10 Faktorisera uttrycket $20a^2 - 5b^2$ så långt som möjligt.

10. $5(4a^2 - b^2) = \underline{5(2a+b)(2a-b)}$

---

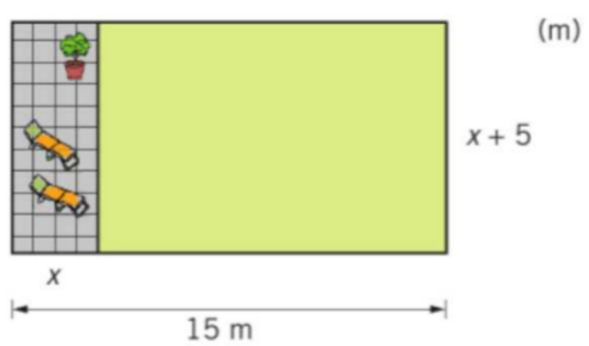
11 Finns det något värde på k så att linjen $y = kx + 2$ aldrig skär linjen $2x + 3y + 2 = 0$?
Motivera ditt svar.

11. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$\underline{k = -\frac{2}{3}}$ (linjerna blir parallella)

---

12 En del av familjen Perssons trädgård består av en uteplats och en gräsmatta. Hela ytan har formen av en rektangel med längden 15 m.



Gräsmattan har arean 96 m^2.
Vilka mått har uteplatsen?

12.

$(15-x)(x+5) = 96$

$15x + 75 - x^2 - 5x = 96$

$x^2 - 10x + 21 = 0$

$x = 5 \pm\sqrt{25-21} = 5 \pm 2$

$x_1 = 3,\ x_2 = 7$

<u>Antingen 3×8 m eller 7×12 m</u>

13 Grafen till andragradsfunktionen $y = c - 2x^2$ och linjen $y = 2x$ skär varandra i två punkter. Den ena punkten har koordinaterna (2, 4).

Bestäm algebraiskt den andra punktens koordinater.

13. $(2,4) \Rightarrow \quad c - 2\cdot 2^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 12$

$$2x = 12 - 2x^2$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$2(x^2 + x - 6) = 0$$

$$(x-2)(x-x_2) = x^2 + x - 6$$

$$x^2 - (x_2+2)x + 2x_2 = x^2 + x - 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3$$

$$y_2 = 2x_2 = -6$$

Den andra skärningspunkten = $\underline{(-3, -6)}$

14 Förenkla uttrycket

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{x}+x\right)$$

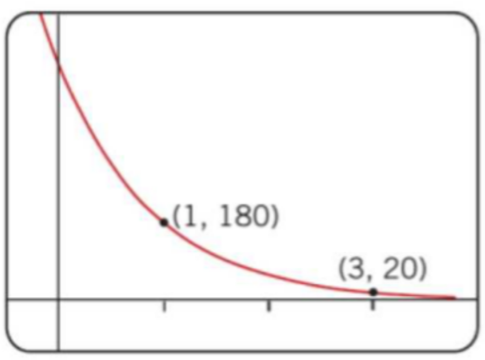
så långt som möjligt.

14.

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+x^2=\underline{2x^2+2}$$

---

15 Grafen till en exponentialfunktion $y = C \cdot a^x$ visas i figuren.



a) I vilket intervall finns värdet på konstanten a i detta exempel

A $-1 < a < 0$
B $0 < a < 1$
C $1 < a < 2$

b) Bestäm konstanterna C och a.

c) Beräkna y då $x = -1$.

15.

a) $\underline{B:\ 0 < a < 1}$ (avtagande funktion)

b) $$\begin{cases} C\cdot a^1 = 180 \\ C\cdot a^3 = 20 \end{cases} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = (\pm)\frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$C = \frac{180}{a} = 3\cdot 180 = \underline{540}$$

c) $$y(-1) = 540\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 540\cdot 3 = \underline{1620}$$

---

16 Summan av två tal är 5 och summan av talens kvadrater är 14,5.
Vilka är talen?

16.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 14{,}5 \end{cases} \qquad y = 5 - x \quad \Rightarrow \quad y^2 = (5-x)^2$$

$$x^2 + (5-x)^2 = 14{,}5$$

$$2x^2 + 25 - 10x = 14{,}5$$

$$x^2 - 5x + 5{,}25 = 0$$

$$x = 2{,}5 \pm 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1{,}5 \Rightarrow y_1 = 3{,}5 \\ x_2 = 3{,}5 \Rightarrow y_2 = 1{,}5 \end{array}\right\} \text{Talen är } 1{,}5 \text{ och } 3{,}5$$

---

17 För funktionen f gäller att $f(x) = ax + b$.
Bestäm funktionen om
$f(x) - 2 = f(x + 1)$ och $f(-2) = 0$.

17.

$$f(x) = f(x+1) + 2$$

$$ax + b = a(x+1) + b + 2$$

$$ax + b = ax + a + b + 2$$

$$a = -2$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-2) + b = 0 \Rightarrow b = -4$$

$$f(x) = -2x - 4$$

18 Rita av tabellen och fyll i de fem värden som saknas.

$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = (x+1)^2$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
2	3	9	80	16
-3	8	4	15	81

18.

$f(2) = 2^2 - 1 = 3$

$g(2) = (2+1)^2 = 9$

$g(x) = 4 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$g(f(x)) = (x^2 - 1 + 1)^2 = x^4$

$x^4 = 81 \Rightarrow x = (\pm)3 = -3$

$f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$

$f(g(x)) = (x+1)^4 - 1$

$f(g(-3)) = (-3+1)^4 - 1 = 16 - 1 = 15$

23 År 1960 fanns det i Östersjön uppskattningsvis 20 000 gråsälar. 1980 fanns endast 2 000 kvar.

a) Vilken var den genomsnittliga årliga procentuella minskningen av antalet gråsälar mellan åren 1960 och 1980?

Efter 1980 har sälstammen återhämtat sig. Uppskattningsvis fanns det år 2002 cirka 12 000 gråsälar. En prognos sa då att stammen skulle fortsätta öka exponentiellt med 6,5 % per år.

b) Under vilket år återgick sälstammen till 20 000 sälar enligt prognosen?

(NP, text ändrad)

23.

a) $20000 \cdot x^{20} = 2000$

$x = \left(\frac{1}{10}\right)^{1/20} = 0{,}891 \Rightarrow$ Minskningen $= 11\%$

b) $12000 \cdot 1{,}065^{x} = 20000$

$x = \dfrac{\lg \frac{10}{6}}{\lg 1{,}065} \approx 8 \Rightarrow$ År $2002 + 8 =$ År 2010

---

24 En exponentialfunktion går genom punkterna (0, 3 000), (2, 1 200) och (4, *b*). Bestäm *b*.

$y = C \cdot a^{x}$

24. $(0, 3000) \Rightarrow C = 3000$

$(2, 1200) \Rightarrow 3000 \cdot a^{2} = 1200 \Rightarrow a = \pm\sqrt{0{,}4}$

$(4, b) \Rightarrow b = 3000 \cdot 0{,}4^{2} = 480$

---

25 Den räta linjen $y = ax + 5/2$ går genom minimipunkten för grafen till
$f(x) = 2x^2 - 14x + 20$
Bestäm värdet på a.

25.

Minimipunkt

$2(x^2 - 7x + 10) \Rightarrow$ Symmetrilinjen $x = 3{,}5$

$f_{min} = f(3{,}5) = 2 \cdot 3{,}5^2 - 14 \cdot 3{,}5 + 20 = -4{,}5$

a-värde

$a \cdot 3{,}5 + 5/2 = -4{,}5 \Rightarrow$

$a = -2$

26 När ogräsmedlet Meklorprop används i naturen bryts det efter hand ned. Vid konstant jordtemperatur gäller att den kvarvarande mängden avtar exponentiellt med tiden. Den tid det tar tills hälften av ogräsmedlet är kvar (halveringstiden) beror på jordtemperaturen enligt tabellen nedan.

Jordtemperatur (°C)	Halveringstid i dygn
5	20
10	12
20	3

Vid ett tillfälle besprutades en potatisåker med 8 kg Meklorprop. Marktemperaturen var 5 °C vid besprutningstillfället och konstant under de följande veckorna.

Hur många procent av den ursprungliga mängden ogräsmedel fanns kvar i jorden efter 10 dygn? (*NP*)

26.

$$y = C \cdot a^x$$

$$(0, 8) \Rightarrow C = 8$$

$$\left(20, \frac{8}{2}\right) \Rightarrow 8 \cdot a^{20} = 4 \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20} = 0{,}9659$$

$$y = 8 \cdot 0{,}9659^x$$

$$\text{Kvarvarande andel} = \frac{y(10)}{y(0)} = 0{,}9659^{10} \approx 0{,}71 = \underline{71\,\%}$$

27 Undersök om följande påståenden är sanna eller falska:

a) En rät linje skär alltid grafen till en andragradsfunktion på två ställen.

b) Graferna till två andragradsfunktioner kan skära varandra i 0, 1 eller 2 punkter.

27.

a) Falskt.

Den räta linjen kan:

1. Ej skära parabeln
2. Tangera parabeln
3. Skära parabeln i två punkter.

b) Sant.

Samma alternativ som ovan gäller även för två parabler.