kunskapsmatrisen exam.net

Formelsamling för Matematik Specialisering

Aritmetik

Prefix	10^{12}, tera, T 10^{9}, giga, G 10^{6}, mega, M	10^{3}, kilo, k 10^{2}, hekto,	10^{-1}, deci, d 10^{-2}, centi, c 10^{-3}, milli, m	10^{-6}, mikro, µ 10^{-9}, nano, n 10^{-12}, piko, p
Potenser	$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
	$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

Logaritmer

$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$ $\qquad$ $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

$\lg x + \lg y = \lg xy$ $\qquad$ $\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$ $\qquad$ $\lg x^p = p \lg x$

Absolutbelopp

$$|a| = \begin{cases} a \text{ om } a \geq 0 \\ -a \text{ om } a < 0 \end{cases}$$

Algebra

Regler

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Andragrads-ekvationer

$x^2 + px + q = 0$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Funktioner

Räta linjen

$y = kx + m$

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

För vinkelräta linjer

$k_1 \cdot k_2 = -1$

Polynom-funktioner

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0\, x^{n-n}$, där $n \in \mathbb{Z}^+$

Potensfunktioner

$y = Cx^a$

Exponential-funktioner

$y = Ca^x$ där $a > 0, a \neq 1$

Hyperboliska funktioner

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Gränsvärden

l'Hopitals regel

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Gäller då f och$g$ är deriverbara funktioner, $g'(x) \neq 0$ och då

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

Differential- och integralkalkyl

Derivatans definition

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{a\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Derivator

Funktion	Derivata
$x^n, n, a \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$a^{kx}, a>0$	$ka^{kx}\cdot\ln a$
$\ln x\,, x>0$	$\frac{1}{x}$
e^{kx}	ke^{kx}
$\sin x$	$\cos x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Kedjeregeln

Om $y=f(u)$ och $u=g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y=f\big(g(x)\big)$ att

$$y'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) \text{ eller } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Tangerande plan till flervariabla funktioner

Funktionen $f(x,y)=z_1$ tangeras i punkten (a,b) av planet z_2, där

$$z_2=f(a,b)+f_x'(a)\cdot(x-a)+f_y'(b)\cdot(y-b)$$

Integraler

Integralkalkylens fundamentalsats

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(a) + F(b)$ där $F'(x) = f(x)$ och $a < b$

Partiell integration

$$\int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\mathrm{d}x$$

Primitiva funktioner

Funktion	Primitiv funktion
k	$kx + C$
$kx^n, n, a \in \mathbb{R}, n \neq 1$	$\dfrac{kx^{n+1}}{n+1} + C$
$a^{kx}, a > 0$	$\dfrac{a^{kx}}{k \ln a} + C$
$\dfrac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^{kx}	$\dfrac{e^{kx}}{k} + C$
$\ln x, x > 0$	$x \cdot \ln x - x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\sin^{-1} x$	$x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + C$
$\tan^{-1} x$	$x \tan^{-1} x + \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$
$\sinh x$	$\cosh x$+C
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\tanh x$	$\ln(\cosh x) + C$

Differential-ekvationer med algebraiska lösningsmetoder

Om y är en funktion av x och är deriverbar

Differentialekvationer av 1:a ordningen

$y' + ay = 0$	$y' + ay = f(x)$
$y = Ce^{-ax}$	$y = Ce^{-ax} + y_p$, där y_p beror på vilken typ av funktion som $f(x)$ är samt a.

Differentialekvationer av 2:a ordningen

$y'' + ay = 0$

$y = C_1 + C_2 e^{-ax}$

$y'' + ay' + by = 0$

$r^2 + ar + b = 0$ ger $r = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

Om

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b > 0, r_1 \neq r_2, \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0, r_1 = r_2, \qquad y = e^{rx}(C_1 x + C_2)$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0, r_{1,2} = p \pm iq, y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$

Separabla differentialekvationer

$g(y) \cdot y' = f(x)$

$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

med numerisk lösningsmetod

Eulers stegmetod

$y' = f(x, y)$ steglängd h

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Taylorutveckling

Om $n \in \mathbb{Z}^+$ kan en taylorutveckling av ordningen n av funktionen f kring punkten a skrivas:

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ där

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

är taylorpolynomet av funktionen f och där

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

är Lagranges restterm, där $x < z_n < a$. Gäller under förutsättning att f har derivator för alla ordningar n.

Maclaurin-utveckling

$$f(x) = M_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \text{där } 0 < z_n < x \text{ och } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Gäller under förutsättning att f har derivator för alla ordningar n.

Komplexa tal

Representation $z = a + bi = re^{iv} = r(\cos v + i \sin v)$

Argument $\arg z = v, \qquad \tan v = \dfrac{b}{a}$

Absolutbelopp $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Konjugat $z = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = a - bi$

Räknelagar $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2))$

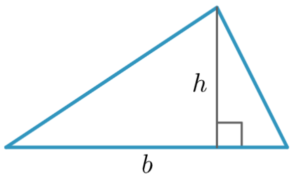
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2))$

De Moivres formel $z^n = \big(r(\cos v + i \sin v)\big)^n = r^n(\cos nv + i \sin nv)$ där $n \in \mathbb{Z}$

Geometri

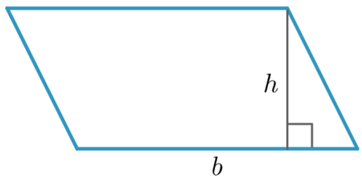
Triangel

$A = \dfrac{bh}{2}$



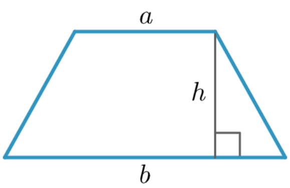
Parallellogram

$A = bh$



Parallelltrapets

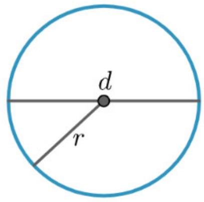
$A = \dfrac{h(a + b)}{2}$



Cirkel

$A = \pi r^2$

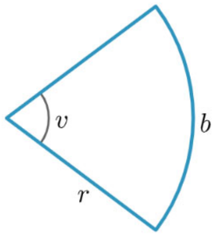
$O = 2\pi r = \pi d$



Cirkelsektor

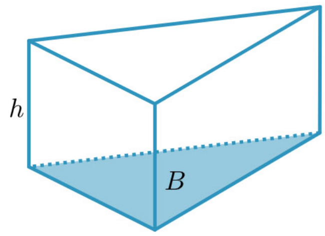
$b = \dfrac{v}{360°} \cdot 2\pi r$

$A = \dfrac{v}{360°} \pi r^2 = \dfrac{br}{2}$



Prisma

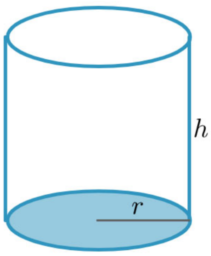
$V = Bh$



Cylinder

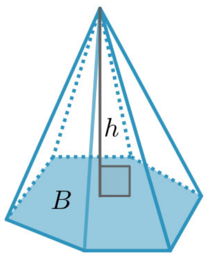
$V = \pi r^2 h$

$A_{\text{mantel}} = 2\pi r h$



Pyramid

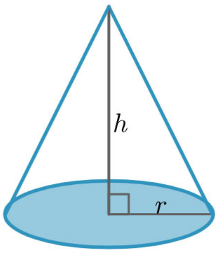
$V = \dfrac{Bh}{3}$



Kon

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

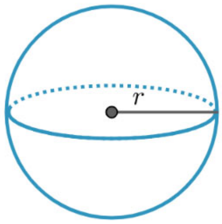
$$A_{\text{mantel}} = \pi r s$$



Klot

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

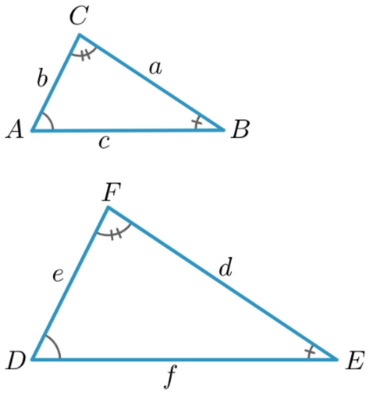
$$A = 4\pi r^2$$



Likformighet

Trianglarna ABC och DEF är likformiga.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Skala

Areaskalan $=$ (Längdskalan)^2

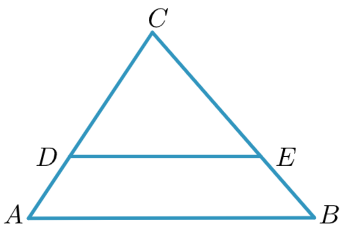
Volymskalan $=$ (Längdskalan)^3

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

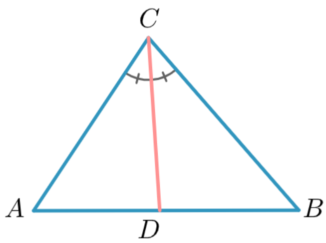
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$



Bisektrissatsen

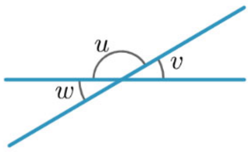
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



Sidovinklar och vertikalvinklar

$u + v = 180°$ sidovinklar

$w = v$ vertikalvinklar

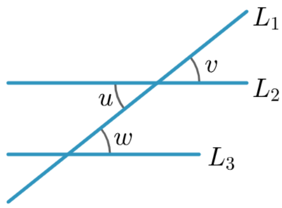


Likbelägna vinklar och alternatvinklar

L_1 skär två parallella linjer L_2 och L_3

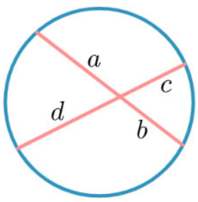
$v = w$

$u = w$



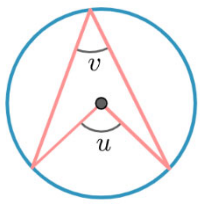
Kordasatsen

$ab = cd$



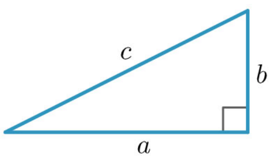
Randvinkelsatsen

$u = 2v$



Pythagoras sats

$a^2 + b^2 = c^2$



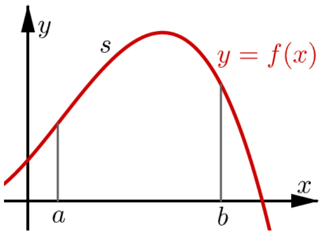
Avståndsformeln

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

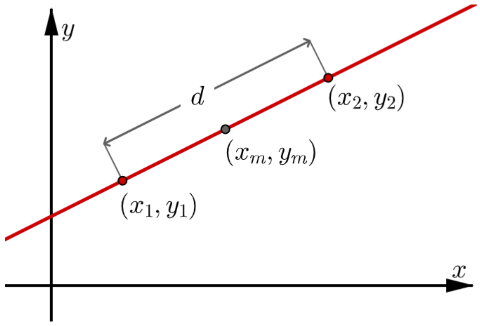
Mittpunktsformeln

Längden av en kurva

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

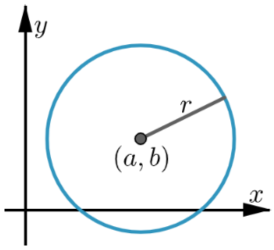


$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ och } y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Cirkelns ekvation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



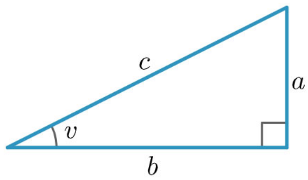
Trigonometri

Definitioner

$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

$$\tan v = \frac{a}{b}$$

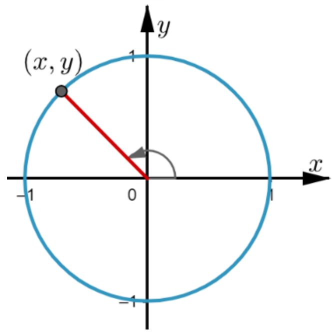


Enhetscirkeln

$$\sin v = y$$

$$\cos v = x$$

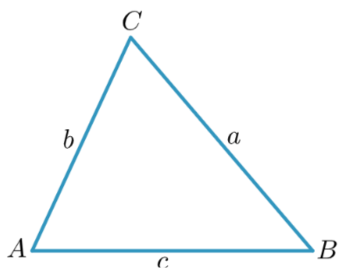
$$\tan v = \frac{y}{x}$$



Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Areasatsen $T = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$



Trigonometriska formler

$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

$\sin 2v = 2 \sin v \cos v$

$$\cos 2v = \begin{cases} \cos^2 v - \sin^2 v \\ 2\cos^2 v - 1 \\ 1 - 2\sin^2 v \end{cases}$$

$a \sin x + b \cos x = c \sin(x+v)$

där $c = \sqrt{a^2+b^2}$ och $\tan v = \dfrac{b}{a}$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Exakta värden

$v°$ v rad	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Linjär algebra

Determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Matrisaddition

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Matris-multiplikation

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot d_2 \\ c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}$$

Invers

För matrisen A gäller att $A \cdot A^{-1} = E$.

Talteori

Kongruens

$a \equiv b(\text{mod } n)$ om $(a-b)|n$

Om $a_1 \equiv b_1(\text{mod } n)$ och $a_2 \equiv b_2(\text{mod } n)$ gäller att

1. $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(\text{mod } n)$
2. $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\text{mod } n)$

Om $a \equiv b(\text{mod } n)$ gäller att

3. $ca \equiv cb(\text{mod } n)$ för alla heltal c
4. $a^c \equiv b^c(\text{mod } n)$ för alla heltal c

Talföljder

Aritmetisk talföljd

För en aritmetiskt talföljd, $a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n,$ där $n \in \mathbb{Z}$ gäller att $a_{n+1} - a_n = d$ för alla tal i talföljden.

Explicit formel: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + d$

Aritmetisk summa: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Geometrisk talföljd

För en geometrisk talföljd, $a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n,$ där $n \in \mathbb{Z}$ gäller att $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = k, k \neq 1$ för alla tal i talföljden.

Explicit formel: $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n \cdot d$

Geometrisk summa: $s_n = \dfrac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$

Kombinatorik

Permutationer

$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ där $0 \leq k \leq n$

Kombinationer

$C(n,k) = \binom{n}{k} = \dfrac{P(n,k)}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ där $0 \leq k \leq n$

Mängdlära

Mängdoperatorer

A och B är delmängder av grundmängden G.

$A \cap B = \{x|x \in A \text{ och } x \in B\}$

$A \cup B = \{x|x \in A \text{ eller } x \in B\}$

$A \backslash B = \{x|x \in A \text{ och } x \notin B\}$

$A^C = \{x|x \in G\ och\ x \notin A\}$

Delmängder

Om kardinaltalet (antal element) i mängden A är $n, n \in \mathbb{N}$, är antalet möjliga delmängder:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Antalet äkta delmängder är $2^n - 1$.

Beteckningar för viktiga mängder

$\mathbb{N} = \{\text{mängden naturliga tal}\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{mängden heltal}\}, \mathbb{Z}^+ = \{n|n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$

$\mathbb{Q} = \{\text{mängden rationella tal}\}$

$\mathbb{R} = \{\text{mängden reella tal}\}$

$\mathbb{C} = \{\text{mängden komplexa tal}\}$

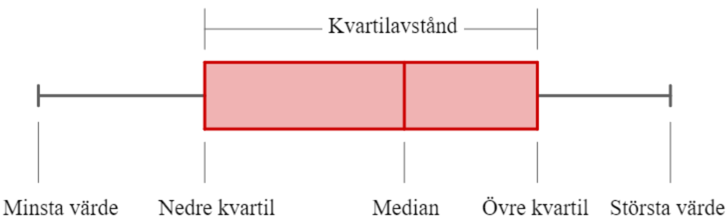
Statistik

Standardavvikelse

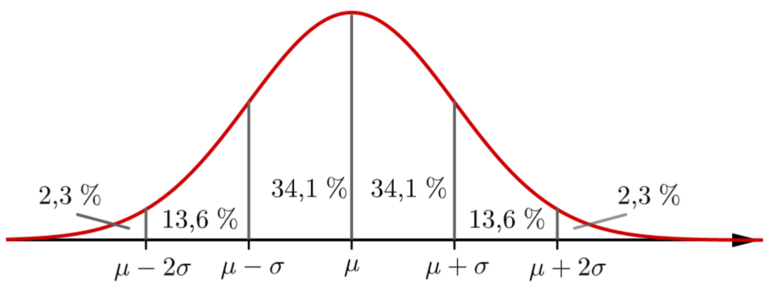
För stickprov gäller

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Lådagram



Normalfördelning



Täthetsfunktion för normalfördelning

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$