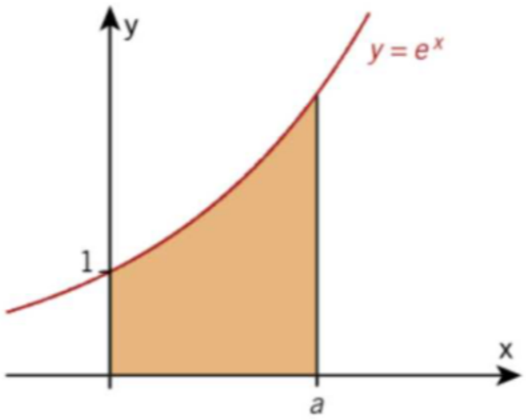
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$y_T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\underline{(x_T, y_T) = \left(1, \frac{\pi}{8}\right)}$$

3337



Det färgade området roterar runt x-axeln.

a) Beräkna rotationsvolymen då $a = 2$.

b) Beräkna a då rotationsvolymen är 100π v.e.

3337.

a) $dV = \pi y^2 \cdot dx = \pi e^{2x} dx$

$$V = \int_0^a dV = \int_0^2 \pi e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1) \approx 84{,}2 \text{ v.e.}$$

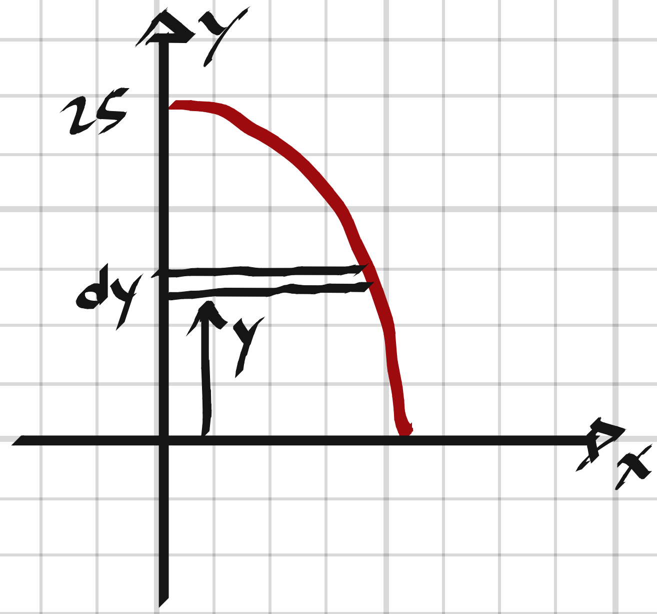
b) $$\int_0^a \pi e^{2x} dx = 100\pi$$

$$\frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^a = 100\pi$$

$$e^{2a} - 1 = 200$$

$$a = \frac{\ln 201}{2} \approx 2{,}65 \text{ l.e.}$$

3338 Kurvan $y = 25 - x^2$ begränsar tillsammans med positiva x-axeln ett begränsat område. Beräkna volymen av den kropp som bildas då området roterar runt y-axeln.

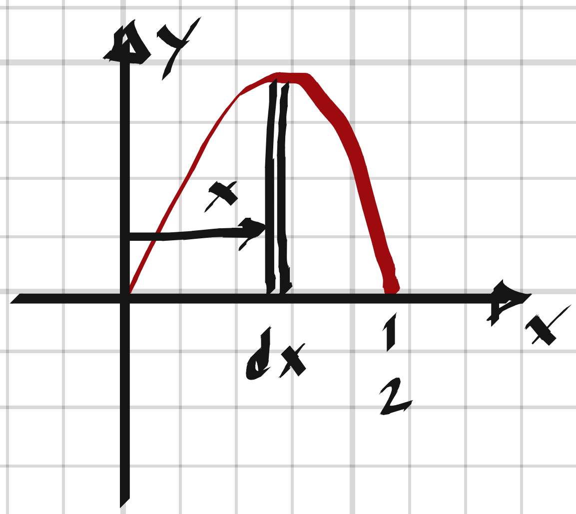


3338. $x^2 = 25 - y$

$$dV = \pi x^2 \cdot dy = \pi(25-y)dy$$

$$V = \int_0^{25} dV = \int_0^{25} \pi(25-y)dy = \pi \cdot \left[25y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{25} = 312{,}5\pi \approx 982 \text{ v.e.}$$

3339 Kurvan $y = x(4 - x^2)$ begränsar tillsammans med positiva x-axeln ett begränsat område. Beräkna volymen av den kropp som bildas då området roterar runt x-axeln.



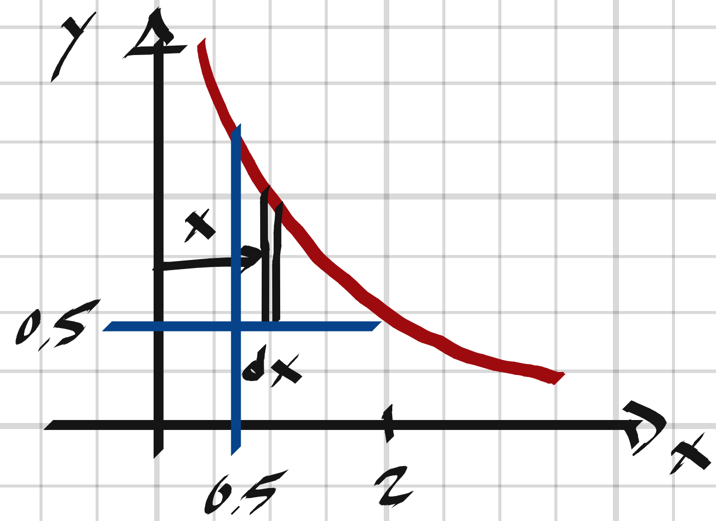
3339. $dV = \pi y^2 \cdot dx = \pi x^2 (4 - x^2)^2 dx$

$$V = \int_0^2 dV = \pi \int_0^2 (16x^2 - 8x^4 + x^6)dx = \pi \cdot \left[\frac{16x^3}{3} - \frac{8x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{16 \cdot 8 \cdot 35 - 8 \cdot 32 \cdot 21 + 128 \cdot 15}{105} = \frac{1024\pi}{105} \approx 30{,}6 \text{ v.e.}$$

3340 Ett område i första kvadranten begränsas av kurvan $y = \frac{1}{x}$ och linjerna $y = 0,5$ och $x = 0,5$.

Beräkna volymen av den kropp som bildas då området roterar runt x-axeln.



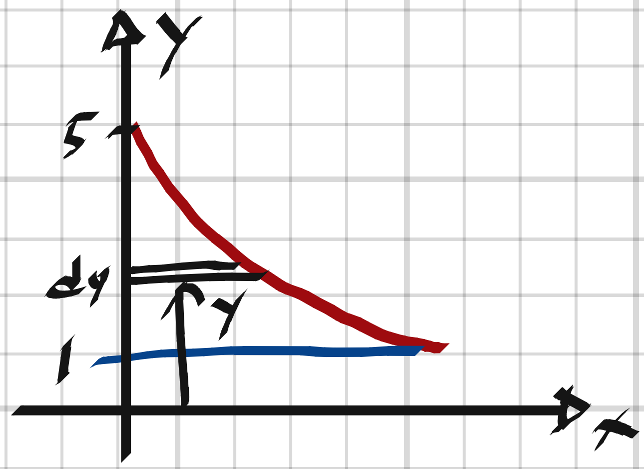
3340.

$$dV = \pi \cdot (y^2 - y_0^2) \cdot dx = \pi \left(\frac{1}{x^2} - 0,25\right) dx$$

$$V = \int_{0,5}^{2} dV = \pi \left[-\frac{1}{x} - 0,25x\right]_{0,5}^{2} = \pi \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{8}\right) = \underline{\frac{9\pi}{8} \approx 3,5 \text{ v.e.}}$$

3341 Ett område i första kvadranten begränsas av y-axeln, kurvan $y = \frac{5}{1+x}$ och linjen $y = 1$.

Beräkna volymen av den kropp som bildas då området roterar runt y-axeln.



3341.

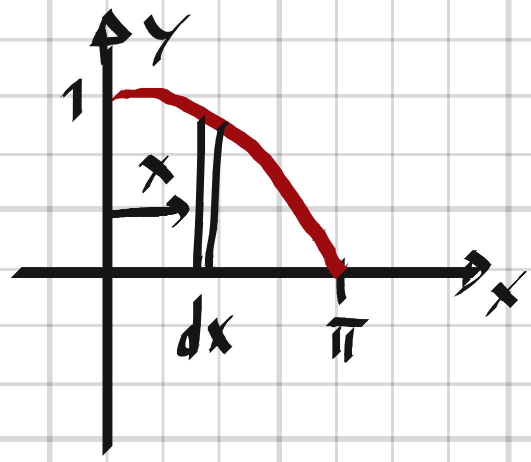
$$x = \frac{5}{y} - 1$$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi \left(\frac{5}{y} - 1\right)^2 dy = \pi \left(\frac{25}{y^2} - \frac{10}{y} + 1\right) dy$$

$$V = \int_1^5 dV = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{25}{y^2} - \frac{10}{y} + 1\right) dy = \pi \left[-\frac{25}{y} - 10 \ln y + x\right]_1^5 =$$

$$= \pi(-5 - 10 \ln 5 + 5 + 25 - 1) = \underline{\pi(24 - 10 \ln 5) \approx 24,8 \text{ v.e.}}$$

3342 Kurvan $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$, begränsar tillsammans med x-axeln ett område.
Visa att då området roterar runt x-axeln bildas en kropp med volymen $\frac{\pi^2}{2}$ v.e.



3342.

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \sin^2 x \, dx$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

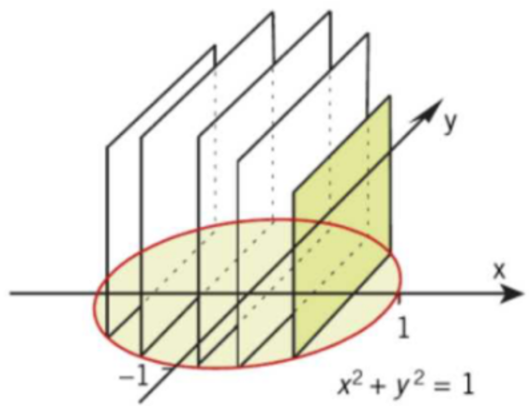
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$V = \int_0^{\pi} dV = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

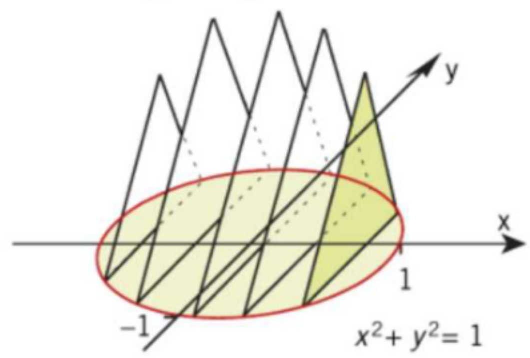
3343 En kropp har en cirkulär basyta med radien 1 längdenhet.

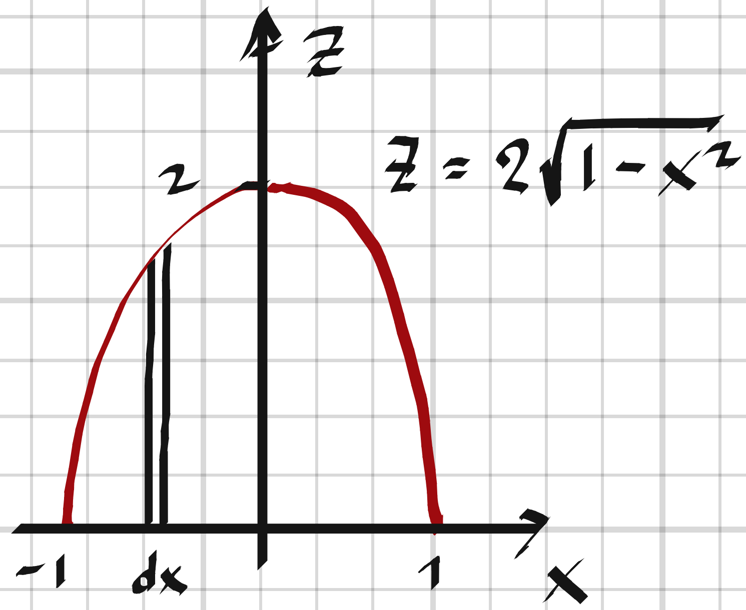
Beräkna kroppens volym, om varje mot y-axeln vinkelrätt plan som skär kroppen har en snittyta som är

a) en kvadrat



b) en liksidig triangel.





a)

$$dV = z^2 \cdot dx = 4(1-x^2)\,dx$$

$$V = \int_{-1}^{1} dV = 4 \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = 4 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \underline{\frac{16}{3} \text{ v.e.}}$$

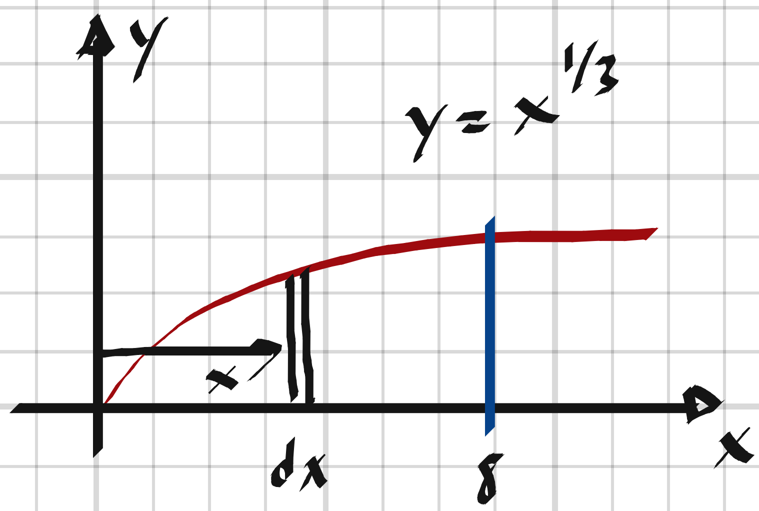
b)

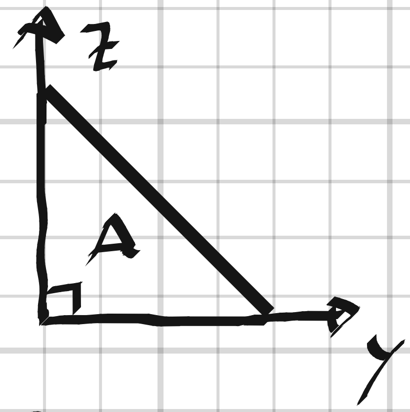
$$dV = \frac{z \cdot \frac{z}{2}\sqrt{3}}{2} \cdot dx = \frac{z^2\sqrt{3}}{4}\,dx = \sqrt{3} \cdot (1-x^2)$$

$$V = \int_{-1}^{1} dV = \sqrt{3} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ v.e.}}$$

3344 En kropp har som basyta det område som begränsas av kurvan $y = x^{1/3}$, x-axeln och linjen $x = 8$.

Beräkna kroppens volym, om varje mot x-axeln vinkelrätt plan som skär kroppen har en snittyta som är en likbent, rätvinklig triangel med den räta vinkeln på x-axeln.





3344.

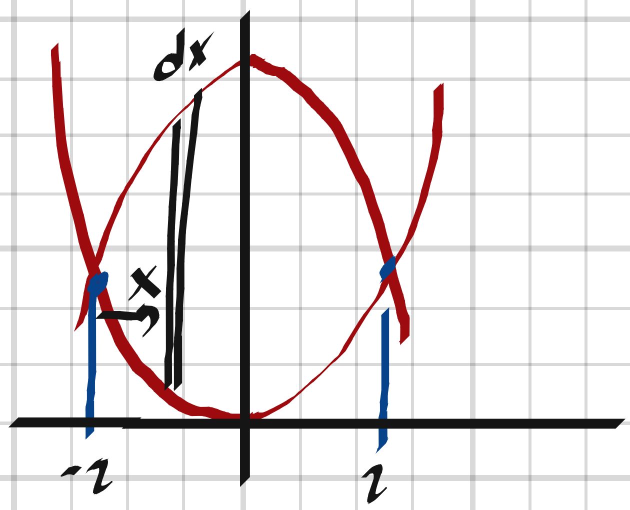
$$A = \frac{y^2}{2} = \frac{x^{2/3}}{2}$$

$$dV = A\,dx = \frac{x^{2/3}}{2}dx$$

$$V = \int_0^8 dV = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{2/3}dx = \frac{3}{10}\left[x^{5/3}\right]_0^8 = 9{,}6 \text{ v.e.}$$

3345 En kropp har som basyta det område som begränsas av de båda kurvorna $y = x^2$ och $y = 8 - x^2$. Varje mot x-axeln vinkelrätt plan som skär kroppen har en snittyta som är en kvadrat.

Beräkna kroppens volym.



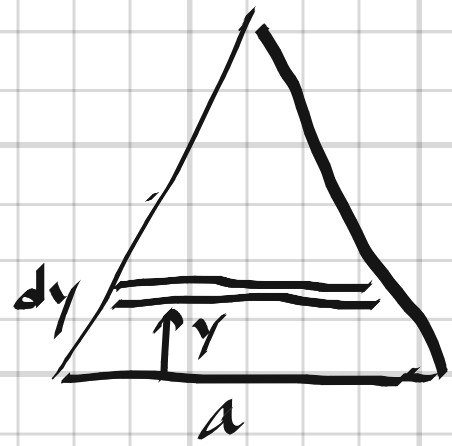
$$x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$A = (8 - x^2 - x^2)^2 = (8 - 2x^2)^2 = 64 - 32x^2 + 4x^4; \quad dV = A \cdot dx$$

$$V = 2\cdot\int_0^2 dV = 2\int_0^2 (64 - 32x^2 + 4x^4)dx = 2\left[64x - \frac{32x^3}{3} + \frac{4x^5}{5}\right]_0^2 =$$

$$= 2\left(128 - \frac{256}{3} + \frac{128}{5}\right) = 2\cdot\frac{128\cdot 15 - 256\cdot 5 + 128\cdot 3}{15} = \frac{2048}{15} \text{ v.e.}$$

3346 Visa att volymen av en pyramid med kvadratisk basyta med sidan a kan beräknas med formeln $\frac{a^2h}{3}$ där h är pyramidens höjd.



3346.

$$y = h\left(1 - \frac{x}{a}\right) \Rightarrow x = a\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

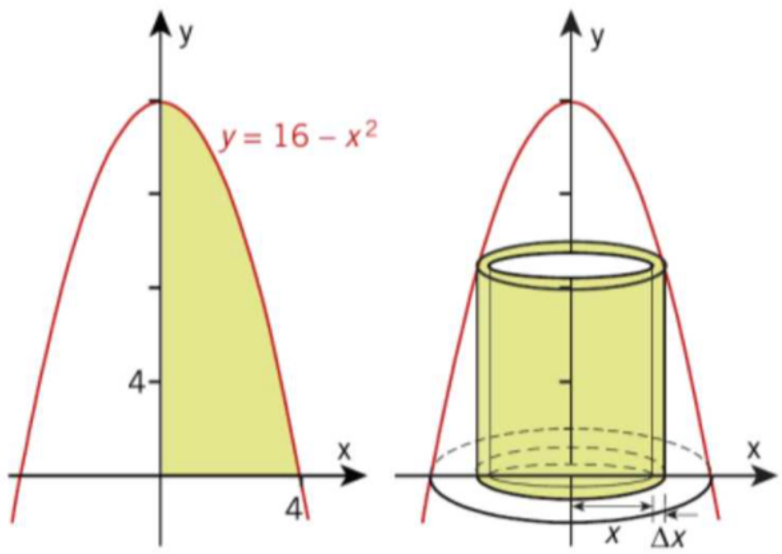
$$A = x^2 = a^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)^2$$

$$dV = A\,dy = a^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy$$

$$V = \int_0^h dV = a^2 \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy = a^2 \int_0^h \left(1 - \frac{2y}{h} + \frac{y^2}{h^2}\right) dy =$$

$$= a^2 \cdot \left[y - \frac{y^2}{h} + \frac{y^3}{3h^2}\right]_0^h = a^2\left(h - h + \frac{h}{3}\right) = \frac{a^2h}{3} \quad \#$$

3348 Det område som begränsas av kurvan $y = 16 - x^2$, positiva x-axeln och y-axeln får rotera kring y-axeln. Rotationskroppen delas upp i s k "cylindriska skal".



a) Teckna volymen ΔV av det cylindriska skal som markerats i figuren.

b) Beräkna rotationskroppens volym.

3348.

a) $\underline{\Delta V = 2\pi x \cdot \Delta x \cdot y}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta V = dV$$

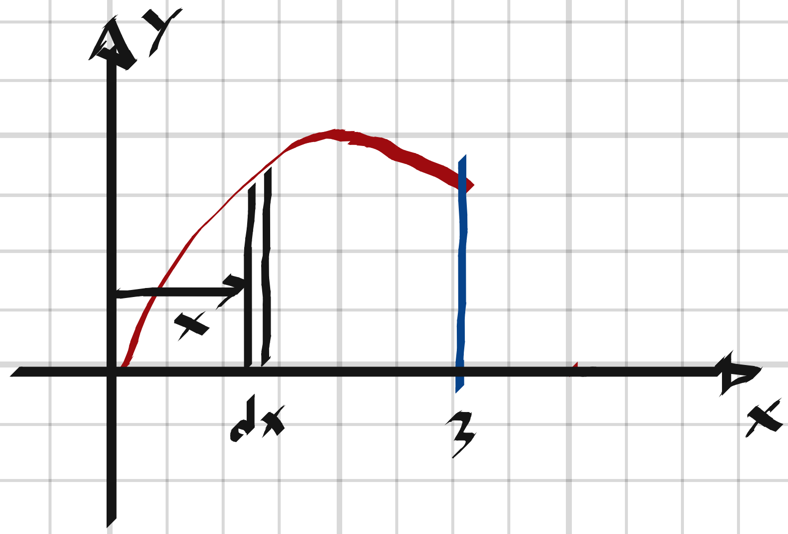
b) $$V = \int_0^4 dV = 2\pi \int_0^4 x(16 - x^2)\,dx =$$

$$= 2\pi \left[8x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 2\pi(128 - 64) = \underline{128\pi \text{ v.e.}}$$

3349 Det område som begränsas av kurvan $y = 4x - x^2$, x-axeln och linjen $x = 3$ får rotera kring y-axeln.

a) Beräkna rotationskroppens volym genom att använda metoden med cylindriska skal.

b) Visa genom överslagsräkning att ditt resultat är rimligt.



3349.

a) $$dV = 2\pi x\,dx \cdot y = 2\pi(4x^2 - x^3)\,dx$$

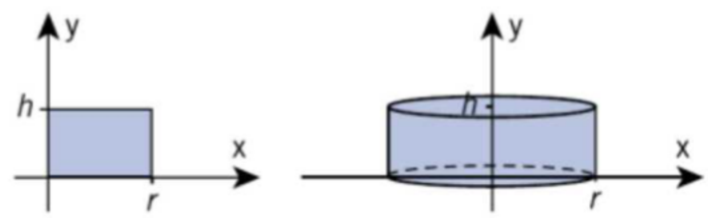
$$V = \int_0^3 dV = 2\pi \int_0^3 (4x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \cdot \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 =$$

$$= 2\pi\left(36 - \frac{81}{4}\right) = \underline{\frac{63\pi}{2} \approx 99 \text{ v.e.}}$$

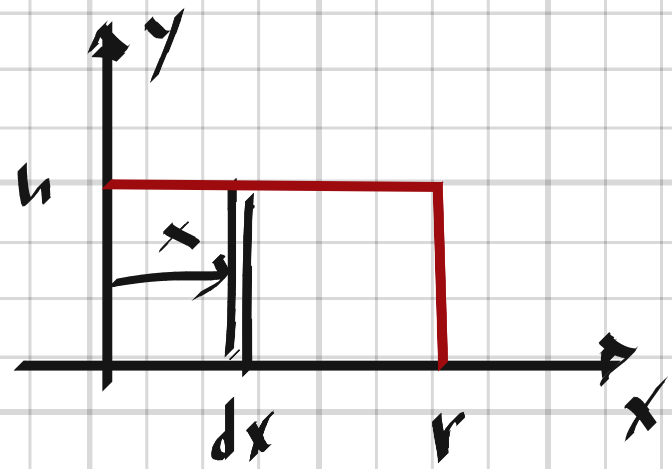
b) En cylinder med $r = 3$ och $h = 3$ $\Rightarrow$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi \approx 85$ v.e. $\Rightarrow$ Ja, resultatet är rimligt.

3350



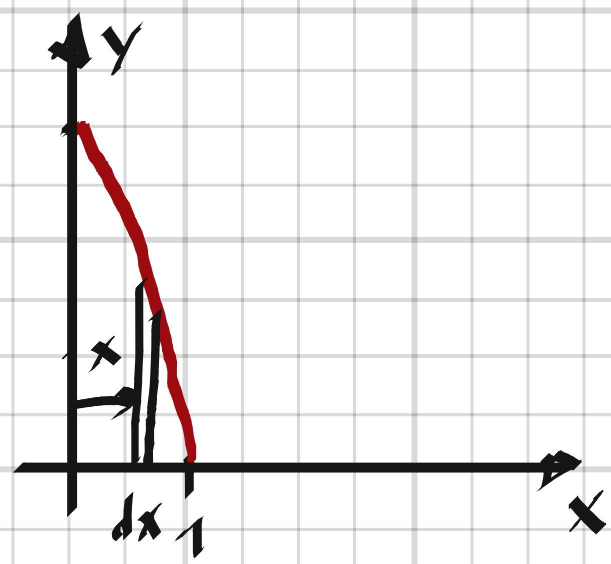
”Pucken” ovanför har volymen $V = \pi r^2 h$. Visa hur du får detta resultat med hjälp av skalmetoden.



3350. $dV = 2\pi x \cdot dx \cdot h$

$$V = \int_0^r dV = 2\pi h \int_0^r x\,dx = 2\pi h \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r = \pi r^2 h$$

3351 Kurvan $y = 3 - 2x - x^2$ innesluter tillsammans med positiva koordinataxlarna ett område som roterar kring y-axeln. Bestäm rotationskroppens volym.



3351.

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

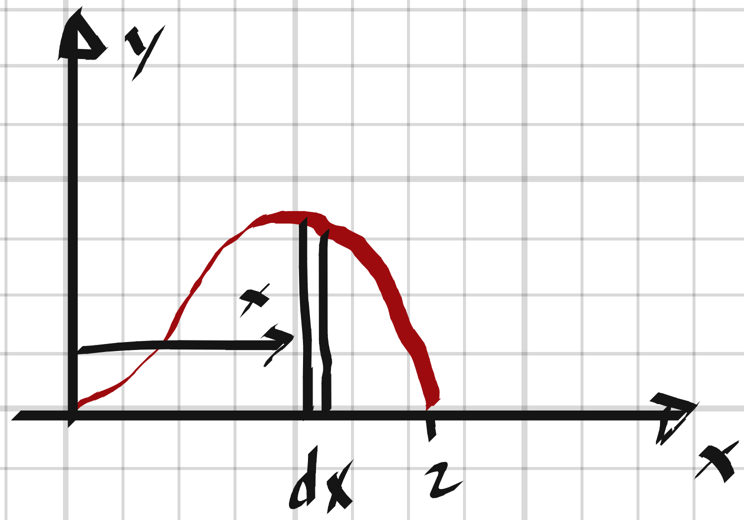
$(x-1)(x+3) = 0$

$dV = 2\pi x\,dx \cdot y = 2\pi(3x - 2x^2 - x^3)\,dx$

$$V = \int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 (3x - 2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \cdot \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi \cdot \frac{18 - 8 - 3}{12} = \frac{7\pi}{6} \approx 3{,}67 \text{ v.e.}$$

3352 Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då det område som begränsas av kurvan $y = 2x^2 - x^3$ och x-axeln i första kvadranten roterar kring y-axeln.



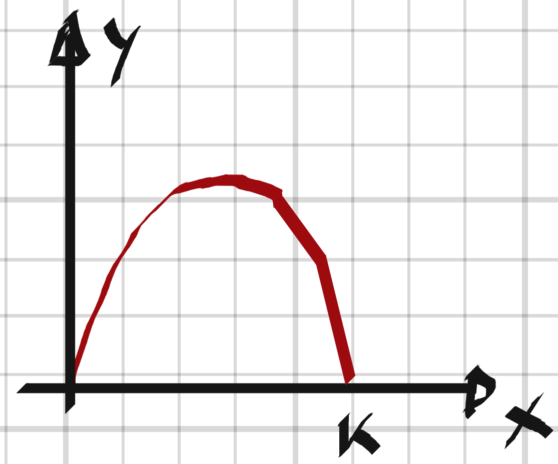
3352.

$$dV = 2\pi x\,dx \cdot y = 2\pi(2x^3 - x^4)\,dx$$

$$V = \int_0^2 dV = 2\pi\int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16\pi}{5} \approx 10.1 \text{ v.e.}$$

3353 Det område som begränsas av kurvan $y = kx - x^2$, där $k > 0$, och x-axeln får rotera först kring x-axeln och sedan kring y-axeln.

Bestäm konstanten k så att de båda rotationskropparna får samma volym.



3353. $y = x(k - x)$

$$dV_x = \pi y^2\,dx = \pi x^2(k-x)^2\,dx = \pi(k^2x^2 - 2kx^3 + x^4)\,dx$$

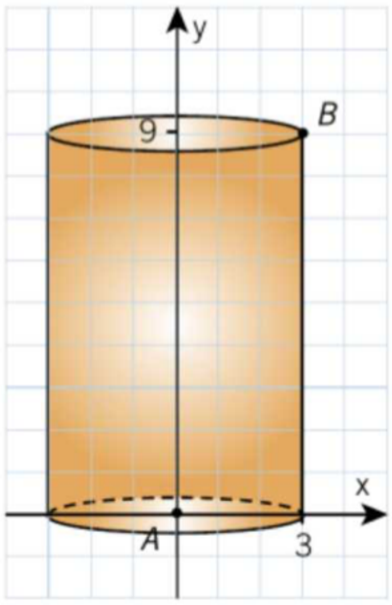
$$dV_y = 2\pi x\,dx \cdot y = 2\pi x^2(k-x)\,dx = 2\pi(kx^2 - x^3)\,dx$$

$$V_x = V_y \Rightarrow \int_0^k dV_x = \int_0^k dV_y \Rightarrow$$

$$\frac{k^5}{3} - \frac{k^5}{2} + \frac{k^5}{5} = \frac{2k^4}{3} - \frac{k^4}{2}; \quad 10k^2 - 15k^2 + 6k^2 = 20k - 15k$$

$$k^2 = 5k, \quad k > 0 \Rightarrow \underline{k = 5}$$

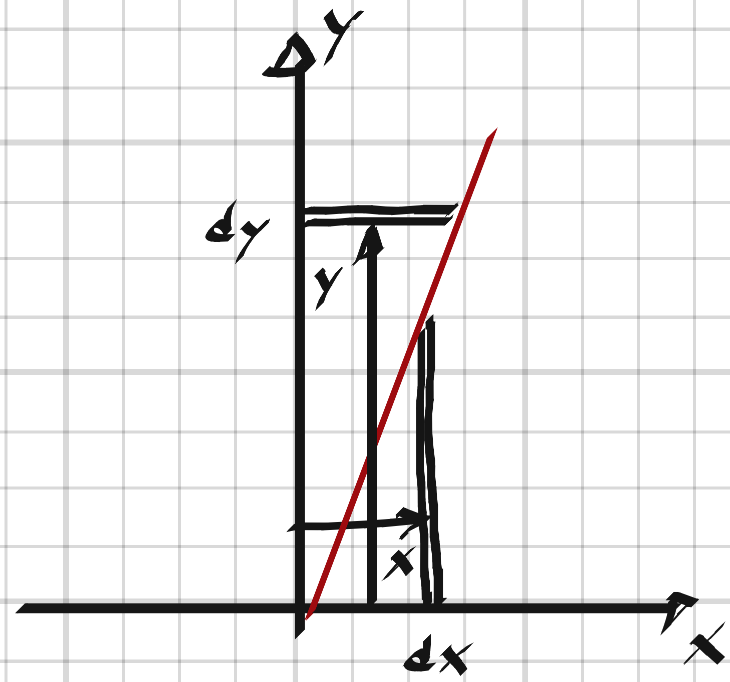
3354



Figuren visar en cylinder med två punkter, A och B i xy-planet.

Bestäm en egen funktion, $y = f(x)$, som går genom A och B.

Visa sedan hur du med hjälp av två rotationsvolymer kan bestämma hela burkens volym.



3354. $y = 3x$

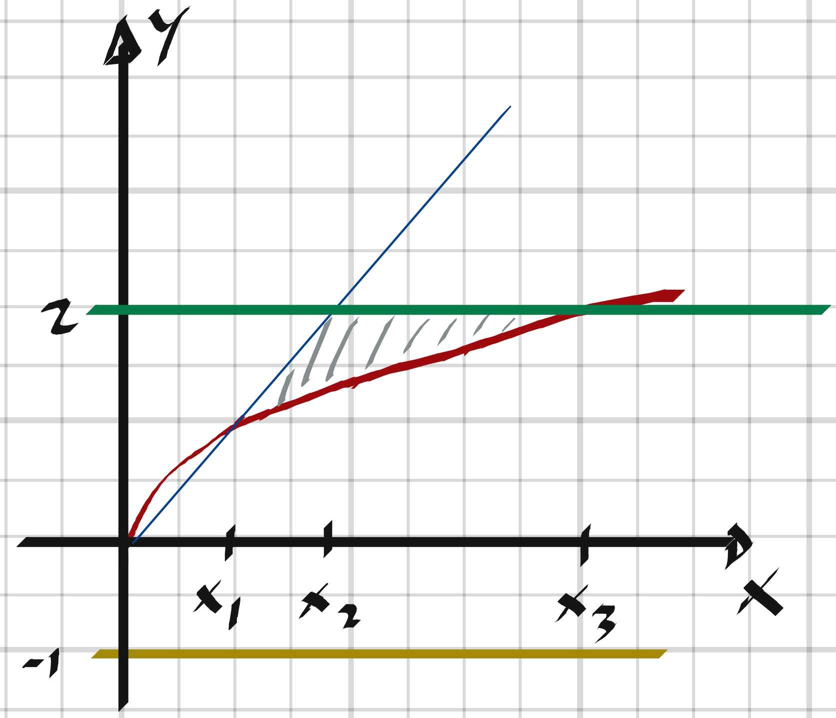
$$dV_1 = 2\pi x\,dx \cdot y = 6\pi x^2 dx$$

$$dV_2 = \pi x^2 dy = \frac{\pi}{9} y^2 dy$$

$$V = \int_0^3 dV_1 + \int_0^9 dV_2 = 6\pi \int_0^3 x^2 dx + \frac{\pi}{9} \int_0^9 y^2 dy = 54\pi + 27\pi = \underline{81\pi \text{ v.e.}}$$

3355 Det område som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$, linjen $y = x$ och linjen $y = 2$ får rotera kring linjen $y = -1$.

Beräkna rotationskroppens volym.



$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$

$$dV_1 = \pi\left((x+1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2\right)dx$$

$$dV_2 = \pi\left((2+1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2\right)dx$$

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dV_1 + \int_{x_2}^{x_3} dV_2 = \pi\int_1^2 (x^2+2x+1-x-2\sqrt{x}-1)\,dx +$$

$$+\pi\int_2^4 (9-x-2\sqrt{x}-1)\,dx = \pi\int_1^2 (x^2+x-2\sqrt{x})\,dx + \pi\int_2^4 (8-x-2\sqrt{x})\,dx$$

$$\pi\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{4x\sqrt{x}}{3}\right]_1^2 + \pi\left[8x-\frac{x^2}{2}-\frac{4x\sqrt{x}}{3}\right]_2^4 =$$

$$= \pi\left(\frac{8}{3}+2-\cancel{\frac{8\sqrt{2}}{3}}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right) + \pi\left(32-8-\frac{32}{3}-16+2+\cancel{\frac{8\sqrt{2}}{3}}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{8-1-32+4}{3}-\frac{1}{2}+2+32-8-16+2\right) = \pi\left(-\frac{21}{3}-\frac{1}{2}+12\right) =$$

$$= \pi\cdot\frac{-42-3+72}{6} = \frac{27\pi}{6} = \underline{\frac{9\pi}{2} \text{ v.e.}}$$

3357 a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$ b) $\int_1^{\infty} 5x^{-2/3}\,dx$

3357.

a) $$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3x^3}\right]_t^1 = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3t^3}\right) = \underline{\frac{1}{3}}$$

(Konvergent)

b) $$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{5}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{t\to\infty} 15\left[x^{1/3}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} 15\left(t^{1/3} - 1\right) = \underline{\infty}$$

(Divergent)

3358 a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,01}}\,dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{0,99}}\,dx$

3358.

a) $$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^{1,01}}\,dx = 100 \cdot \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{x^{0,01}}\right]_t^1 = 100 \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t^{0,01}}\right) = \underline{100}$$

(Konvergent)

b) $$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^{0,99}}\,dx = 100 \cdot \lim_{t\to\infty} \left[x^{0,01}\right]_1^t = 100 \cdot \lim_{t\to\infty} \left(t^{0,01} - 1\right) = \underline{\infty}$$

(Divergent)

3359 a) $\int_0^{\infty} \cos x\, dx$ b) $\int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x^2} dx$

3359.

a) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t \cos x\, dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\sin x\right]_0^t = \lim\limits_{t\to\infty} (\sin t) = \underline{\pm 1}$

(Divergent)

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t 2x e^{-x^2} dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[e^{-x^2}\right]_t^0 = \lim\limits_{t\to\infty} (1 - e^{-t^2}) = \underline{1}$

(konvergent)

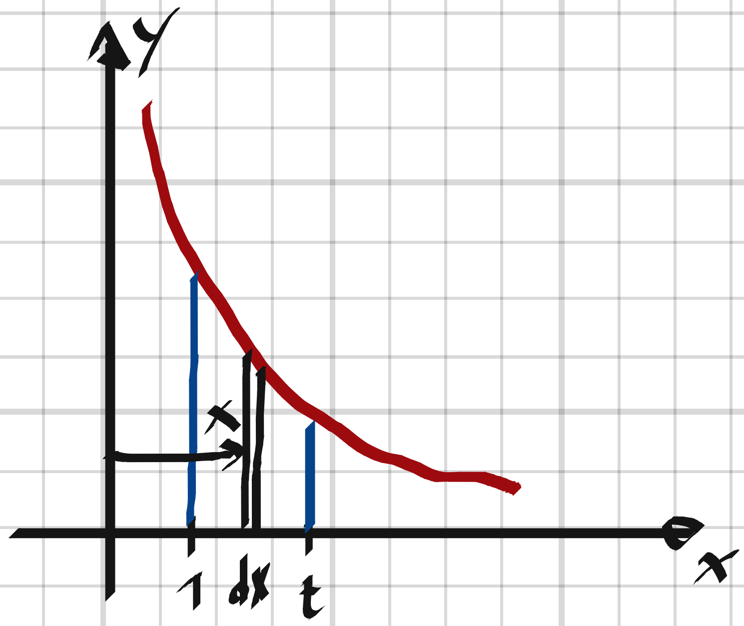
3360 Kurvan $y = \frac{1}{x}$ begränsar tillsammans med x-axeln, linjen $x = 1$ och linjen $x = t$, $t > 1$, ett område. När detta område, vars area är $A(t)$, roterar runt x-axeln, bildas en rotationskropp med volymen $V(t)$.

a) Beräkna $A(2)$ och $V(2)$.

b) Beräkna $A(10)$ och $V(10)$.

c) Undersök om arean $A(t)$ och volymen $V(t)$ närmar sig bestämda värden då t växer obegränsat.

Verkar resultaten rimliga?



3360. $dA = y\,dx = \frac{1}{x}\,dx$

$$A(t) = \int_1^t dA = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^t = \ln t$$

$$dV = \pi y^2\,dx = \pi \cdot \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$V(t) = \int_1^t dV = \pi \cdot \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left[\frac{1}{x}\right]_t^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

a) $A(2) = \ln 2$; $V(2) = 0.5\pi$

b) $A(10) = \ln 10$; $V(10) = 0{,}9\pi$

c) $A(t) \to \infty$, $t \to \infty$ Arean divergent

$V(t) \to \pi$, $t \to \infty$ Volymen konvergent