2103 Sant eller falskt?
Motivera med delbarhetsreglerna.
Kontrollera med räknare.

a) $5|710$ c) $3\nmid 402$
b) $4|216$ d) $6|202$

2103 a) Sant - Alla tal som slutar med 0 eller 5 är delbara med 5.

b) Sant - Om de 2 sista siffrorna (16) är delbart med 4 så är hela talet delbart med 4.

c) Falskt - Om talets siffersumma (6) är delbar med 3 så är hela talet delbart med 3.

d) Falskt - Talet är inte delbart med 3 och därför ej heller delbart med 6.

2104 Är talet ett primtal?
Om inte dela upp talet i primfaktorer.

a) 21 c) 52
b) 23 d) 87

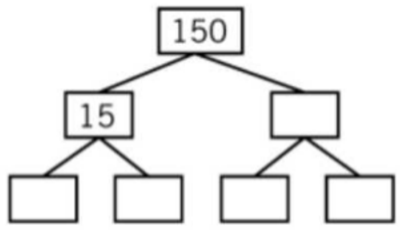
2104. a) Nej, $21 = 7 \cdot 3$

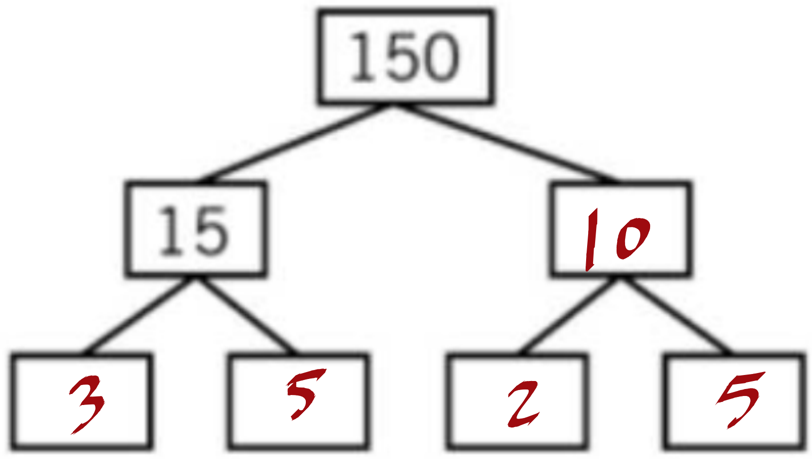
b) Ja

c) Nej, $52 = 2 \cdot 26 = 2 \cdot 2 \cdot 13$

d) Nej, $87 = 3 \cdot 29$

2105 Faktorisering av 150 kan redovisas i ett faktorträd. Rita av trädet och fyll i de faktorer som saknas.





2106 $A = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

Är A delbart med

a) 15 b) 16?

Motivera ditt svar.

2106. a) Ja - $3 \cdot 5 = 15$ är en faktor i A

b) Nej

2107 Dela upp i primfaktorer

a) 2091 b) 6045

2107. a) $2091 = 3 \cdot 697 = \underline{3 \cdot 17 \cdot 41}$

b) $6045 = 5 \cdot 1209 = 5 \cdot 31 \cdot 39 = \underline{5 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 13}$

2108 Kan man avgöra om talet är udda eller jämnt, om n är ett heltal?

a) $2n - 1$ c) $n - 1$

b) $2n - 2$ d) $n + 2$

2108. a) Ja, $2n-1$ är ett udda tal.

b) Ja, $2n-2 = 2(n-1)$ är ett jämnt tal

c) Nej

d) Nej

2109 En ung mamma multiplicerar sina barns åldrar och får 105 som svar.

Hur många barn har mamman och hur gamla är de?

2109. $105 = 1 \cdot 5 \cdot 21 = 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$

Flera alternativ är möjliga,

ex v. 4 (1, 3, 5 och 7) eller 3 (3, 5 och 7)

2110 Ange två olika värden på det positiva talet m så att $7^3 | (m \cdot 7^2)$.

2110. Ex.v. $m_1 = 7$ och $m_2 = 7^2$

2111 Visa att $(m^2 - 1)/8$ är ett jämnt tal om $m = 8k + 1$ där k är ett heltal.

2111. $\frac{m^2-1}{8} = \frac{(8k+1)^2-1}{8} = \frac{64k^2+16k}{8} = 8k^2+2k =$

$= 2k(4k+1)$ - Delbart med 2 => jämnt tal. #

2112 I januari 2013 var det största kända primtalet ett så kallat Mersenneprimtal med 17 425 170 siffror.

Hur stora faktorer (antal siffror) måste man kontrollera med för att veta att talet är ett primtal?

2112. Ta bort alla jämna siffor =>

$\frac{17425170}{2} = 8712585$

2113 Visa att

a) $4 | (1200 + a)$ om a är delbart med 4.

b) $6 \nmid 3k$ om k är ett udda tal.

2113. a) Om a delbart med 4 $\Rightarrow$ a kan skrivas som $4b$, $b \in \mathbb{Z}$

$$1200 + a = 1200 + 4b = 4(300 + b) \quad \#$$

b) k udda $\Rightarrow$ k kan skrivas som $2b+1$, $b \in \mathbb{Z}$

$3k = 3(2b+1)$ # (Delbar med 3 men inte med 2)

2114 Visa att om differensen mellan två heltal är udda så måste det ena talet vara jämnt och det andra udda.

2114. $a - b = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

Om a är udda kan a skrivas som $2c+1$

$2c+1-b = 2k+1$

$b = 2c+1-2k-1 = 2(c+k)$ jämnt #

Om a är jämnt kan a skrivas som $2c$

$2c - b = 2k+1$

$b = 2c-2k-1 = 2(c-k)-1$ udda #

2115 Visa att $p^2 - 1$ är delbart med 24 om p är ett primtal större än 3.

2115. $24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

p primtal $> 3 \Rightarrow p$ udda

$p^2 - 1 = (p+1)(p-1) \Rightarrow$

Både $(p+1)$ och $(p-1)$ är jämna, dvs delbara med 2.

Något av $(p+1)$ och $(p-1)$ är delbart med 4.

Då måste det andra vara delbart med 3.

2116 Ett Mersennetal är ett tal av typen $m = 2^p - 1$, där p är ett primtal.
Visa att påståendet
"om p är ett primtal så är m ett primtal"
är falskt.

2116

Om ex.v $p = 11 \Rightarrow m = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ #

2119 a) Finn alla gemensamma faktorer till 45 och 75.
b) Bestäm SGF(45, 75)
c) Bestäm MGM(45, 75)

2119.

Geogebra

a) $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$

PrimeFactors(45)
PrimeFactors(75)

Gemensamma faktorer = 3, 5 och 15

b) SGF(45,75) = $3 \cdot 5 = 15$

GCD(45,75)

c) MGM(45,75) = $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 225$

LCM(45,75)

2120 Beräkna

a) SGF (32, 132)
b) SGF (11, 30)
c) MGM(36, 27)
d) MGM(17, 18)

2120.

a) Geogebra GCD(32, 132) = 4

b) -"- GCD(11,30) = 1

c) -"- LCM(36,27) = 108

d) -"- LCM(17,18) = 306

a) $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$

c) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

2121 Vad menas med att två tal är relativt prima? Ge ett exempel.

2121. Om talen saknar gemensam faktor,

dvs om $SGF(a,b) = 1$

ex.v $SGF(3,5) = 1$

2122 a) Kan bråket $\frac{13}{25}$ förkortas? Motivera.

b) Bestäm minsta gemensamma nämnare och beräkna summan.

7/20 + 4/21 – 7/30

Svara i enklaste form.

2122.

a) Nej, då 13 är ett primtal

b) Geogebra $LCM(\{20, 21, 30\}) = 420$

$$\frac{7 \cdot 21 + 4 \cdot 20 - 7 \cdot 14}{420} = \frac{129}{420} = \frac{43}{140}$$

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$21 = \cdot 3 \cdot 7$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$lcm = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

2123 Två löpare startar samtidigt. När är de sida vid sida igen om den ena springer ett varv på 60 s och den andra på 50 s?

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

$\text{lcm} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$

2123. $\text{LCM}(60,50) = \underline{300 \text{ s}}$

Den ena löparen har då sprungit 5 varv och den andra 6 varv.

2124 Cikador lever en lång tid i jorden som ägg och larver innan de kläcks till färdiga insekter och fortplantar sig igen. För en art går det 17 år mellan varje kläckning.

Antag att cikadorna kläcks när de rovdjur som äter cikador är som flest. Hur många år tar det innan detta sker igen om rovdjurens antal är som störst vart

a) 4:e år b) 6:e år?

Hur ändras svaren i a) och b) om cikadorna istället kläcks vart

c) 16:e år d) 18:e år?

0 0

(4·4)

17 16

(4·4)

34 32

(4·4)

51 48

(4·6)

68 68

2124. a) $\text{LCM}(17,4) = \underline{68 \text{ år}}$

b) $\text{LCM}(17,6) = \underline{102 \text{ år}}$

c) $\text{LCM}(16,4) = \underline{16 \text{ år}}$, $\text{LCM}(16,6) = \underline{48 \text{ år}}$

d) $\text{LCM}(18,4) = \underline{36 \text{ år}}$, $\text{LCM}(18,6) = \underline{18 \text{ år}}$

2125 a) Visa att
SGF(12, 15) · MGM(12, 15) = 12 · 15.

b) Visa att
SGF(10, 13) · MGM(10, 13) = 10 · 13.

c) Pia påstår att:
SGF(a, b) · MGM(a, b) = $a \cdot b$
Har hon rätt? Motivera.

$$\begin{array}{l} 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 15 = \quad\quad 3 \cdot 5 \\ \hline \text{mgm} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \\ \text{sgf} = \quad\quad 3 \quad = 3 \end{array}$$

2125.

a)
$$\left.\begin{array}{l} SGF(12,15) = GCD(12,15) = 3 \\ MGM(12,15) = LCM(12,15) = 60 \end{array}\right\} 3 \cdot 60 = 12 \cdot 15 = 180$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} SGF(10,13) = GCD(10,13) = 1 \\ MGM(10,13) = LCM(10,13) = 130 \end{array}\right\} 1 \cdot 130 = 10 \cdot 13 = 130$$

c) Ansätt $a = c \cdot x$ och $b = c \cdot y$, där c är största gemensamma faktorn, dvs

$$\begin{array}{l} a = c \cdot x \\ b = c \quad\; \cdot y \\ \hline \text{mgm} = c \cdot x \cdot y \\ \text{sgf} = c \end{array}$$

$$SGF(a,b) \cdot MGM(a,b) = c \cdot c \cdot x \cdot y = a \cdot b$$

Svar: Ja, Pia har rätt

2126 Bestäm, om a och b är positiva heltal,

a) $\mathrm{SGF}(12a, 18a)$ b) $\mathrm{MGM}(4a^2, 6ab)$

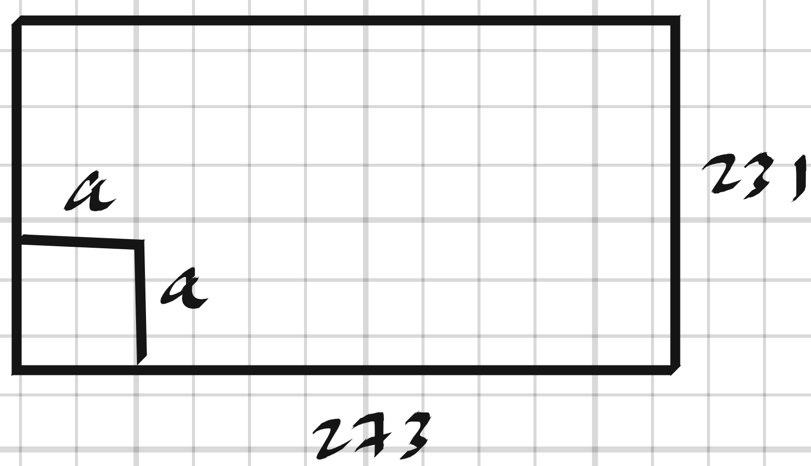
2126. a)

$$12a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$$
$$18a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a$$
$$\text{sgf} = 2 \cdot 3 \cdot a = \underline{6a}$$

b)

$$4a^2 = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a$$
$$6ab = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b$$
$$\text{mgm} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b = \underline{12a^2b}$$

2127 En rektangel med måtten 231 cm × 273 cm ska delas in i ett antal lika stora kvadrater där sidan är ett helt antal centimeter.
Bestäm minsta möjliga antal kvadrater.



2127.

$$273 = a \cdot x$$
$$231 = a \cdot y$$
$$\text{sgf} = a \quad \Rightarrow$$

$$a = \mathrm{SGF}(231, 273) = \mathrm{GCD}(231, 273) = 21$$

Antalet kvadrater, $q = x \cdot y$

$$273 \cdot 231 = a^2 \cdot x \cdot y = a^2 \cdot q \quad \Rightarrow$$

$$q = \frac{231 \cdot 273}{21^2} = \underline{143 \text{ st}}$$

2128 Ett rövarband delade upp 187 guldmynt och 136 silvermynt så att alla fick lika många mynt av samma sort.

Hur många var rövarna?

2128. $SGF(136, 187) = GCD(136, 187) = 17$ st

Var och en får $\frac{187}{17} = 11$ guldmynt och $\frac{136}{17} = 8$ silvermynt.

2129 Siv har mellan 2 000 och 3 000 gamla mynt. Om hon lägger dem i grupper om 11, 13 eller 14 blir det alltid 1 mynt över.

Hur många mynt har Siv?

1cm

2129. $MGM(11, 13, 14) = LCM(\{11, 13, 14\}) = 2002$

1 mynt över $\Rightarrow$ Siv har 2003 mynt

Kontroll: k, l, m nedan måste bli heltal

$11 \cdot k + 1 = 2003 \Rightarrow k = 182$

$13 \cdot l + 1 = 2003 \Rightarrow l = 154$

$14 \cdot m + 1 = 2003 \Rightarrow m = 143$

2130 Finn en lösning till ekvationen
SGF(10, 5x) = MGM(5, x)

2130.

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 5 = 5$$
$$5x = 5 \cdot x \qquad x = x$$
$$\text{sgf} = 5 = 5 \qquad \text{mgm} = 5 \cdot x$$

$$SGF(10, 5x) = MGM(5, x) \Rightarrow$$

$$5 = 5x \Rightarrow \underline{x = 1}$$

2131 En gammal algoritm för att bestämma SGF(a, b) kan kort skrivas:

(170, 130) → (130, 40) → (90, 40) →
(50, 40) → (40, 10) → (30, 10) → (20, 10)

SGF(170, 30) = 10

Bestäm SGF(175, 98) med algoritmen.

2131.

$$(175, 98) = (77, 98) = (77, 21) = (56, 21) =$$
$$= (35, 21) = (14, 21) = (14, 7) \Rightarrow$$
$$SGF(175, 98) = 7$$

Minska det största talet med det minsta och behåll det lägsta talet.

2132 Visa att om SGF$(a, b) = 1$ och SGF$(a, c) = 1$ där a, b och c är positiva heltal så är SGF$(a, bc) = 1$

2132. SGF$(a,b) = 1$ $\Rightarrow$ a och b har inga gemensamma delare > 1. b kan då inte delas med a

SGF$(a,c) = 1$ $\Rightarrow$ a och c har inga gemensamma delare > 1. c kan då inte delas med a.

Om varken b eller c kan delas med a så kan inte heller $b \cdot c$ delas med a $\Rightarrow$

SGF$(a,bc) = 1$

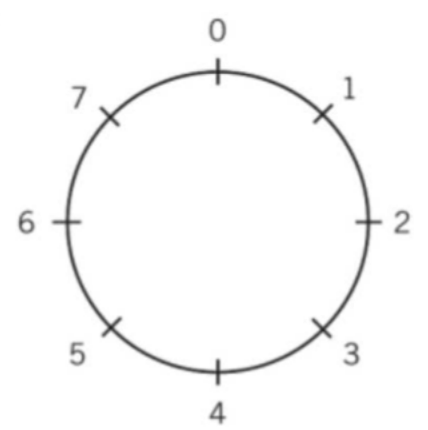
2136 Bestäm resten vid division mellan

a) 17 och 4 c) 99 och 9

b) 76 och 9 d) 147 och 17

		Pythonsyntax	Geogebra
2136.	a) $\underline{17 \pmod 4 = 1}$	17 % 4	Mod(17,4)
	b) $\underline{76 \pmod 9 = 4}$	76 % 9	Mod(76,9)
	c) $\underline{99 \pmod 9 = 0}$	99 % 9	Mod(99,9)
	d) $\underline{147 \pmod{17} = 11}$	147 % 17	Mod(147,17)

2137



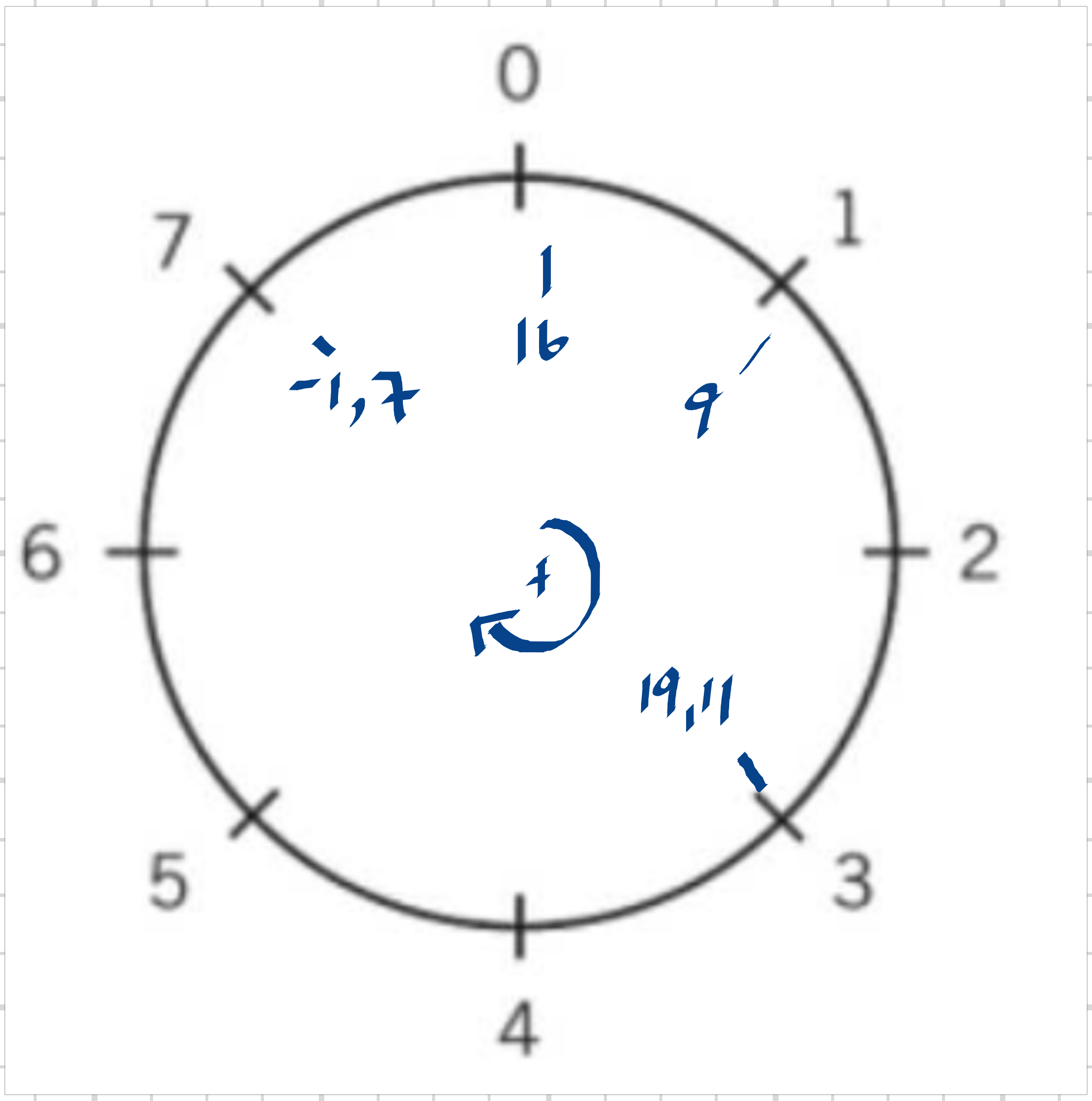
Använd figuren och förklara varför

a) $9 \equiv 1 \pmod 8$

b) $16 \equiv 0 \pmod 8$

c) $19 \equiv 11 \pmod 8$

d) $-1 \equiv 7 \pmod 8$



Man startar i nollan och stegar sig med medurs som positiv riktning.

2138 Skriv på formen $a \equiv b \pmod n$

a) 15 ger rest 3 vid division med 6

b) 32 är delbart med 8

c) 35 och 17 ger samma rest vid division med 2.

2138. a) $15 \equiv 3 \pmod 6$

b) $32 \equiv 0 \pmod 8$

c) $32 \equiv 17 \pmod 2$

2139 Finn två olika värden på x som uppfyller

a) $x \pmod 8 = 5$ b) $x \pmod{36} = 5$

Geogebra

2139. a) ex.v $x_1 = 13$, $x_2 = 21$

Mod(21,8)

b) ex.v $x_1 = 41$, $x_2 = 77$

Mod(77,36)

2140 Visa hur du förenklar

a) $21 + 15 + 38 \pmod 5$

b) $98 - 37 + 105 \pmod 9$

2140.

a) $21+15+38 \pmod 5 \equiv 1+0+3 \pmod 5 = 4 \pmod 5$

b) $98-37+105 \pmod 9 \equiv 8-1+6 \pmod 9 = 13 \pmod 9 =$

$= 4 \pmod 9$

2141 Förenkla

a) $13 \cdot 11 \pmod 5$ b) $27 \cdot 18 \pmod 4$

2141.

a) $13 \cdot 11 \pmod 5 = 3 \cdot 1 \pmod 5 = 3 \pmod 5$

b) $27 \cdot 18 \pmod 4 = 3 \cdot 2 \pmod 4 = 6 \pmod 4 = 2 \pmod 4$

2142 Sana och Idriss startar båda en resa från Stockholm kl 12 på dagen. Sanas resa tar 7 timmar, medan Idriss är på resande fot i 91 timmar.

Är de framme vid samma tidpunkt på dygnet svensk tid? Motivera med kongruens.

2142. Sana är framme kl. 19.

$91 \pmod{24} = 19$

$19 \pmod{12} = 7$

Idriss är framme kl. 7

Svar: Nej

2143 Visa att

a) $22^3 \equiv 8 \pmod{10}$

b) 22^2 är delbart med 4.

2143.

a) $22^3 = (11 \cdot 2)^3 = 11^3 \cdot 8 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 8$

$11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 8 \pmod{10} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 \pmod{10} = 8 \pmod{10}$ #

b) $22^2 = (11 \cdot 2)^2 = 11^2 \cdot 2^2 = 11^2 \cdot 4$ #

2144 Undersök om det finns lösningar i intervallet $0 \le x < 30$ till

a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ 2x \equiv 4 \pmod{10} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ 2x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$

2144. a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ 2x \equiv 4 \pmod{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \pmod{3} = 1 \\ 2x \pmod{10} = 4 \end{cases}$

Ja, prövning ger $x = 7$ och $x = 22$

b) $x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x \pmod{3} = 1$

$2x \equiv 3 \pmod{10} \quad 2x \pmod{10} = 3$

Nej, då $2x \pmod{10}$ måste vara jämnt

2145 Förenkla

a) $2^{30} \pmod 3$

b) $2^{30} \pmod 5$

c) $3^{40} \pmod 7$

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 100^3 \pmod 4$

2145.

a) $2^{30} \pmod 3 = (2^2)^{15} \pmod 3 = 1^{15} \pmod 3 = 1$

b) $2^{30} \pmod 5 = (2^3)^{10} \pmod 5 = 3^{10} \pmod 5 =$

$= (3^2)^5 \pmod 5 = 4^5 \pmod 5 = (-1)^5 \pmod 5 = -1$

c) $3^{40} \pmod 7 = (3^2)^{20} \pmod 7 = 2^{20} \pmod 7 =$

$= (2^5)^4 \pmod 7 = 4^4 \pmod 7 = (4^2)^2 \bmod 7 =$

$2^2 \pmod 7 = 4$

d) $1^3 \pmod 4 + 2^3 \pmod 4 + 3^3 \pmod 4 + 4^3 \pmod 4 = 1 + 0 + 3 + 0 = 4$

$5^3 \pmod 4 + 6^3 \pmod 4 + 7^3 \pmod 4 + 8^3 \pmod 4 = 1 + 0 + 3 + 0 = 4$

$\vdots$

$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 100^3 \pmod 4 = 4 \cdot 25 \pmod 4 = 0$

2146 Visa att $(3a+1)^3 \equiv 1 \pmod{9}$ om a är ett heltal.

2146. $(3a+1)^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow (3a+1)^3 \pmod{9} = 1$

$27a^3 + 9a^2 + 9a + 1 \pmod{9} =$

$= 0 + 0 + 0 + 1 \pmod{9} = 1 \pmod{9} = 1$

2147 Visa att talet 75 732 är delbart med 4 genom att undersöka
75 700 + 32 (mod 4)

2147.

$75700 = 2 \cdot 37850 = 2 \cdot 2 \cdot 18950 = 4 \cdot 18950$

$75700 + 32 \pmod{4} \equiv 0 + 0 \pmod{4}$

2148 Visa att ett tal N är delbart med 9 om talets siffersumma är delbar med 9.

2148.
$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

vars siffersumma $= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$

$$N \pmod 9 = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_0 \cdot 10^0 \pmod 9 =$$
$$= a_n \cdot 1 + \ldots + a_0 \cdot 1 \pmod 9 =$$
$$= a_n + \ldots + a_0 \pmod 9$$

#

2149 Antag att

a, b, l och k är positiva heltal så att

$a = k \cdot d + r_1$ och $b = l \cdot d + r_2$

där $r_1 + r_2 < d$

Visa att vid division med d har

a) summan $a + b$ resten $r_1 + r_2 \pmod d$

b) produkten $a \cdot b$ resten $r_1 \cdot r_2 \pmod d$

2149.

a) $a+b \pmod d = k \cdot d + r_1 + l \cdot d + r_2 \pmod d =$

$= d(k+l) + r_1 + r_2 \pmod d = 0 + r_1 + r_2 \pmod d$ #

b) $a \cdot b \pmod d = (kd + r_1)(ld + r_2) \pmod d =$

$= kld^2 + r_1 \cdot ld + r_2 \cdot kd + r_1 \cdot r_2 \pmod d =$

$= d(kld + r_1 l + r_2 k) + r_1 \cdot r_2 \pmod d =$

$= 0 + r_1 r_2 \pmod d$ #

2152 Visa att $34^n - 19^n$ är delbart med 5 för alla heltal $n > 0$.

2152 $\quad 34^n - 19^n \pmod 5 = 0 \quad , \quad n > 0$

$\Rightarrow \quad 34^n \pmod 5 = 19^n \pmod 5$

$4^n \pmod 5 = 4^n \pmod 5 \quad$ #

2153 Finn en regel för delbarhet med 11 genom att utnyttja att

$10 \equiv -1 \pmod{11}$

2153. $\quad 10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10 + 1 \pmod{11} = 0$

Ett tal är delbart med 11 om dess siffersumma med alternerande tecken $= 0$.

$121: \quad -1+2-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 121 \pmod{11} = 0$

$132: \quad -1+3-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 132 \pmod{11} = 0$

$7986: \quad -7+9-8+6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7986 \pmod{11} = 0$

2154 Visa att $7|649\,117$ eftersom $649 - 117$ är delbart med 7.

2154 $7 | 649-117 \Rightarrow 649 - 117 \equiv 0 \pmod 7$

$\Rightarrow 117 - 649 \equiv 0 \pmod 7$

$649\,117 = 649 \cdot 10^3 + 117$

$10^3 \pmod 7 = 2^3 \cdot 5^3 \pmod 7 = 8 \cdot 5^3 \pmod 7 =$

$= 1 \cdot (-2)^3 \pmod 7 = -8 \pmod 7 = -1 \Rightarrow$

$649 \cdot 10^3 + 117 \pmod 7 = 649 \cdot (-1) + 117 \pmod 7 = 0 \pmod 7$

2155 Visa att om $x \equiv y \pmod n$ och c är ett heltal större än 0, så är $cx \equiv cy \pmod n$.

2155. $x \equiv y \pmod n \Rightarrow n | x-y \Rightarrow$

$x - y = n \cdot k \Rightarrow x = n \cdot k + y$

$cx = c \cdot (n \cdot k + y) = c \cdot n \cdot k + cy$

$cx - cy = c \cdot n \cdot k$ delbar med $n \Rightarrow$

$cx \equiv cy \pmod n$

2156 Ställ upp ett uttryck för de x som uppfyller ekvationen

$x \pmod n = x \pmod m$

n, m är positiva heltal och $n < m$

2156. $n \mid x$ och $m \mid x$ med samma rest $\Rightarrow$

$x = k \cdot m \cdot n + r \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad , \quad 0 < r < n$

2157 Fermats lilla sats kan skrivas

$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

där p är ett primtal och x är ett heltal som inte har p som faktor.

a) Förklara med exempel vad satsen innebär.

b) Finn med hjälp av satsen ett uttryck som är delbart med 7.

c) Sätt $x = 2$ och formulera satsens omvändning. Tror du att den är sann?

$$x^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p) \Rightarrow$$

$$x^{p-1} (\mathrm{mod}\ p) = 1$$

2157. a) $p = 5$, $x = 3 \Rightarrow$

$$3^{5-1} (\mathrm{mod}\ 5) = 3^{4} (\mathrm{mod}\ 5) = (3^2)^2 \mathrm{mod}\ 5 = 4^2 (\mathrm{mod}\ 5) =$$

$$= 16 (\mathrm{mod}\ 5) = 1$$

b) $x^{p-1} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p) \Rightarrow$

$x^6 - 1$ delbart med 7, $x \in \mathbb{Z}$

c) Satsens omvändning:

Om 2^{p-1} är delbart med p så är p ett primtal

vilket inte är sant, ex. $p = 341$

1 Visa med ett exempel att ekvationen

$x^3 + y^3 = z^3$ är lösbar om

a) $x = 0$

b) x och y är reella tal.

1. a) om $x = 0$ och $y = z$

ex. $y = 5 \Rightarrow VL = 0 + 5^3 = 5^3 \Rightarrow z = 5$

b) ex. $x = 1$, $y = 2$

$VL = 1^3 + 2^3 = 9 = (9^{1/3})^3 \Rightarrow z = 9^{1/3}$

---

2 Finn två olika heltalslösningar till den diofantiska ekvationen

a) $2x + 3y = 1$

b) $7x - 9y = 8$

2. a) $(x, y) = \underline{(-1, 1)}$

$(x, y) = \underline{(2, -1)}$

b) $(x, y) = \underline{(5, 3)}$

$(x, y) = \underline{(-4, -4)}$

2160 Hur många olika siffror behövs i ett talsystem med basen

a) 3 b) 12?

2160. a) 0, 1, 2 - 3 st

b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B – 12 st

2161 Skriv talet i utvecklad form

a) 983_{tio} b) 1221_{tre}

2161. a) $9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

b) $1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$

2162 Skriv talet med basen tio.

a) $1010_{två}$ c) 123_{fem}

b) 221_{tre} d) 2345_{sex}

2162.

a) $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 = 10_{tio}$

b) $2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 18 + 6 + 1 = 25_{tio}$

c) $1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 25 + 10 + 3 = 38_{tio}$

d) $2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 432 + 108 + 24 + 5 = 569_{tio}$

2163 Omvandla talet

a) 76_{tio} till basen fyra

b) 99_{tio} till basen sju.

2163. a)

$4^4 = 256$

$4^3 = 64$ $\qquad 76 = \boxed{1} \cdot 64 + 12$

$4^2 = 16$ $\qquad 12 = \boxed{0} \cdot 16 + 12$

$4^1 = 4$ $\qquad 16 = \boxed{3} \cdot 4 + 0$

$4^0 = 1$ $\qquad 0 = \boxed{0} \cdot 1 + 0$

$76_{tio} = 1030_{fyra}$

b)

$7^3 = 343$

$7^2 = 49$ $\qquad 99 = \boxed{2} \cdot 49 + 1$

$7^1 = 7$ $\qquad 1 = \boxed{0} \cdot 7 + 1$

$7^0 = 1$ $\qquad 1 = \boxed{1} \cdot 1 + 0$

$\underline{99_{tio} = 201_{sju}}$

2164 De tio första positiva heltalen i ett talsystem med basen fyra är:

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22

Vilka är de tio första positiva heltalen i ett talsystem med basen

a) 5 b) 3 ?

2164.

Basen 4

$1 = \underline{1} \cdot 4^0$

$2 = \underline{2} \cdot 4^0$

$3 = \underline{3} \cdot 4^0$

$4 = \underline{1} \cdot 4^1 + \underline{0} \cdot 4^0$

$5 = \underline{1} \cdot 4^1 + \underline{1} \cdot 4^0$

$6 = \underline{1} \cdot 4^1 + \underline{2} \cdot 4^0$

$7 = \underline{1} \cdot 4^1 + \underline{3} \cdot 4^0$

$8 = \underline{2} \cdot 4^1 + \underline{0} \cdot 4^0$

$9 = \underline{2} \cdot 4^1 + \underline{1} \cdot 4^0$

$10 = \underline{2} \cdot 4^1 + \underline{2} \cdot 4^0$

a) Basen 5

$1 = \underline{1} \cdot 5^0$

$2 = \underline{2} \cdot 5^0$

$3 = \underline{3} \cdot 5^0$

$4 = \underline{4} \cdot 5^0$

$5 = \underline{1} \cdot 5^1 + \underline{0} \cdot 5^0$

$6 = \underline{1} \cdot 5^1 + \underline{1} \cdot 5^0$

$7 = \underline{1} \cdot 5^1 + \underline{2} \cdot 5^0$

$8 = \underline{1} \cdot 5^1 + \underline{3} \cdot 5^0$

$9 = \underline{1} \cdot 5^1 + \underline{4} \cdot 5^0$

$10 = \underline{2} \cdot 5^1 + \underline{0} \cdot 5^0$

b) Basen 3

$1 = \underline{1} \cdot 3^0$

$2 = \underline{2} \cdot 3^0$

$3 = \underline{1} \cdot 3^1 + \underline{0} \cdot 3^0$

$4 = \underline{1} \cdot 3^1 + \underline{1} \cdot 3^0$

$5 = \underline{1} \cdot 3^1 + \underline{2} \cdot 3^0$

$6 = \underline{2} \cdot 3^1 + \underline{0} \cdot 3^0$

$7 = \underline{2} \cdot 3^1 + \underline{1} \cdot 3^0$

$8 = \underline{2} \cdot 3^1 + \underline{2} \cdot 3^0$

$9 = \underline{1} \cdot 3^2 + \underline{0} \cdot 3^1 + \underline{0} \cdot 3^0$

$10 = \underline{1} \cdot 3^2 + \underline{0} \cdot 3^1 + \underline{1} \cdot 3^0$

a) 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20

b) 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101

2165 Är talet udda eller jämnt i basen 10?

a) $1001_{två}$ b) 12_{tre}

2165.

a) $2^3 + 1 = 9_{tio}$ (udda)

b) $3^1 + 2 = 5_{tio}$ (udda)

2166 Omvandla 427_{tio} till ett tal med basen

a) 5 b) 12

2166.

a)

$5^4 = 625$

$5^3 = 125 \qquad 427 = \boxed{3} \cdot 125 + 52$

$5^2 = 25 \qquad 52 = \boxed{2} \cdot 25 + 2$

$5^1 = 5 \qquad 2 = \boxed{0} \cdot 5 + 2$

$5^0 = 1 \qquad 2 = \boxed{2} \cdot 1 + 0$

$427_{tio} = 3202_{fem}$

b)

$12^3 = 1728$

$12^2 = 144 \qquad 427 = \boxed{2} \cdot 144 + 139$

$12^1 = 12 \qquad 139 = \boxed{11} \cdot 12 + 7$

$12^0 = 1 \qquad 7 = \boxed{7} \cdot 1 + 0$

$427_{tio} = 2B7_{tolv}$

2167 Vilket är det största 3-siffriga talet i basen 16 och vilket tal motsvarar det i basen 10?

2167. $FFF_{\text{sexton}} = 15 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 4095_{\text{tio}}$

2168 Omvandla talet 456_{sju} till ett tal med basen 8.

2168. $456_{\text{sju}} = 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 237_{\text{tio}}$

$8^3 = 512$

$8^2 = 64 \qquad 237 = \boxed{3} \cdot 64 + 45$

$8^1 = 8 \qquad 45 = \boxed{5} \cdot 8 + 5$

$8^0 = 1 \qquad 5 = \boxed{5} \cdot 1 + 0$

$456_{\text{sju}} = 355_{\text{åtta}}$

2169 Bestäm ett värde på x och y så att likheten gäller.

$x54_{\text{tolv}} = 24y4_{\text{sju}}$

2169.

$x54_{tolv} = x \cdot 12^2 + 5 \cdot 12^1 + 4 \cdot 12^0 = 144x + 64$

$24y4_{sju} = 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + y \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 7y + 886$

$144x + 64 = 7y + 886$

$144x - 7y - 822 = 0$

$(x, y) = (6, 6)$

2170 Nils påstår att ett sexsiffrigt tal skrivet i bas tio alltid är ett sjusiffrigt tal om det är skrivet i bas åtta.

Har Nils rätt? Motivera.

2170. Det lägsta sexsiffriga talet i bas 10 är 100 000.

$8^6 = 262144$

$8^5 = 32768$ ← 0 till 5 ger sexsiffrigt tal

$8^4 = 4096$ Nils har således fel!

$8^3 = 512$

$8^2 = 64$

$8^1 = 8$

$8^0 = 1$

2171 Ett tal i bas 10 är delbart med tre om siffersumman är delbar med tre.
Gäller denna regel även andra talbaser? Motivera.

2171.

Basen 10

$$abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$$

Om $a+b+c = 3k \Rightarrow$

$$(3k-b-c) \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 =$$

$$= 3k \cdot 10^2 + b(10-10^2) + c(10^0 - 10^2) =$$

$$= 300k - 90b - 99c = 3(100k - 30b - 33c) = 3m$$

Basen n

$$abc = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$$

Om $a+b+c = 3k \Rightarrow$

$$(3k-b-c) \cdot n^2 + b \cdot n + c =$$

$$= 3kn^2 - b(n^2-n) - c(n^2-1)$$

$$\left.\begin{matrix} n^2 - n = n(n-1) \\ n^2 - 1 \end{matrix}\right\}$$ Gäller bara om $n = 3m+1$, m heltal > 0

2172 Förenkla

a) $656_{\text{åtta}} + ABC_{\text{sexton}}$ (mod 10)

b) $444_{\text{fem}} \cdot 333_{\text{fyra}}$ (mod 5)

2172. a) $656_{\text{åtta}} = 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 430_{\text{tio}}$

$ABC_{\text{sexton}} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2748_{\text{tio}}$

$430 + 2748 \pmod{10} = 3178 \pmod{10} =$

$= 3170 + 8 \pmod{10} = \underline{8 \pmod{10}}$

b) $444_{\text{fem}} = 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 124_{\text{tio}}$

$333_{\text{fyra}} = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 63_{\text{tio}}$

$124 + 63 \pmod 5 = 187 \pmod 5 =$

$185 + 2 \pmod 5 = \underline{2 \pmod 5}$

2173 Beräkna summan med hjälp av uppställningen

$$\begin{array}{r} 10101_{två} \\ 11000_{två} \\ +10011_{två} \\ \hline \end{array}$$

2173.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,11\,1\;1\;1\;\;1 \\ 10101 \\ 11000 \\ 10011 \\ \hline 1000000_{två} \end{array} = 2^6 = 64_{tio}$$

2203 Ange de fem första talen i den talföljd där

@

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = 5n - 15$

c) $a_n = \dfrac{12}{n}$

d) $a_n = n^2 + 4$

2203.

a) $5, 8, 11, 14, 17$

b) $-10, -5, 0, 5, 10$

c) $\frac{12}{1}, \frac{12}{2}, \frac{12}{3}, \frac{12}{4}, \frac{12}{5}$

d) $5, 8, 13, 20, 29$

2204 Finn en enkel formel för det n:te elementet a_n i talföljden

a) 2, 4, 6, 8, 10, …

b) 3, 7, 11, 15, 19, …

2204. a) $a_n = 2n$

b) $a_n = 4n - 1$

2205 Visa att tredje elementen är lika i talföljderna $a_n = n^2 + 3$ och $b_n = 2^n + 4$.

2205. $a_3 = 3^2 + 3 = 12$

$b_3 = 2^3 + 4 = 12$ #

2206 Vilket ordningsnummer har talet 132 i den talföljd som definieras av

a) $a_n = 8n + 4$

b) $a_n = n^2 - 12$?

2206. a) $8n + 4 = 132 \Rightarrow n = 16$

b) $n^2 - 12 = 132 \Rightarrow n = 12$

2207 Finn en enkel formel för det n:te talet a_n i talföljden

a) 6, 12, 18, 24, 30, …

b) 1, 3, 9, 27, 81, …

c) 1, 4, 7, 10, 13, …

d) 1, 8, 27, 64, 125, …

e) 2, 5, 10, 17, 26, …

f) −1, 1, −1, 1, −1, …

2207.

a) $\underline{a_n = 6n}$

b) $\underline{a_n = 3^{n-1}}$

c) $\underline{a_n = 3n - 2}$

d) $\underline{a_n = n^3}$

e) $\underline{a_n = n^2 + 1}$

f) $\underline{a_n = (-1)^n}$

2208 Undersök om de fyra första elementen är lika i talföljderna $a_n = (n^2 - n + 2)/2$ och $b_n = 2^{n-1}$

2208.

$a_1 = (1 - 1 + 2)/2 = 1$ $\quad b_1 = 2^{1-1} = 1$

$a_2 = (4 - 2 + 2)/2 = 2$ $\quad b_2 = 2^{2-1} = 2$

$a_3 = (9 - 3 + 2)/2 = 4$ $\quad b_3 = 2^{3-1} = 4$

$a_4 = (16 - 4 + 2)/2 = 7$ $\quad b_3 = 2^{4-1} = 8$ $\Rightarrow$ <u>Nej</u>

2209 Folkmängden i en stad var 250 000 personer år 2010. Ange en formel för folkmängden P_n, där n är antal år efter 2010, om ökningen är

a) 5 000 personer per år

b) 2 % per år.

2209. a) $P_n = 5000n + 250\,000$

b) $P_n = 250\,000 \cdot 1{,}02^n$

2210 Undersök om talet 850 ingår i talföljden. Bestäm i så fall talets ordningsnummer.

a) $a_n = 12n + 28$

b) $a_n = n^2 + 10n + 34$

2210. a) $12n + 28 = 850 \Rightarrow n = 68{,}5$ ej heltal $\Rightarrow$ ingår ej i talföljden.

b) $n^2 + 10n + 34 = 850$

$n = -5 \pm \sqrt{25 + 816} = -5 \pm 29 = 24$

2211 Bestäm en formel för det n:te elementet i talföljden

a) $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

2211. a) $a_n = \dfrac{3+n}{2+n}$

b) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

2212 Finn två olika formler som ger en talföljd som börjar: 2, 4, 8, …

2212. $a_n = 2^{n-1}$

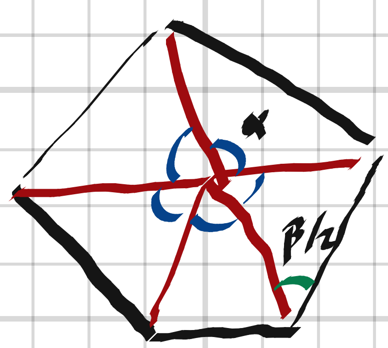
$a_n = n^2 - n + 2$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2n \end{cases}$$

2213 Skriv en formel för v_n där v_n är storleken av en vinkel i en regelbunden n-hörning ($n \geq 3$).

2213. $v = 60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, \ldots$

$v_n = \dfrac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$



$\alpha = 360^\circ/5$

$\beta = 180^\circ - \alpha = \dfrac{180^\circ \cdot 5 - 360^\circ}{5}$

$= \dfrac{180^\circ(5-2)}{5}$

2214 En formel för antal diagonaler D_n i en n-hörning kan skrivas $D_n = an^2 + bn$.

Bestäm talen a och b.

2214. $D_n = an^2 + bn$

$$\begin{array}{l} 5. \\ 4. \end{array} - \begin{cases} a \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 2 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 5 \end{cases}$$

$$80a - 100a = 10 - 20$$

$$20a = 10$$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot 16}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow D_n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

2216 Bestäm de fem första talen i den talföljd där

a) $a_{n+1} = 2a_n + 3$ och $a_1 = 6$

b) $a_{n+1} = a_n + n$ och $a_1 = 5$

c) $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ och $a_1 = 2$

2216.

a)

$a_1 = \underline{6}$

$a_2 = 2 \cdot 6 + 3 = \underline{15}$

$a_3 = 2 \cdot 15 + 3 = \underline{33}$

$a_4 = 2 \cdot 33 + 3 = \underline{69}$

$a_5 = 2 \cdot 69 + 3 = \underline{141}$

b)

$a_1 = \underline{5}$

$a_2 = 5 + 1 = \underline{6}$

$a_3 = 6 + 2 = \underline{8}$

$a_4 = 8 + 3 = \underline{11}$

$a_5 = 11 + 4 = \underline{15}$

c)

$a_1 = \underline{2}$

$a_2 = 2^2 - 2 = \underline{2}$

$a_3 = 2^2 - 2 = \underline{2}$

$a_4 = 2^2 - 2 = \underline{2}$

$a_5 = 2^2 - 2 = \underline{2}$

ex a) Geogebra:

$f(a) = 2a + 3$

Iterationlist$(f, 6, 4)$

$\Rightarrow \underline{\{6, 15, 33, 69, 141\}}$

2217 Skriv en rekursionsformel som ger a_{n+1} om vi vet a_n för talföljden

a) 10, 13, 16, 19, ….

b) 5, 15, 45, 135, …

c) 20, 15, 10, 5, 0, …

2217. a) $a_1 = 10$

$\underline{a_{n+1} = a_n + 3}$

b) $a_1 = 5$

$\underline{a_{n+1} = 3 \cdot a_n}$

c) $a_1 = 20$

$\underline{a_{n+1} = a_n - 5}$

2218 Bestäm a_5 om

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ och $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ och $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$

2218. a) $a_3 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$a_4 = 7 + 2 \cdot 1 = 9$

$a_5 = 9 + 2 \cdot 7 = \underline{23}$

b) $a_3 = 2^2 + 1^2 = 5$

$a_4 = 5^2 + 2^2 = 29$

$a_5 = 29^2 + 5^2 = \underline{866}$

2219 En talföljd definieras av formeln
$a_n = 4 \cdot 1{,}5^{n-1}$
Skriv en rekursionsformel som ger a_{n+1} om vi vet a_n

2219.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 4 \cdot 1.5 \\ a_3 &= 4 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 4 \\ \underline{a_{n+1}} &\underline{= a_n \cdot 1.5} \end{aligned}$$

2220 Ange en enkel formel för det n:te elementet a_n i talföljden som defineras

a) $a_{n+1} = 2a_n$ och $a_1 = 2$
b) $a_{n+1} = 3a_n$ och $a_1 = 1$
c) $a_{n+1} = a_n + 5$ och $a_1 = 5$
d) $a_{n+1} = 3a_n - 2$ och $a_1 = 4$

2220.

a) $2, 4, 8, 16, \ldots$

$\underline{a_n = 2^n}$

b) $1, 3, 9, 27, \ldots$

$\underline{a_n = 3^{n-1}}$

c) $5, 10, 15, 20, \ldots$

$\underline{a_n = 5n}$

d) $4, 10, 28, 82, \ldots$

$\underline{a_n = 3^n + 1}$

2221 Ekvationen $x^3 + 3x + 1 = 0$
har en reell rot.
Formeln $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 + 3x_n + 1}{3x_n^2 + 3}$
definierar tillsammans med startvärdet $x_0 = -0{,}5$ en talföljd som ger allt bättre närmevärden till roten. Formeln ges av Newton-Raphsons iterationsmetod för numerisk lösning av ekvationer.
Bestäm x_1, x_2 och x_3 med sex decimaler.

2221.

Geogebra:

$$f(x) = x - \frac{x^3 + 3x + 1}{3x^2 + 3}$$

l1 = Iterationlist(f, -0.5, 3)

$$\Rightarrow \{-0.5, \underline{-0.333333, -0.322222, -0.322185}\}$$

2222 En talföljd beskrivs av $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$ och $a_1 = 1$.

a) Bestäm a_3 och a_4

b) Förklara vad a_{100} betyder i detta sammanhang.

2222. a)

$a_1 = 1$ $\qquad 1^2 = 1$

$a_2 = 1 + (1+1)^2 = 5$ $\qquad 1^2 + 2^2 = 5$

$a_3 = 5 + (2+1)^2 = \underline{14}$ $\qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$a_4 = 14 + (3+1)^2 = \underline{30}$ $\qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

b) $\underline{a_{100} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2}$

Geogebra: $f(n, a) = a + (n+1)^2$

$l1 = \text{Iterationlist}(f, \{1, 1\}, 3)$

$\Rightarrow \{1, 5, \underline{14, 30}\}$

2223 Talföljden $a_{n+1} = 0{,}5\left(\frac{12}{a_n} + a_n\right)$, $a_1 = 3$

ger en följd av tal som ger ett allt bättre närmevärde till $\sqrt{12}$.

a) Beräkna a_3 och jämför med $\sqrt{12}$.

b) Vad blir a_{n+1} om $a_n = \sqrt{12}$?

c) Hur ska vi ändra formeln om vi i stället vill ha ett ungefärligt värde på $\sqrt{23}$?

d) Beräkna med formeln i c) ett närmevärde till $\sqrt{23}$ med tre gällande siffror.

2223. a) $a_1 = 3$

$$a_2 = 0.5 \cdot \left(\frac{12}{3} + 3\right) = 3.5$$

$$a_3 = 0.5 \cdot \left(\frac{12}{3.5} + 3.5\right) = \underline{3.46}$$

b) $$a_{n+1} = 0.5 \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{12}} + \sqrt{12}\right) = 0.5 \cdot \left(\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{12}} + \sqrt{12}\right) = \underline{\sqrt{12}}$$

c) $$\underline{a_{n+1} = 0.5 \cdot \left(\frac{23}{a_n} + a_n\right)}$$

d) $a_1 = 4$

$$a_2 = 0.5 \cdot \left(\frac{23}{4} + 4\right) = 4.875$$

$$a_3 = 0.5 \cdot \left(\frac{23}{4.875} + 4.875\right) = \underline{4.80}$$

2224 Befolkningsutvecklingen i ett land kan beskrivas med formeln

$y_{n+1} = (1 + A - B \cdot y_n) \cdot y_n \qquad y_0 = 75$ där

y_0 är folkmängden i miljoner år 1970

y_1 är folkmängden i miljoner år 1980

y_2 är folkmängden i miljoner år 1990 osv.

Beräkna landets folkmängd år 2010 om $A = 0{,}233$ och $B = 0{,}000\,671$.

2224.

$y_0 = 75$

$y_1 = (1 + 0.233 - 0.000671 \cdot 75) \cdot 75 = 88.7$

$y_2 = (1 + 0.233 - 0.000671 \cdot 88.7) \cdot 88.7 = 104.1$

$y_3 = (1 + 0.233 - 0.000671 \cdot 104.1) \cdot 104.1 = 121.1$

$y_4 = (1 + 0.233 - 0.000671 \cdot 121.1) \cdot 121.1 = \underline{139 \text{ milj}}.$

2225 Ange en explicit formel och en rekursionsformel för antalet punkter i figur nummer n.

2225.

$\underline{a_n = n^2}$

$a_1 = 1$

$\underline{a_{n+1} = a_n + 2n - 1}$

2226 En talföljd definieras rekursivt av

$$p_n = p_{n-1} \cdot \left(1{,}4 - \frac{p_{n-1}}{75}\right),\ p_0 = 10$$

a) Beräkna p_1, p_2 och p_3

b) Undersök vad som händer med p_n för stora n.

2226.

Geogebra:

$f(p) = p(1.4 - \frac{p}{75})$

l1 = Iterationlist(f,10,4)

$\Rightarrow$

a) l1 = {10, 12.67, 15.59, 18.54}

b) $p \to 30$ då $n \to \infty$

2227 Den engelske matematikern John Wallis (1616 – 1703) gav 1656 ut en bok där han presenterade formeln:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \ldots$$

Ange en rekursionsformel för produkten av faktorerna i högerledet.

2227.

$$a_1 = \frac{4}{3}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(2n+2)^2}{(2n+2)^2 - 1}$$

Test av formeln i Geogebra:

$$f(n,a) = a \cdot \frac{(2n+2)^2}{(2n+2)^2 - 1}$$

l1 = Iterationlist(f, {1, 4/3}, 100)

pi_halva = l1(101)

$\Rightarrow \approx 1{,}57$

2229 I en aritmetisk talföljd är det första talet 45 och differensen 10. Bestäm för denna talföljd

a) de fem första talen

b) det 20:e talet

c) summan av de 20 första talen.

2229. a) $\underline{45, 55, 65, 75, 85}$

b) $a_n = 10n + 35 \Rightarrow$

$a_{20} = 10 \cdot 20 + 35 = \underline{235}$

c) $s_n = n \cdot (a_1 + a_n)/2 \Rightarrow$

$s_{20} = 20 \cdot (45 + 235)/2 = \underline{2800}$

2230 Beräkna

a) $\sum_{k=1}^{24} (5k + 2)$ b) $\sum_{k=1}^{20} (250 - 10k)$

2230. a) $a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$

$a_{24} = 5 \cdot 24 + 2 = 122$

$s_n = n \cdot (a_1 + a_n)/2 = 24(7 + 122)/2 = \underline{1548}$

b) $a_1 = 250 - 10 \cdot 1 = 240$

$a_{20} = 250 - 10 \cdot 20 = 50$

$s_n = 20 \cdot (240 + 50)/2 = \underline{2900}$

2231 En talföljd definieras av 50, 55, 60, 65, ...

a) Skriv en rekursionsformel.

b) Skriv en formel för det n:te talet.

c) Vilket är det 20:e talet?

d) Vilket ordningsnummer har talet 375?

e) Beräkna summan av de 100 första talen.

2231.

a) $a_1 = 50$

$\underline{a_{n+1} = a_n + 5}$

b) $\underline{a_n = 5n + 45}$

c) $a_{20} = 5 \cdot 20 + 45 = \underline{145}$

d) $5n + 45 = 375 \Rightarrow n = \underline{66}$

e) $a_{100} = 5 \cdot 100 + 45 = 545$

$S_{100} = 100 \cdot (50 + 545)/2 = \underline{29750}$

2232 Skriv med summatecken och beräkna

12 + 15 + 18 + 21 + ... + 42

2232.

$$\underline{\sum_{k=1}^{11} (3k + 9) = 11 \cdot (12 + 42)/2 = 297}$$

2233 Är talföljden aritmetisk? Beräkna i så fall summan av de 20 första talen.

a) 6, 8, 10, 12, 14, …

b) 2, 4, 8, 16, 32, …

c) 36, 33, 30, 27, 24, …

d) 125, 100, 80, 64, …

2233. a) $a_n = 2n + 4$

$a_{20} = 2 \cdot 20 + 4 = 44$

$s_n = 20 \cdot (6 + 44)/2 = \underline{500}$

b) ej aritmetisk

c) $a_n = 39 - 3n$

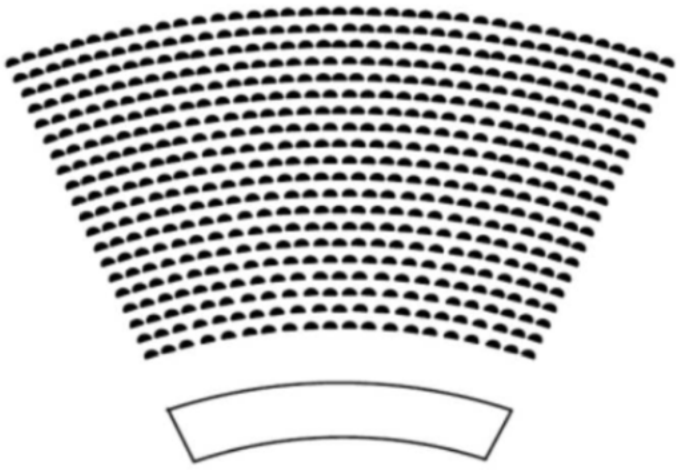
$a_{20} = 39 - 3 \cdot 20 = -21$

$s_n = 20(36 - 21)/2 = \underline{150}$

d) ej aritmetisk

2234

b



a) Figuren visar en sektion på en stor teater. På rad 1 är det 20 platser, på rad 2 är det 21 platser osv.

Hur många platser är det totalt i denna sektion?

b) På en annan teater är det 1 200 platser i en sektion med 25 rader. I raderna i denna sektion ökar antalet platser med 2 jämfört med föregående rad.

Hur många platser är det på första raden?

2234. a) $n = 20$ rader

$a_n = n + 19$; $a_1 = 20$, $a_{20} = 20 + 19 = 39$

$s_{20} = 20(20+39)/2 = \underline{590 \text{ platser}}$

b) $25 \cdot (a_1 + a_{25})/2 = 1200 \Rightarrow$

$\begin{cases} a_1 + a_{25} = 96 \\ a_n = 2n + a_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_{25} = 96 \\ a_{25} = 48 + a_1 \end{cases} \Rightarrow$

$2a_1 + 48 = 96$

$a_1 = \underline{24 \text{ platser}}$

2235 Bestäm talet x, om talen $8 + x$, 10 och $3 + 2x$ är tre på varandra följande tal i en aritmetisk talföljd.

2235. $8+x, \ 10, \ 3+2x$

Aritmetisk talföljd $\Rightarrow$ $10-(8+x) = (3+2x) - 10$

$2 - x = 2x - 7$

$\underline{x = 3}$

2236 I en aritmetisk talföljd är $a_{10} = 20$ och $a_{20} = 10$.
Skriv en formel för a_n och beräkna a_{55}.

2236. Om d = differensen mellan två på varandra följande tal $\Rightarrow$

$a_{10} + 10 \cdot d = a_{20} \Rightarrow d = \frac{10-20}{10} = -1$

$\underline{a_n = -n + 30}$

$a_{55} = -55 + 30 = \underline{-25}$

2240 Skriv de fem första talen i den geometriska talföljd där

a) första talet är 8 och kvoten är 3

b) $a = 80$ och $k = 0{,}5$.

c) $a_n = 16 \cdot 1{,}5^{n-1}$

2240. a) 8, 24, 72, 216, 648

b) 80, 40, 20, 10, 5

c) 16, 24, 36, 54, 81

2241 Beräkna summan av de 10 första talen i den geometriska talföljd där

a) $a = 4$ och $k = 3$

b) första talet är 1 000 och kvoten är 1,05.

2241. a) $S_{10} = \dfrac{4(3^{10}-1)}{3-1} = 118096$

b) $S_{10} = \dfrac{1000 \cdot (1{,}05^{10}-1)}{1{,}05-1} \approx 12578$

2242 Beräkna den geometriska summan

a) $10 + 10 \cdot 1{,}02 + \ldots + 10 \cdot 1{,}02^{13}$

b) $1000 + 1000 \cdot 0{,}8 + \ldots + 1000 \cdot 0{,}8^{7}$

2242. a) $S = \dfrac{10 \cdot (1{,}02^{14} - 1)}{1{,}02 - 1} \approx \underline{160}$

b) $S = \dfrac{1000 \cdot (0{,}8^{8} - 1)}{0{,}8 - 1} \approx \underline{4161}$

2243 I en geometrisk talföljd med kvoten 2 är summan av de fem första talen 1860.

Vilket är det första talet a?

2243. $a \cdot \dfrac{2^{5} - 1}{2 - 1} = 1860 \Rightarrow \underline{a = 60}$

2244 Beräkna

a) $\sum_{n=1}^{10} 2^n$ c) $\sum_{n=3}^{8} 2^n$

b) $\sum_{n=1}^{8} 3^{n-1}$ d) $\sum_{n=1}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2244.

a) $\sum_{n=1}^{10} 2^n = \sum_{n=1}^{10} 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = \underline{2046}$

b) $\sum_{n=1}^{8} 3^{n-1} = 1 \cdot \frac{3^8-1}{3-1} = \underline{3280}$

c) $\sum_{n=3}^{8} 2^n = \sum_{n=1}^{6} 2^{n+2} = \sum_{n=1}^{6} 2^3 \cdot 2^{n-1} = 8 \cdot \frac{2^6-1}{2-1} = \underline{504}$

d) $\sum_{n=1}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{32}{64}} = \underline{\frac{63}{64}}$

a) i Geogebra:

Sum$(2^n, n, 1, 10)$ $\Rightarrow$ $\underline{2046}$

2245 Är talföljden geometrisk? Ange i så fall kvoten och beräkna summan av de 12 första talen.

a) 5, 8, 11, 14, 17, …

b) 64, 48, 36, 27, …

c) 32; −40; 50; −62,5; …

d) 4, 5, 7, 10, 14, …

2245. a) ej geometrisk

b) $k = 0{,}75$

c) $k = -1{,}25$

d) ej geometrisk

2246 Bestäm talet x med två decimaler ur ekvationen
$x + x \cdot 1{,}2 + x \cdot 1{,}2^2 + \ldots + x \cdot 1{,}2^9 = 10000$

2246.

$$x \cdot \frac{1{,}2^{10} - 1}{1{,}2 - 1} = 10000$$

$$x = \frac{10000 \cdot 0{,}2}{1{,}2^{10} - 1} \approx 385{,}23$$

2247 I en geometrisk talföljd med 6 tal är kvoten 3 och summan 1 820.
Är det sant att det sista talet är 1 205?

2247. $a_1 \cdot \frac{3^6-1}{3-1} = 1820 \Rightarrow a_1 = 5$

$a_6 = a_1 \cdot 3^5 = 5 \cdot 3^5 = 1215 \Rightarrow$ Svar: Nej

---

2248 Skriv summan med summatecken, och undersök om talföljden är geometrisk.

a) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 88$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 12^3$

c) $2 + 6 + 18 + \ldots + 486$

d) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + 23 \cdot 25$

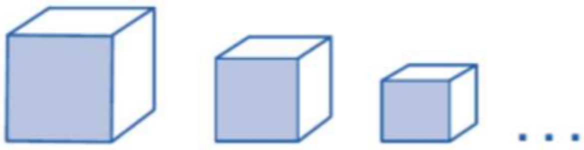
2248. a) $\sum_{k=1}^{88} 2k \Rightarrow$ Ej geometrisk

b) $\sum_{k=1}^{12} k^3 \Rightarrow$ Ej geometrisk

c) $\sum_{k=1}^{486} 2 \cdot 3^{k-1} \Rightarrow$ Geometrisk

d) $\sum_{k=1}^{23} k(k+2) \Rightarrow$ Ej geometrisk

2249 Åtta plastkuber har sidlängder som bildar en geometrisk talföljd. De tre första sidorna är 10 cm, 8 cm och 6,4 cm.



a) Vilken sidlängd har de åtta kuberna sammanlagt? Svara med en decimal.

b) Vilken volym har de åtta kuberna sammanlagt? Svara med heltal.

2249. a) $10 \cdot \dfrac{0.8^8 - 1}{0.8 - 1} \approx \underline{41.6 \text{ cm}}$

b) $10^3 \cdot \dfrac{(0.8^3)^8 - 1}{0.8^3 - 1} \approx \underline{2040 \text{ cm}^3}$

2250 Hur många av talen i talföljden $1{,}05,\ 1{,}05^2,\ 1{,}05^3,\ 1{,}05^4, \ldots$ är mindre än 50?

2250. $1.05^n < 50$

$n < \dfrac{\ln 50}{\ln 1.05} \approx 80.2 \Rightarrow \underline{80 \text{ tal}}$

2251 I en geometrisk talföljd är första talet 100 och det andra talet 150.

Hur många tal måste talföljden innehålla för att summan ska överstiga 2 000 000?

2251.

$k = \frac{150}{100} = 1,5$

$100 \cdot \frac{1,5^n - 1}{1,5 - 1} > 2\,000\,000 \Rightarrow$

$n > \frac{\ln 10001}{\ln 1,5} \approx 22,7 \Rightarrow$ 23 tal

---

2252 Bestäm de sex första talen i en geometrisk talföljd där $a_3 = 20$ och $a_6 = 1280$.

2252.

$\begin{cases} a_1 \cdot k^2 = 20 \\ a_1 \cdot k^5 = 1280 \end{cases} \Rightarrow$

$k^3 = \frac{1280}{20} = 64 \Rightarrow k = 4, \quad a_1 = \frac{20}{4^2} = 1,25$

$a_2 = 1,25 \cdot 4 = 5$

$a_3 = 20$

$a_4 = 1,25 \cdot 4^3 = 80$ $\Rightarrow a = 1,25, 5, 20, 80, 320, 1280$

$a_5 = 1,25 \cdot 4^4 = 320$

$a_6 = 1280$

2253 För vilka heltal n gäller

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{7}{5}\right)^k > 1000$$

2253.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{7}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{7}{5}\right)^{k-1}$$

$$1 \cdot \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{7}{5} - 1} > 1000$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{n+1} > 1000 \cdot \frac{2}{5} + 1$$

$$n > \frac{\ln\left(1000 \cdot \frac{2}{5} + 1\right)}{\ln \frac{7}{5}} - 1 \approx 16{,}8 \Rightarrow \underline{n > 16}$$

2254 Beräkna exakt summan av de fem första talen i den geometriska talföljden

$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

2254.

$$k = \frac{1/2}{3/4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{32}{243} - \frac{243}{243}}{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{211}{243} = \underline{\frac{211}{108}}$$

2257 Till vilket belopp växer 10 000 kr med ränta på ränta om

a) räntesatsen är 3 % och tiden 10 år

b) räntesatsen är 0,5 % och tiden är 6 år?

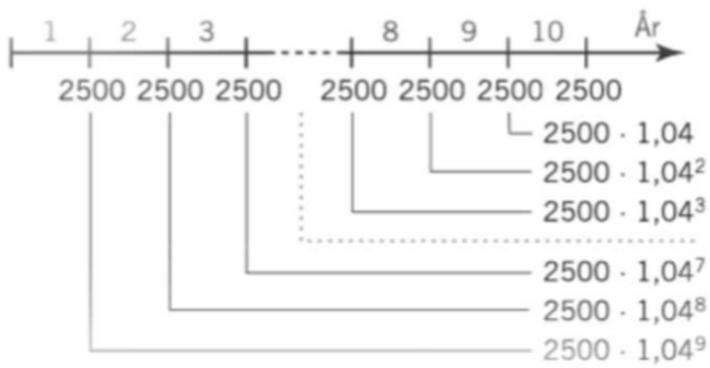
2257.

a) $10000 \cdot 1{,}03^{10} = \underline{13439 \text{ kr}}$

b) $10000 \cdot 1{,}005^{6} = \underline{10304 \text{ kr}}$

2258 På ett bankkonto sätter Hedvig in 2 500 kr vid slutet av tio på varandra följande år. Ränta på ränta beräknas efter 4 %.

Hur stor är behållningen omedelbart efter den sista insättningen? Ta hjälp av figuren nedan.



2258.

$$2500 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} = \underline{30015 \text{ kr}}$$

2259 Niklas har fått en öroninfektion. Var sjätte timme får han antibiotika i form av en tablett på 200 mg. När han efter sex timmar får en ny tablett på 200 mg, återstår av den gamla dosen 40 % i blodet.

Vilken mängd antibiotika har han i blodet efter

a) 3 tabletter b) 10 tabletter?

2259.

$a_n = 200, 200 \cdot 0{,}4, 200 \cdot 0{,}4^2, 200 \cdot 0{,}4^3, \ldots$

a) $200 \cdot \dfrac{0{,}4^3 - 1}{0{,}4 - 1} = \underline{312 \text{ mg}}$

b) $200 \cdot \dfrac{0{,}4^{10} - 1}{0{,}4 - 1} = \underline{333 \text{ mg}}$

2260 Ett nybyggt hus sjunker 1,8 cm det första året. Man uppskattar att huset därefter fortsätter att sjunka och att det för varje år sjunker med en tredjedel av vad det sjönk närmast föregående år.

Hur mycket räknar man med att huset sjunker de tio första åren?

2260. $a_n = 1{,}8, 1{,}8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1, 1{,}8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \ldots$

$1{,}8 \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \underline{2{,}7 \text{ cm}}$

2261 Linus sparar i en aktiefond. Han satte in 1 000 kr i början av 2001 och har sedan dess satt in 1 000 kr i början av varje år.

Hur mycket är hans aktiefond värd direkt efter insättningen år 2020?

Vi räknar med en genomsnittlig årlig tillväxt på 5 % och att han inte behöver betala några skatter eller avgifter för fonden.

2261. $1000 \cdot \dfrac{1{,}05^{20}-1}{1{,}05-1} = 33065$ kr

2262 Vilket alternativ ger störst belopp på en bankbok i början av år 2020 om räntan är 2,5 % per år?

A 6 000 kr sätts in i början av 2013

B 7 000 kr sätts in i början av 2019

C 1 000 kr sätts in i början av vart och ett av åren 2014, 2015, … , 2019, 2020.

2262. A. $6000 \cdot 1{,}025^{7} = 7132$ kr

B. $7000 \cdot 1{,}025 = 7175$ kr

C. $1000 \cdot \dfrac{1{,}025^{7}-1}{1{,}025-1} = 7547$ kr ← C störst

2263 Veterinären Elsa behandlar en sjuk häst. Första dagen får hästen 10 *g* av en viss medicin, sedan halveras dosen varje dag.

Hur mycket medicin bör Elsa skriva ut recept på, om hela behandlingen omfattar en vecka?

2263.
$$10 \cdot \frac{0{,}5^7 - 1}{0{,}5 - 1} \approx \underline{20\text{ g}}$$

2264 Sagan berättar om schackspelets uppfinnare, att han av Persiens kung som belöning lovades få vad han önskade. Han bad då att få 1 sädeskorn för första rutan på ett schackbräde, 2 för den andra, 4 för den tredje osv. För var och en av schackbrädets 64 rutor ville han ha dubbelt så mycket som för den närmast föregående.

Hur många sädeskorn begärde schackspelets uppfinnare i belöning?

Är det möjligt att skaffa denna belöning? Vi antar att 1 000 sädeskorn väger ungefär 30 *g* och att världsproduktionen av säd är ungefär $2 \cdot 10^{12}$ kg/år.

2264.
$$1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = \underline{1{,}84 \cdot 10^{19}\text{ st}}$$

$$m = 0{,}030\text{ kg} \cdot 1{,}84 \cdot 10^{16} = 5{,}5 \cdot 10^{14}\text{ kg}$$

$$\text{Antal år} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 10^{12}} = 275\text{ år} \Rightarrow \underline{\text{Nej}}$$

2267 I en affärsuppgörelse ingår att Anton ska betala 75 000 kr i dag och 25 000 kr om 5 år. Vad borde Anton betala om uppgörelsen varit att hela summa ska betalas

a) i dag b) om 5 år?

Vi räknar med 3,5 % årlig ränta på ränta.

2267.

a) $75000 + \frac{25000}{1{,}035^5} = \underline{96049 \text{ kr}}$

b) $75000 \cdot 1{,}035^5 + 25000 = \underline{114076 \text{ kr}}$

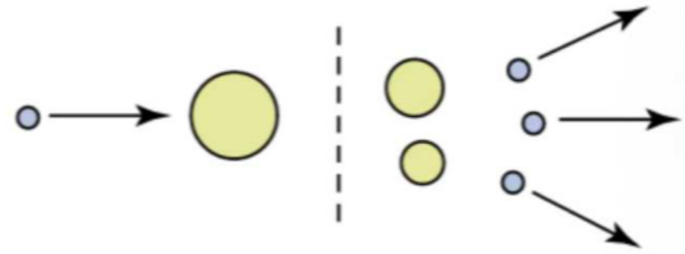
2268 Mats lovade Carina att vid slutet av år 2018 betala henne 8 000 kr. Men så småningom ändrade han sig och ville göra sig skuldfri fem år i förtid, dvs 2013.

Hur mycket blir nuvärdet av 8 000 kr om vi räknar med en årsränta på 5 %, dvs hur mycket ska Mats betala till Carina för att pengarna efter fem år ska vara värda 8 000 kr?

2268.

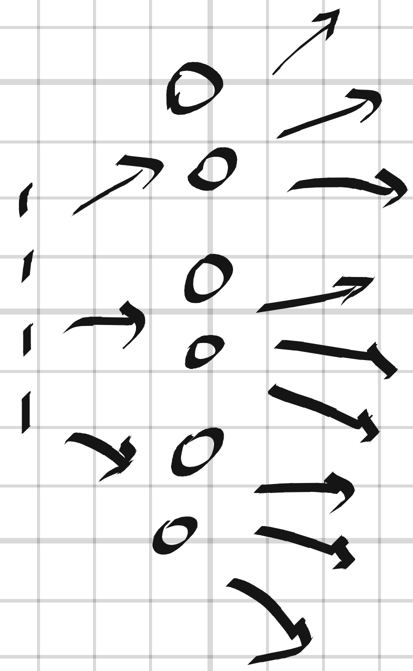
$\frac{8000}{1{,}05^5} = \underline{6268 \text{ kr}}$

2269 I ett kärnkraftverk frigörs energi när atomkärnor delas. En neutron som träffar kärnan av en uranatom delar den i två mindre, samtidigt som tre nya neutroner frigörs som kan dela andra urankärnor.



1:a generationen 2:a generationen

Hur många kärnor kan maximalt delas av de hundra första generationerna neutroner?



2269. $a_n = 1, 2, 6, 18, 54$ (kärnor)

$b_n = 1, 3, 9, 27, \ldots$ (neutroner)

$$1 \cdot \frac{3^{100} - 1}{3 - 1} \approx \underline{2{,}6 \cdot 10^{47}}$$

2270 Vid slutet av 2009 tog Andrea ett lån på 100 000 kr. Lånet ska betalas tillbaka genom lika stora belopp (annuiteter) vid slutet av åren 2012 till och med 2016.

Hur stor ska annuiteten vara, om lånet ska vara helt betalt när annuiteten vid slutet av 2016 är betald? Räkna med 7 % årsränta.

2270. $$a \cdot \frac{1{,}07^5 - 1}{1{,}07 - 1} = 100\,000 \cdot 1{,}07^7$$

$$\underline{a = 27923 \text{ kr}}$$

2271 En patient tar varje morgon medicin i form av en tablett på 20 mg. För varje dygn utsöndrar kroppen 50 % av den ursprungliga mängden.

Hur stor mängd av medicinen har patienten i blodet efter n tabletter?

2271. $20 \cdot \dfrac{0{,}5^n - 1}{0{,}5 - 1} = \underline{40(1 - 0{,}5^n)}$ mg

---

2272 En trissvinnare kan få 50 000 kr i månaden varje månad i 25 år. Vinnaren blir lite nyfiken på vad dessa pengar är värda idag.

a) Vilken månadsränta motsvarar en årsränta på 4 %?

b) Vad är nuvärdet för hela trissvinsten, om vi räknar med en årsränta på 4 %?

2272. a) $x^{12} = 1{,}04 \Rightarrow x = 1{,}00327$

$\Rightarrow$ Månadsräntan = 0,33 %

b) $x \cdot 1{,}00327^{300} = 50000 \cdot \dfrac{1{,}00327^{300} - 1}{1{,}00327 - 1}$

$\Rightarrow$ Nuvärdet $x = 9{,}55$ milj

2273 Ingen vet med säkerhet hur stora världens oljereserver är. År 2009 gjorde ett av de stora oljebolagen en uppskattning och kom då fram till att den totala mängd olja som fanns kvar att utvinna var ca 1 300 miljarder fat (1 fat = 159 liter). Världens oljeförbrukning är ca 80 miljoner fat per dag.

Använd dessa fakta och gör en prognos för när oljan tar slut om årsförbrukningen

a) är oförändrad

b) ökar med 2 % årligen

c) minskar med 2 % årligen.

2273. a) $x \cdot 80 \cdot 365 = 1\,300\,000$

$x = \underline{45 \text{ år}}$

b) $r = \text{dagsräntan} + 1$

$r^{365} = 1{,}02 \Rightarrow r = 1{,}0000543$

$$80 \cdot \frac{1{,}0000543^{365x} - 1}{1{,}0000543 - 1} = 1\,300\,000$$

$x = \underline{32 \text{ år}}$

c) $r = 1 - \text{dagsräntan}$

$r^{365} = 0{,}98 \Rightarrow r = 0{,}999945$

$$80 \cdot \frac{0{,}999945^{365x} - 1}{0{,}999945 - 1} = 1\,300\,000$$

$x = \underline{112 \text{ år}}$

Fibonacci har gett namn åt talföljden
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …
där varje tal är summan av de två föregående.

1 I texten ovan ser vi de 12 första elementen i Fibonaccis talföljd.

a) Beräkna de 13:e och 14:e elementen.

b) Ange en rekursiv formel för talföljden.

1.

$a_{13} = 89 + 144 = \underline{233}$

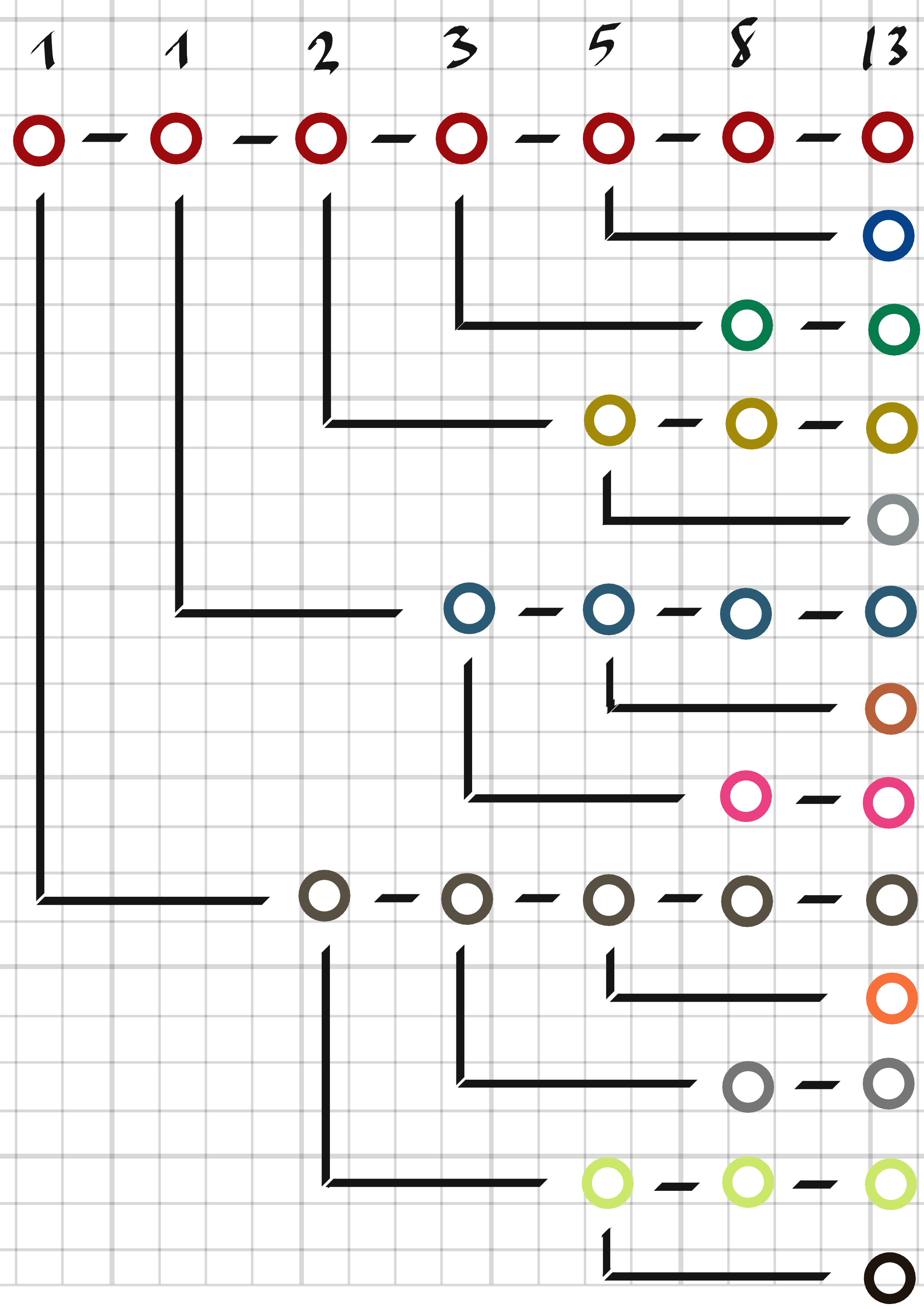
$a_{14} = 144 + 233 = \underline{377}$

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

2 Visa hur Fibonacci fann sin talföljd. Starta med ett kaninpar och notera sedan för några månader hur många kaninpar du har, om de ökar enligt texten ovan. Rita figur.

2.



3 Beräkna kvoterna 13/8, 21/13, 34/21 och 55/34 och jämför med Gyllene snittet.

3. 1,625 , 1,615 , 1,619 , 1,618 $\qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803399$

---

4 Studera Pascals triangel.

a) Om vi räknar från toppen så har triangeln fem horisontella rader. Hur bör den 6:e raden se ut?

b) Ritar vi om triangeln kan vi få:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Studera de nya diagonalerna, vad ser du?

4.

	1						
1	1	1					
1	1	2	1				
2	1	3	3	1			
3	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
8	1	6	15	20	15	6	1
13							
⋮							

2304 Faktorisera polynomen

a) $p^2 + 10p + 25$ c) $p^2 + p - 12$

b) $2p^2 - 4p + 2$ d) $3p^2 + 4p - 4$

2304.

a) $\underline{(p+5)^2}$

b) $2(p^2-2p+1) = \underline{2(p-1)^2}$

c) $\underline{(p-3)(p+4)}$

d) $3\left(p^2+\frac{4}{3}p-\frac{4}{3}\right)$

$p^2+\frac{4}{3}p-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow$

$p=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{12}{9}}=\frac{-2\pm 4}{3}$; $p_1=-2$, $p_2=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \underline{3(p+2)\left(p-\frac{2}{3}\right)}$

2305 2, 4, 6, 8, …, $2n$

a) Vad kallas talföljden?

b) Visa med formeln för en aritmetisk summa att summan av talen i talföljden kan skrivas $n(n+1)$.

c) Visa med ett induktionsbevis att formeln $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$ gäller för $n = 1, 2, 3 \ldots$

2305. a) Aritmetisk talföljd

b) $n \cdot \frac{(2+2n)}{2} = n(n+1)$

c) $n=1 \Rightarrow HL = 1(1+1) = 2 = VL$

Antagande:

Formeln gäller för $n=p$, dvs

$2+4+6+\ldots+2p = p(p+1)$

Påstående:

Formeln gäller även för $n=p+1$, dvs

$(p+1)(p+2)$

Bevis:

$VL = 2+4+6+\ldots+2p+2(p+1) = p(p+1) + 2(p+1) = (p+1)(p+2) = HL$ #

2306 2, 4, 8, …, 2^n

a) Vad kallas talföljden?

b) Visa med formeln för en geometrisk summa att summan av talen i talföljden kan skrivas $2^{n+1} - 2$.

c) Visa med ett induktionsbevis att formeln $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ gäller för $n = 1, 2, 3 \ldots$

2306. a) Geometrisk talföljd

b) $$2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$$

c) $n = 1$: $HL = 2^2 - 2 = 2 = VL$

Antagande:

Formeln $2^{n+1} - 2$ gäller för $n = p$, dvs

$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^p = 2^{p+1} - 2$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p + 1$, dvs

$2^{p+2} - 2$.

Bevis:

$VL = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^{p+1} =$

$= 2 \cdot 2^{p+1} - 2 = 2^{p+2} - 2$ #

2307 a) Beräkna några positiva heltalsexponenter av basen 6, dvs beräkna 6^n.

b) Skriv ett påstående om slutsiffran i resultaten i a).

c) Bevisa ditt påstående med ett induktionsbevis.

2307. a) $6^2 = 36$, $6^3 = 216$, $6^4 = 1296$

b) 6^n ger slutsiffran 6 för alla $n \in \mathbb{Z}^+$

c) Antagande: 6^n ger slutsiffran 6 för $n = p$, dvs $6^p = m \cdot 10 + 6$ för alla $p \in \mathbb{Z}^+$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p+1$, dvs $6^{p+1} = k \cdot 10 + 6$

Bevis:

$$6^{p+1} = 6^p \cdot 6 = (m \cdot 10 + 6) \cdot 6 = 60m + 36 =$$
$$= 60m + 30 \cdot 10 + 6 = (6m + 3) \cdot 10$$
$$= k \cdot 10 + 6 \quad \#$$

2308 Visa med ett induktionsbevis att formeln gäller för alla positiva heltal n.

a) $3 + 9 + 15 + \ldots + (6n - 3) = 3n^2$

b) $4 + 10 + \ldots + (6n - 2) = n(3n + 1)$

2308. a) $n = 1 \Rightarrow HL = 3 \cdot 1^2 = 3 = VL$

Antagande:

Formeln $3n^2$ gäller för $n = p$, dvs

$3 + 9 + 15 + \ldots + (6p - 3) = 3p^2$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p + 1$, dvs

$3 + 9 + 15 + \ldots + (6p - 3) + (6p + 3) = 3(p + 1)^2$

Bevis:

$VL = 3p^2 + 6p + 3 = 3(p^2 + 2p + 1) = 3(p + 1)^2 = HL$

#

b) $n = 1 \Rightarrow HL = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 4 = VL$

Antagande:

Formeln $n(3n + 1)$ gäller för $n = p$, dvs

$4 + 10 + \ldots + (6p - 2) = p(3p + 1)$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p + 1$, dvs

$4 + 10 + \ldots + (6p - 2) + (6p + 4) = (p + 1)(3p + 4) = 3p^2 + 7p + 4$

Bevis:

$VL = p(3p + 1) + (6p + 4) = 3p^2 + 7p + 4 = HL$ #

2309 Visa att formeln

$$1 + 4 + 7 + \ldots + 3n - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

gäller för alla $n = 1, 2, 3\ldots$

2309. $n = 1$: $HL = \dfrac{1\cdot(3\cdot 1 - 1)}{2} = 1 = VL$

Antagande:

Formeln gäller för $n = p$, dvs

$1 + 4 + 7 + \ldots + 3p - 2 = p(3p-1)/2$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p+1$, dvs

$1 + 4 + 7 + \ldots + 3p - 2 + 3p + 1 = (p+1)(3p+2)/2 =$

$= \dfrac{3}{2}p^2 + \dfrac{5p}{2} + 1$

Bevis:

$VL = p(3p-1)/2 + 3p + 1 = \dfrac{3}{2}p^2 - \dfrac{p}{2} + 3p + 1 =$

$= \dfrac{3}{2}p^2 + \dfrac{5p}{2} + 1 = HL$ #

2310 Visa med ett induktionsbevis formeln

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

2310. $n=1$: $HL=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}=VL$

Antagande:

Formeln gäller för $n=p$, dvs

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2p-1)(2p+1)}=\frac{p}{2p+1}$$

Påstående:

Formeln gäller även för $n=p+1$, dvs

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2p-1)(2p+1)}+\frac{1}{(2p+1)(2p+3)}=\frac{p+1}{2p+3}$$

Bevis:

$$VL=\frac{p}{2p+1}+\frac{1}{(2p+1)(2p+3)}=\frac{p(2p+3)+1}{(2p+1)(2p+3)}=$$

$$=\frac{2p^2+3p+1}{4p^2+8p+3}=\frac{p^2+\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}}{2(p^2+2p+\frac{3}{4})}=\frac{(p+1)(p+\frac{1}{2})}{2(p+\frac{3}{2})(p+\frac{1}{2})}=$$

$$=\frac{p+1}{2p+3}=HL\ \#$$

2311 Bestäm t så att formeln

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 + \ldots +$
$+ n(3n - 1) = n^2 \cdot (n + t)$

gäller för $n = 1$.

Visa att formeln gäller med detta t-värde för $n = 1, 2, 3, \ldots$

2311, $n=1$: $HL = 1^2 \cdot (1+t) = 1 \cdot 2 \Rightarrow t = 1$

Antagande:

Formeln $n^2 \cdot (n+1)$ gäller för $n=p$, dvs

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + p(3p-1) = p^2 \cdot (p+1)$

Påstående:

Formeln gäller även för $n=p+1$, dvs

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + p(3p-1) + (p+1)(3p+2) = (p+1)^2(p+2)$

Bevis:

$VL = p^2(p+1) + (p+1)(3p+2) = (p+1)(p^2+3p+2) =$

$= (p+1)(p+1)(p+2) = (p+1)^2(p+2) = HL$ #

2312 Studera talföljden 12, 22, 32, 42, ...

a) Skriv en formel för det n:te talet.

b) Skriv en formel för summan av de n första talen.

c) Visa med ett induktionsbevis att formeln gäller.

2312. a) $a_n = \underline{10n + 2}$

b) $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \dfrac{12 + 10n + 2}{2} = \underline{n(7 + 5n)}$

c) $12 + 22 + 32 + \ldots + 10n + 2 = n(7 + 5n)$

$n = 1$: $HL = 1 \cdot (7 + 5 \cdot 1) = 12 = VL$

Antagande:

Formeln $n(7+5n)$ gäller för $n = p$, dvs

$12 + 22 + 32 + \ldots + 10p + 2 = p(7 + 5p)$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p + 1$, dvs

$12 + 22 + 32 + \ldots + 10p + 2 + 10p + 12 = (p+1)(5p+12) =$

$= 5p^2 + 17p + 12$

Bevis:

$VL = p(7 + 5p) + 10p + 12 = 5p^2 + 17p + 12 = HL$ #

2313 Använd induktion för att visa att
$3 \mid 2^{2n} - 1$ för alla positiva heltal n.

2313. $3 \mid 2^{2n} - 1 \iff 2^{2n} - 1 \pmod 3 = 0$

$n = 1$: $2^{2 \cdot 1} - 1 \pmod 3 = 3 \pmod 3 = 0$

Antagande:
Uttrycket $2^{2n} - 1 \pmod 3 = 0$ gäller för $n = p$, dvs
$2^{2p} - 1 \pmod 3 = 0$

Påstående:
Uttrycket gäller även för $n = p+1$, dvs
$2^{2p+2} - 1 \pmod 3 = 0$

Bevis:
$2^{2p+2} - 1 \pmod 3 = 2^2 \cdot 2^{2p} - 1 \pmod 3 =$

$= 4 \pmod 3 \cdot 2^{2p} \pmod 3 - 1 \pmod 3 =$

$= 1 \cdot 2^{2p} \pmod 3 - 1 \pmod 3 = 2^{p} - 1 \pmod 3 = 0$ #

2314 Du ska beräkna summan

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

a) Du får tre förslag på hur summan kan skrivas. Undersök vilket eller vilka förslag som verkar vara rätt.

A $\frac{8n-6}{2}$

B $\frac{n(n+2)}{3}$

C $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Visa med ett induktionsbevis att ditt resultat i a) stämmer.

2314. a) $n=1$:

A. $HL = \frac{8\cdot 1-6}{2} = 1 = VL$ (gäller ej för $n=2$)

B. $HL = \frac{1(1+2)}{3} = \frac{2}{3} \neq HL$

C. $HL = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1 = VL$ ←

b) **Antagande:**

Formeln $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ gäller för $n=p$, dvs

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

Påstående:

Formeln gäller även för $n=p+1$, dvs

$$1+2^2+3^2+\ldots+p^2+(p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

Bevis:

$$VL = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 =$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)(2p^2+p+6p+6)}{6} =$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} = HL$$

#

2315 Visa att olikheten

a) $(1+n)^2 \geq 1+n^2$
gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $n^2 \leq 2^n$ gäller för $n = 4, 5, 6, \ldots$

2315.

a) $n=1$: $VL = (1+1)^2 = 4$ $\quad HL = 1+1^2 = 3$

Antagande:

Uttrycken gäller för $n=p$, dvs $(1+p)^2 \geq 1+p^2$

Påstående:

Utrycken gäller även för $n=p+1$, dvs
$(p+2)^2 \geq 1+(p+1)^2$

Bevis:

$$\left.\begin{aligned} VL &= p^2+4p+4 \\ HL &= p^2+2p+2 \end{aligned}\right\} VL \geq HL$$

#

b) $n^2 \leq 2^n$

$n=1$: $1^2 - 2^1 = -1 \leq 0$

Antagande:

Uttrycket gäller för $n=p$, dvs $p^2 \leq 2^n$

Påstående:

Uttrycket gäller även för $n=p+1$, dvs $(p+1)^2 \leq 2^{p+1}$

Bevis:

$$\ln (p+1)^2 \leq \ln 2^{p+1}$$

$$2 \cdot \ln(p+1) \leq (p+1) \cdot \ln 2$$

$$p+1 \leq e^{(p+1) \cdot \frac{\ln 2}{2}}$$

$$p \leq e^{(p+1) \cdot \frac{\ln 2}{2}} - 1$$

$$p = 4 \leq e^{(p+1) \cdot \frac{\ln 2}{2}} - 1 \approx e^{1{,}73} - 1 = 4{,}65$$

HL växer exponentiellt med större p, medan p växer linjärt $\Rightarrow (p+1)^2 \leq 2^{p+1}$, $p = 4, 5, 6, \ldots$ #

2316 Bevisa med induktion att funktionen $y = x^n$, där n är ett positivt heltal, har derivatan $y' = nx^{n-1}$.

2316.
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Antagande:

Uttrycket gäller för $x = p$, dvs

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(p+h) - y(p)}{h} = n \cdot p^{n-1}$$

Påstående:

Uttrycket gäller även för $x = p+1$, dvs

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(p+1+h) - y(p+1)}{h} = n \cdot (p+1)^{n-1}$$

Bevis:

$$y(p+1+h) = (p+1+h)^n \; ; \; y(p+1) = (p+1)^n$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(p+1+h) - y(p+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(p+1+h)^n - (p+1)^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(p+1)^n + n \cdot (p+1)^{n-1} \cdot h + \ldots + h^n - (p+1)^n}{h} = n(p+1)^{n-1}$$

#