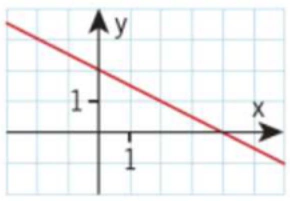
11



Ekvationen till linjen i figuren bildar tillsammans med ekvationen $2y - 3x = 42$ ett ekvationssystem.

Bestäm ekvationssystemets lösning.

11.

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + 2 \\ y = \frac{3x}{2} + 21 \end{cases}$$

$$-\frac{x}{2} + 2 = \frac{3x}{2} + 21$$

$$2x = -19$$

$$x = -\frac{19}{2} \quad , \quad y = \frac{19}{4} + 2 = \frac{19+8}{4} = \frac{27}{4}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{38}{4}, \frac{27}{4}\right)$$

12 Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 5x + \frac{y}{3} = 0{,}5 \\ 6x - 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} y = -15x + 1.5 \\ y = 3x - 7.5 \end{cases}$$

$$3x - 7.5 = -15x + 1.5$$

$$18x = 9$$

$$x = 0.5 \quad , \quad y = -15 \cdot 0.5 + 1.5 = -6.0$$

$$\underline{(x, y) = (0.5, -6.0)}$$

---

13 En ekvation har lösningen $x = 2$. Ge ett exempel på ekvationen om den är en

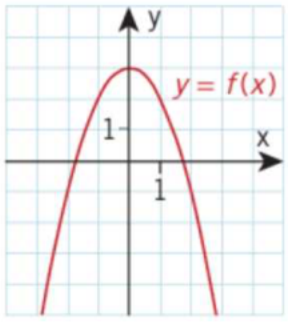
a) potensekvation

b) exponentialekvation.

13. a) $\underline{x^3 = 8}$

b) $\underline{3^x = 3^2}$

14 Är påståendet om andragradsfunktionen $y = f(x)$ sant eller falskt? Motivera ditt svar.



a) Ekvationen $f(x) = 0$ har bara en lösning.

b) $f(2) > 1$

c) Funktionen saknar x-term.

d) Koefficienten framför x^2-termen i funktionens formel är mindre än noll.

e) Ekvationen $f(x) = 4 - x$ saknar reell lösning.

14. a) Falskt - Den har två lösningar $x = \pm\sqrt{3}$

b) Falskt - $f(2) = -1$

c) Sant - $f(x) = -x^2 + 3$

d) Sant - parabeln har ett maximum

e) Sant - linjen $4-x$ skär ej parabeln

---

15 Lös ekvationen

$2(x-3)^2 + (x+5)(x-3) = 0$

15. $(x-3)\big(2(x-3) + (x+5)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$

$$2x_2 - 6 + x_2 + 5 = 0$$

$$3x_2 = 1$$

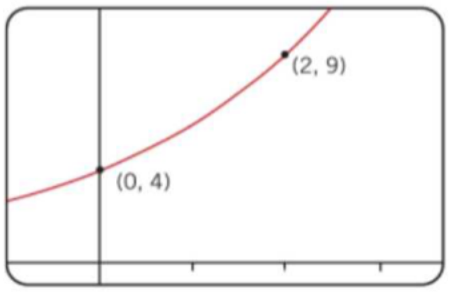
$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\underline{x_1 = 3 \; , \; x_2 = \frac{1}{3}}$$

---

16 Figuren visar grafen till en exponentialfunktion som går genom de markerade punkterna.

Bestäm ekvationen för exponentialfunktionen.



16.

$y = C \cdot a^x \quad , \quad a > 0$

$(0,4) \Rightarrow C = 4$

$(2,9) \Rightarrow 4 \cdot a^2 = 9 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\underline{y = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}$

17 Summan av två tal är 40 och summan av talens kvadrater är 1 000.

Vilka är talen?

17.
$$\begin{cases} x+y=40 \\ x^2+y^2=1000 \end{cases}$$

$$y^2=(40-x)^2=1600-80x+x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2+1600-80x=1000$$

$$x^2-40x+300=0$$

$$x=20\pm\sqrt{400-300}=20\pm10$$

$$x_1=10 \Rightarrow y_1=30$$

$$x_2=30 \Rightarrow y_2=10$$

Talen är 10 och 30

18 Förenkla uttrycken.

a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

b) $\frac{3\lg 10^a - 10^{\lg 2a}}{a}$

c) $\left(\sqrt{10ab} - \sqrt{5ab}\right)\left(\sqrt{10ab} + \sqrt{5ab}\right)$

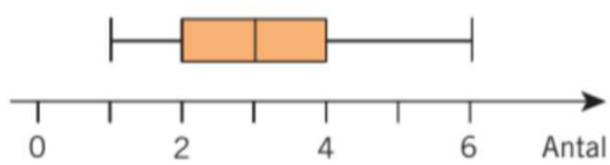
18. a) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{4ab}{4} = \underline{ab}$

b) $\frac{3\cdot a - 2\cdot a}{a} = \underline{1}$

c) $10ab - 5ab = \underline{5ab}$

---

19 På en filmfestival tillfrågades 12 personer om hur många filmer de hade sett under festivalen. De 12 svaren redovisas i lådagrammet.



Det var endast två personer av de tolv som hade sett 3 filmer.

Hur många av de tolv personerna kan ha sett 2 filmer?

19. 6 personer är fördelade på 1, 2 eller 3 filmer,
Eftersom 1 person av dessa sett 3 filmer
och 2 filmer representerar q_1, har
endast 1 person sett 1 film.
Alltså har $6-1-1=4$ <u>personer sett 2 filmer.</u>

---

20 Ett närmevärde till lg 50 är 1,7.
Bestäm med hjälp av detta lösningen till ekvationen $10^x = 2500$.

20.

$$10^x = 50^2$$

$$\lg 10^x = \lg 50^2$$

$$x = 2 \cdot \lg 50 \approx 2 \cdot 1{,}7 = \underline{3{,}4}$$

---

21 Lös ekvationen
$f(a+1) + f(a-1) = 14$ där $f(x) = x^2 + x$

21.

$$(a+1)^2 + a + 1 + (a-1)^2 + a - 1 = 14$$

$$a^2 + 2a + 1 + a + 1 + a^2 - 2a + 1 + a - 1 = 14$$

$$2a^2 + 2a + 2 = 14$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\underline{a_1 = -3 \ , \ a_2 = 2}$$

---

22 För vilket värde på c har kurvan
$y = x^2 - 8x + c$
sin minimipunkt på x-axeln?

22. $y = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + c = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16 - c}$

$16 - c = 0 \Rightarrow \underline{c = 16}$

---

23 Lös ekvationen $8^{\frac{x}{4}} + 8^{\frac{x}{4}} = 2^{13}$

23. $2 \cdot 8^{\frac{x}{4}} = 2^{13}$

$2 \cdot 2^{\frac{3x}{4}} = 2^{13}$

$2^{\frac{3x}{4}+1} = 2^{13}$

$\frac{3x}{4} + 1 = 13$

$x = \frac{12 \cdot 4}{3}$

$\underline{x = 16}$

---

30 Tabellen visar medeltemperaturen på en ort i Sverige några dagar under en oktobermånad.

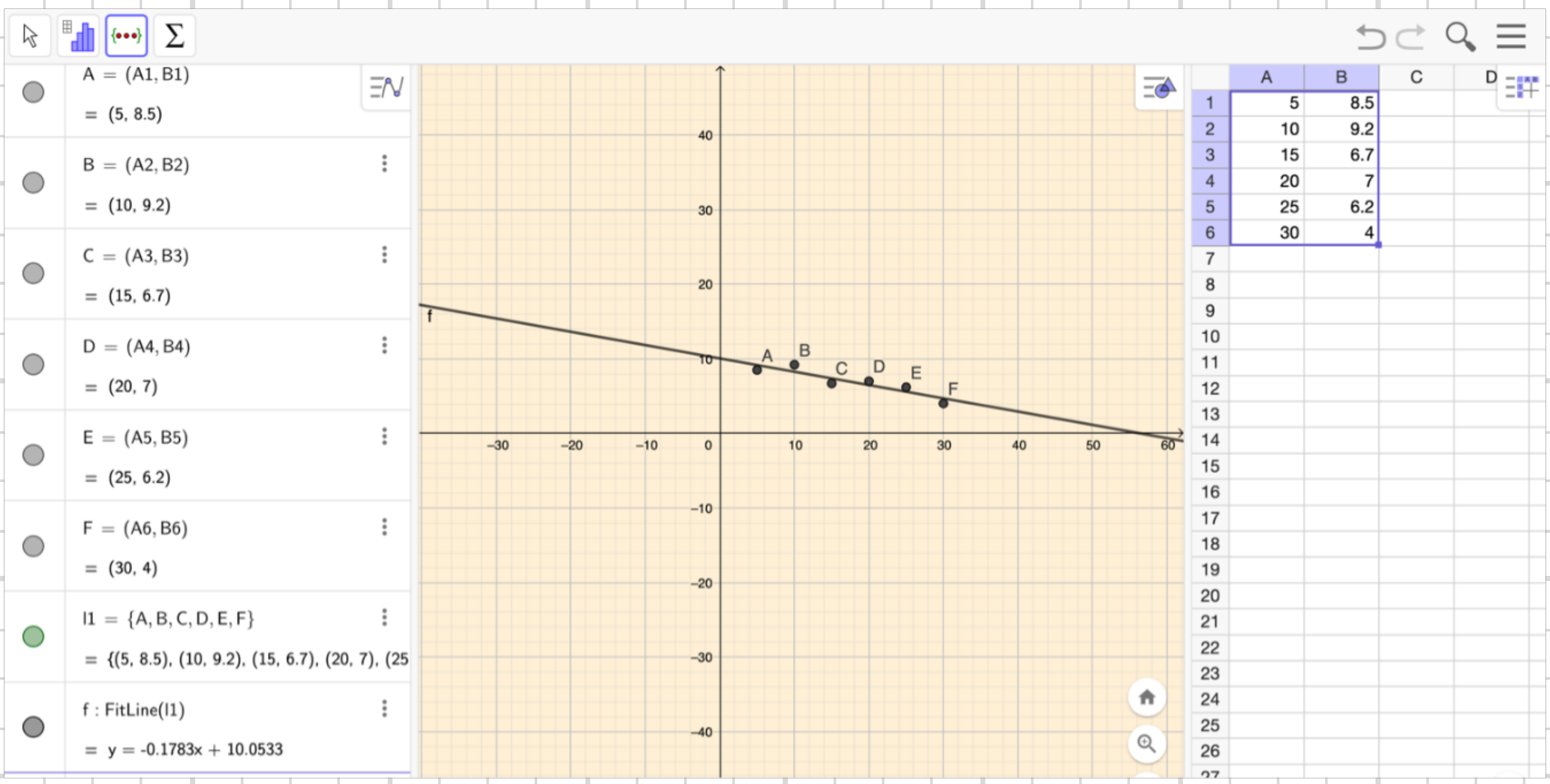
Datum	Temperatur (°C)
5	8,5
10	9,2
15	6,7
20	7,0
25	6,2
30	4,0

a) Bestäm med linjär regression en ekvation som beskriver sambandet mellan temperaturen y °C och månadens datum x.

b) Medeltemperaturen den 20:e har blivit fel i tabellen. Det rätta värdet ska vara 5,2.

Blir korrelationen starkare eller svagare med det korrekta värdet? Motivera ditt svar.

30. a) Geogebra ger $y = -0.18x - 10.1$



b) Korrellationen blir svagare.

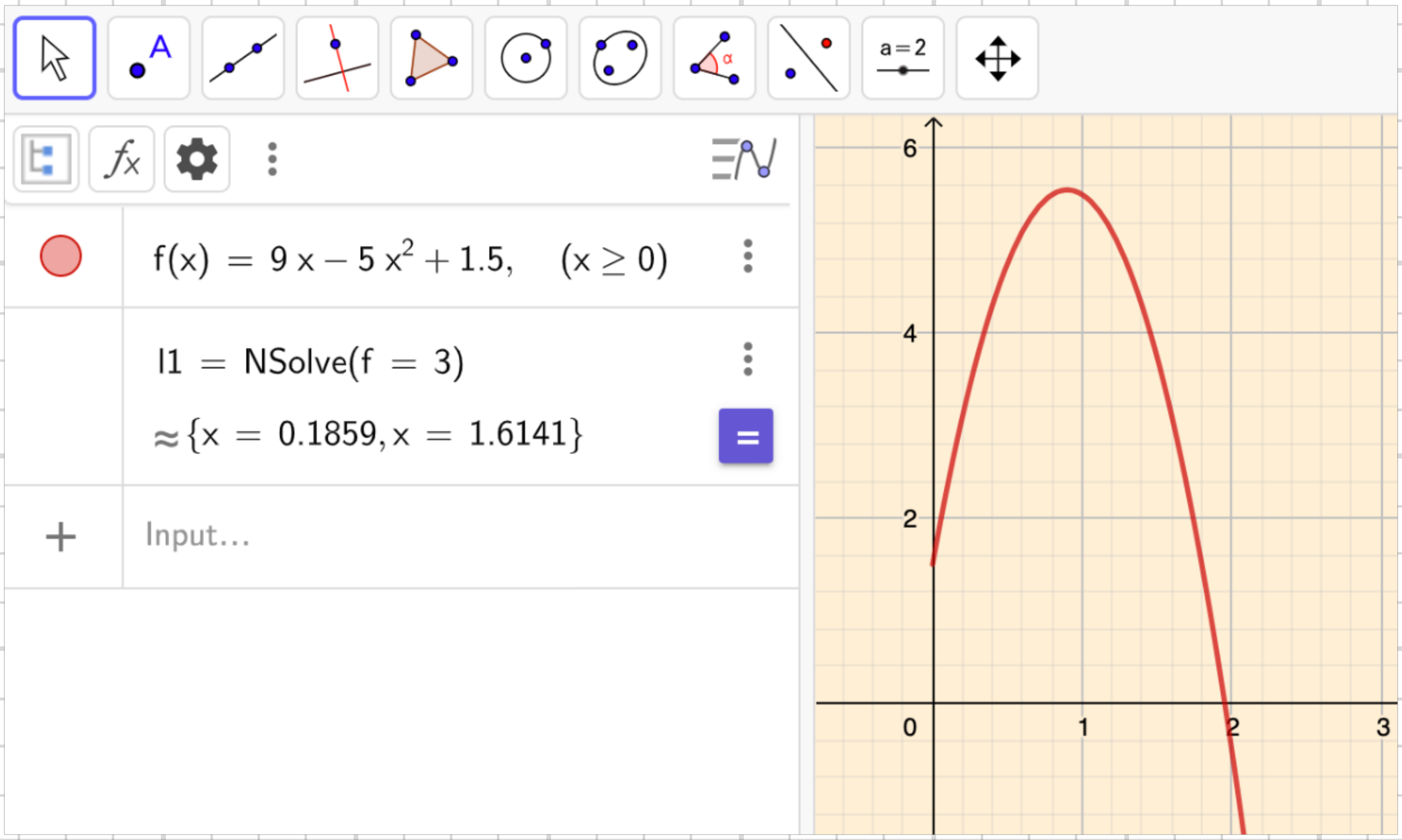
$r = -0.91 \rightarrow r = -0.90$

31 En boll kastas rakt upp. Bollens höjd över marken, y meter, efter x sekunder bestäms av funktionen

$y = 9x - 5x^2 + 1{,}5$

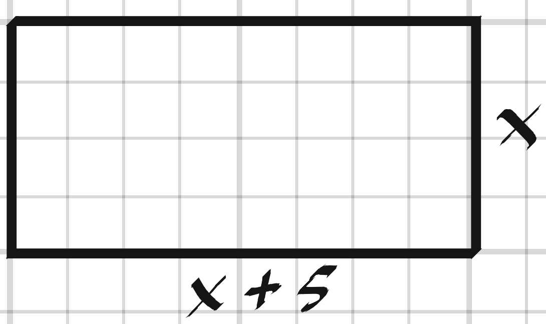
Efter hur lång tid är bollen 3 m över marken?

31. Lösning i Geogebra ger $x_1 = 0.2$ s och $x_2 = 1.6$ s



---

32 I en rektangel med arean 84 cm² är längden 5 cm längre än bredden.
Hur långa är rektangelns sidor?



32.

$$x(x+5) = 84$$

$$x^2 + 5x - 84 = 0$$

$$x = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 84} = -2{,}5 + 9.5 = 7$$

Sidornas längder är 7 och 12 cm

---

33 Formeln $y = C \cdot a^x$ används för att beräkna den mängd y mg av ett radioaktivt ämne som återstår efter tiden x år. I ett laboratorium finns 75 mg av ett radioaktivt ämne med halveringstiden 8,62 år.

a) Vilket värde har talet a i formeln?

b) Efter hur lång tid återstår 15 % av det radioaktiva ämnet?

c) Du vill skriva formeln som $y = C \cdot 10^{kx}$. Vilket värde har då konstanten k?

33. a) $a^{8{,}62} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8{,}62}} = \underline{0{,}923}$

b) $0{,}923^x = 0{,}15 \Rightarrow x = \dfrac{\lg 0{,}15}{\lg 0{,}923} \approx \underline{24 \text{ år}}$

c) $y = 75 \cdot 0{,}923^x$

$10^{kx} = 0{,}923^x$

$10^k = 0{,}923 \Rightarrow k = \lg 0{,}923 \approx \underline{-0{,}0349}$

34 a) Välj två heltal som följer efter varandra, t.ex. 8 och 9.
Visa att räkneregel 1 och 2 ger samma resultat.

Räkneregel 1: Beräkna talens summa.

Räkneregel 2: Subtrahera kvadraten av det större talet med kvadraten av det mindre talet.

b) Välj två tvåsiffriga heltal som följer efter varandra. Visa att räkneregel 1 och 2 ger samma resultat.

c) Välj två decimaltal där det ena är 1 större än det andra. Visa att räkneregel 1 och 2 ger samma resultat.

d) Visa att räkneregel 1 och 2 alltid ger samma resultat för två tal, där det ena är 1 större än det andra.

34. a) $9+8=17$

$81-64=17$

b) $4+3=7$

$16-9=7$

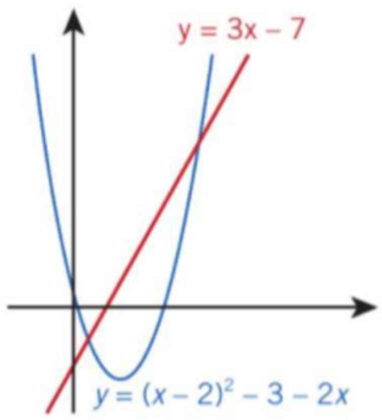
c) $5.4+4.4=9.8$

$5.4^2-4.4^2=9.8$

d) $x+1+x=2x+1$

$(x+1)^2-x^2=2x+1$

35 Figuren visar grafen till en andragradsfunktion och en rät linje.



a) Visa med beräkningar hur man bestämmer andragradsfunktionens minsta värde.

b) Lös ekvationen
$(x-2)^2 - 3 - 2x = 3x - 7$

35. a) $y = x^2 - 4x + 4 - 3 - 2x = x^2 - 6x + 1$

Symmetrilinje: $x = 3$

$y_{min} = y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = 9 - 18 + 1 = \underline{-8}$

b) $x^2 - 6x + 1 = 3x - 7$

$x^2 - 9x + 8 = 0$

$x = 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 8} = 4,5 \pm 3,5$

$\underline{x_1 = 1 \ , \ x_2 = 8}$

36 För vilka reella värden på talet a har andragradsekvationen $x^2 + 8a = 4x$ icke-reella rötter?

36. $x^2 - 4x + 8a = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{4 - 8a}$

Icke reella rötter $\Rightarrow$ $4 - 8a < 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a > \frac{1}{2}}$

---

37 Värdet på en fastighet kan under en treårsperiod förenklat beskrivas med funktionen

$f(t) = 4{,}5 \cdot 1{,}125^t$

där $f(t)$ är värdet i miljoner kr och t är tiden i år efter första årets början.

Skriv om funktionen så att variabeln x är tiden i månader efter första årets början.

37. $f(t) = 4.5 \cdot 1.125^{\frac{t}{12}} = \underline{4.5 \cdot 1.00986^t}$

---

38 Då grafen till andragradsfunktionen $f(x) = x^2 + a$ och grafen till den linjära funktionen $g(x) = x$ ritas i samma koordinatsystem kan tre olika fall inträffa:

1 Graferna skär varandra i två punkter.

2 Graferna skär varandra i en punkt.

3 Graferna skär inte varandra.

a) Vilket fall inträffar då $a = 0$?

b) För vilket eller vilka värden på a inträffar respektive fall?

38. a) $a=0 \Rightarrow x^2 = x$

$x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

1: Graferna skär varandra i två punkter

b) $x^2 + a = x$

$x^2 - x + a = 0$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4a}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

1: $1-4a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{4}$

2: $1-4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

3: $1-4a < 0 \Rightarrow a > \frac{1}{4}$

39 En odlare säljer äpplen av två olika sorter: Aroma och Elise. Elise är 5 kr billigare per kilogram jämfört med Aroma.

Magdalena köper Aroma för 280 kr av odlaren. Hade hon i stället köpt Elise hade hon fått 1 kg mer för samma belopp.

Bestäm algebraiskt odlarens pris per kilogram för de två äppelsorterna.

39. Pris per kg: k_A, $k_E = k_A - 5$

Kilovikt: m_A, m_E

$$\begin{cases} m_A \cdot k_A = 280 \\ (m_A + 1) \cdot k_E = 280 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1): \\ (2): \end{matrix} \begin{cases} m_A \cdot k_A = 280 \\ (m_A + 1)(k_A - 5) = 280 \end{cases}$$

$$(1+2): m_A \cdot k_A = (m_A + 1)(k_A - 5)$$

$$m_A \cdot k_A = m_A \cdot k_A - 5m_A + k_A - 5$$

$$m_A = \frac{k_A - 5}{5}$$

$$(1): \frac{k_A - 5}{5} \cdot k_A = 280$$

$$k_A(k_A - 5) = 1400$$

$k_A^2 - 5k_A - 1400 = 0$ $\qquad$ $k_A(k_A - 5) = 1400$

$k_A = 2.5 \pm \sqrt{6.25 + 1400} = 2.5 \underset{(-)}{+} 37.5 = 40$

$k_E = k_A - 5 = 40 - 5 = 35$

Odlarens pris är 40 kr/kg resp 35 kr/kg