1 Lös differentialekvationen

a) $y' = 2x$ b) $y' = 3y$ c) $y'' = 4$

1. a) $\underline{y = x^2 + C}$

b) $\underline{y = Ce^{3x}}$

c) $y' = 4x + C_1$

$\underline{y = 2x^2 + C_1x + C_2}$

---

2 Bestäm den lösning till ekvationen som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 5$.

a) $y' + 4x = 0$ b) $y' + 3y = 0$

2. a) $y = -2x^2 + C$

$y(0) = 5 \Rightarrow C = 5$

$\underline{y = -2x^2 + 5}$

b) $y = Ce^{-3x}$

$y(0) = 5 \Rightarrow C = 5$

$\underline{y = 5e^{-3x}}$

---

3 Om N är antal invånare i en provins i ett land, t år efter år 2000, så gällde följande samband under en tioårsperiod:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}015N \qquad N(0) = 2{,}48 \text{ miljoner}$$

Beskriv i ord vad dessa samband innebär för folkmängden i provinsen

3. Befolkningstillväxten är 1,5% av folkmängden. År 2000 var folkmängden 2,48 miljoner.

---

4 Ett företag som tillverkar och säljer cyklar genomför en reklamkampanj. Resultatet blir att försäljningen, som tidigare var konstant, ökar. Efter reklamkampanjen är ändringstakten i antal sålda cyklar vid varje tidpunkt proportionell mot kvadratroten ur antal cyklar som säljs just då.

Beskriv ändringstakten i antalet sålda cyklar med en differentialekvation

a) före reklamkampanjen

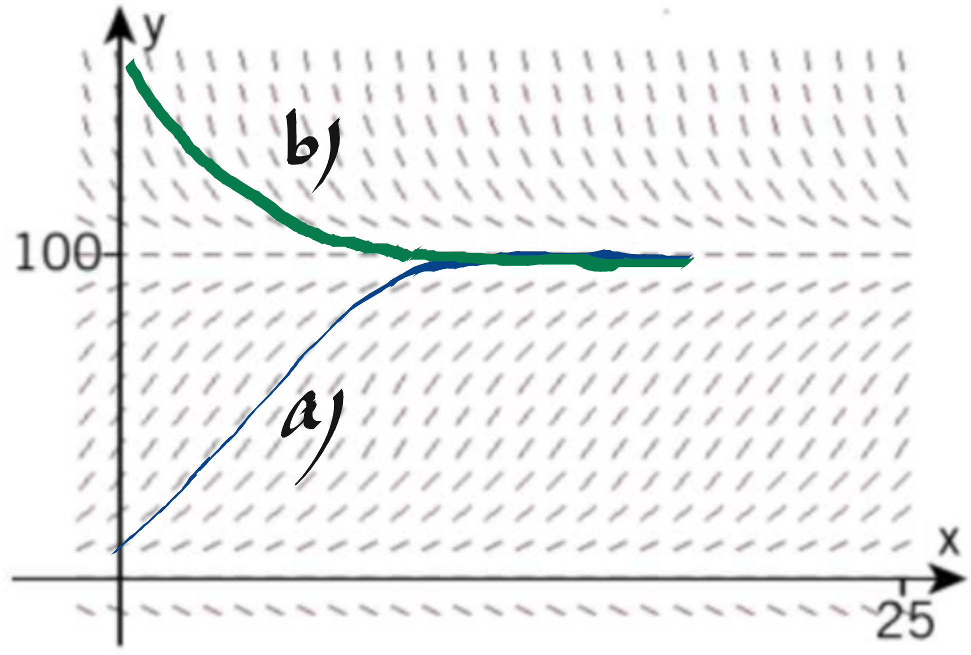
b) efter reklamkampanjen.

4. a) $y' = 0$

b) $y' = k\sqrt{y}\ ,\ k > 0$

---

5 Figuren visar riktningsfältet till en differentialekvation.



Vad händer enligt riktningsfältet med en lösningskurva som uppfyller villkoret

a) $y(0) = 10$ b) $y(0) = 150$?

---

6 Funktionen $y = \frac{4}{x^2}$ är en lösning till

$y' = \frac{ay}{x}$

Bestäm talet a.

6.

$$y = \frac{4}{x^2} \quad ; \quad y' = -8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$$

$$a = \frac{y'}{y} \cdot x = \frac{-\frac{8}{x^3}}{\frac{4}{x^2}} \cdot x = \underline{-2}$$

7 Ett föremåls rörelse beskrivs av ekvationen

$\frac{dv}{dt} = \frac{e^{t/10}}{2}$ där v är hastigheten i m/s och t är tiden i sekunder. För hastighetsfunktionen $v(t)$ gäller att $v(0) = 0$ och för vägfunktionen $s(t)$ gäller att $s(0) = 0$.

Bestäm vägfunktionen $s(t)$.

7.

$$v(t) = 5e^{t/10} + C_1$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow 5 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -5$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt + C_2 = 50e^{t/10} - 5t + C_2$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow 50 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -50$$

$$s(t) = 50e^{t/10} - 5t - 50$$

8 Anja påstår att både $y_1 = e^{5x} \cdot \sin 3x$ och $y_2 = e^{5x} \cdot \cos 3x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' = 10y' - 34y$.

Undesök om detta är sant.

8. $y_1 = e^{5x} \cdot \sin 3x$

$$y_1' = 5e^{5x} \cdot \sin 3x + e^{5x} \cdot 3\cos 3x = e^{5x}(5\sin 3x + 3\cos 3x)$$

$$VL = y_1'' = 25e^{5x} \cdot \sin 3x + 5e^{5x} \cdot 3\cos 3x + 5e^{5x} \cdot 3 \cdot \cos 3x - e^{5x} \cdot 9 \cdot \sin 3x$$

$$= e^{5x}(16\sin 3x + 30\cos 3x)$$

$$HL = e^{5x}(50\sin 3x + 30\cos 3x - 34\sin 3x) =$$

$$= e^{5x}(16\sin 3x + 30\cos 3x) = VL \quad \#$$

$y_2 = e^{5x} \cdot \cos 3x$

$$y_2' = 5e^{5x} \cdot \cos 3x - e^{5x} \cdot 3\sin 3x = e^{5x}(5\cos 3x - 3\sin 3x)$$

$$VL = y_2'' = 25e^{5x} \cdot \cos 3x - 15e^{5x}\sin 3x - 15e^{5x}\sin 3x - 9e^{5x}\cos 3x =$$

$$= e^{5x}(16\cos 3x - 30\sin 3x)$$

$$HL = e^{5x}(50\cos 3x - 30\sin 3x - 34\cos 3x) =$$

$$= e^{5x}(16\cos 3x - 30\sin 3x) = VL \quad \#$$

9 Ange den allmänna lösningen till ekvationen

$$\frac{y'-b}{a}=y$$

där a och b är konstanter och $a \neq 0$.

9.

$$y' - ay = b$$

$$y = c_1 e^{ax} + c_2$$

$$y' = ac_1 e^{ax}$$

$$ac_1 e^{ax} - ac_1 e^{ax} - ac_2 = b \Rightarrow c_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\underline{y = ce^{ax} - \frac{b}{a}}$$

---

10 Vilken lutning har en lösningskurva till differentialekvationen $y' = 0{,}1x + 0{,}2y$ i punkten

a) $(275, -90)$ b) $(-275, 90)$?

10.

a) $k = y'(275,-90) = 0.1 \cdot 275 + 0.2 \cdot (-90) = \underline{9.5}$

b) $k = y'(-275,90) = 0.1 \cdot (-275) + 0.2 \cdot 90 = \underline{-9.5}$

---

11 Rymdfysiker kan genom att analysera ljuset från en stjärna bestämma hur mycket av ämnet Uran-238 som finns kvar i stjärnan. Då kan man avgöra stjärnans ålder.

Atomkärnor av Uran-238 sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot antalet kvarvarande atomkärnor N vid tiden t år.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen då hälften av antalet atomkärnor har sönderfallit efter $4{,}5 \cdot 10^9$ år.

Genom att analysera ljuset från stjärnan CS 31082-001 har fysikerna bestämt att det återstår ungefär 14,6 % av den ursprungliga mängden Uran-238 som fanns i stjärnan då den bildades.

c) Bestäm stjärnans ålder. *(NP)*

11. a) $N' = k \cdot N$

b) $N = Ce^{kt}$

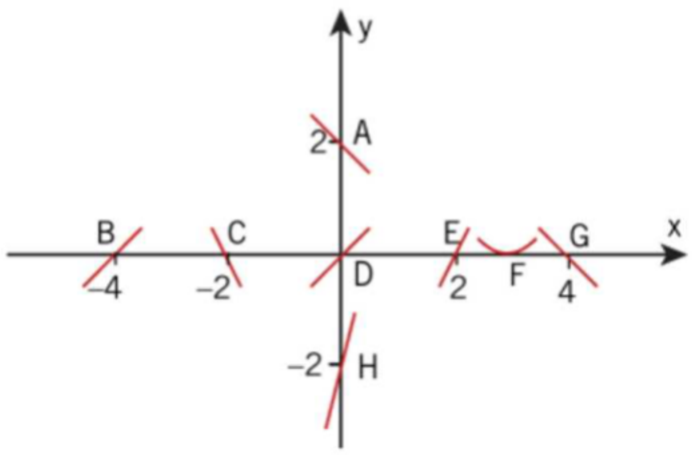
$$\frac{C}{2} = Ce^{k \cdot 4{,}5 \cdot 10^9} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{4{,}5 \cdot 10^9} = -1{,}540 \cdot 10^{-10}$$

$N = Ce^{-1{,}540 \cdot 10^{-10} t}$

c) $0{,}146\,C = Ce^{-1{,}540 \cdot 10^{-10} t} \Rightarrow$

$$t = \frac{\ln 0{,}146}{-1{,}540 \cdot 10^{-10}} \approx 12\,500 \text{ milj år}$$

12 Vilka av kurvsegmenten kan inte vara en del av en lösningskurva till $y' = y^2 + x$?



12. B, F, G: Då $y=0$ måste y' ha samma tecken som x.

A: Då $x=0$ måste y' vara större än noll.

D: Då $x=0, y=0$ (origo) är $y'=0$, dvs horisontell.

---

13 Differentialekvationen $y' + y = 3x + 2$ har en partikulärlösning $y_p = kx + m$.
Bestäm konstanterna k och m.

13. $y = y_h + y_p = Ce^{-x} + kx + m$

$y' = -Ce^{-x} + k$

$-Ce^{-x} + k + Ce^{-x} + kx + m = 3x + 2 \Rightarrow$

$\underline{k = 3}$

$\underline{m = 2 - k = -1}$

14 a) Med lösningar till ekvationer menas vanligen tal som uppfyller vissa villkor. T ex är talet 3 en lösning till tredjegradsekvationen $x^3 - 27 = 0$. Vad menas med lösningar till differentialekvationer?

b) Undersök om det finns någon lösning till differentialekvationen $3y' - 10y = 0$ som uppfyller de båda villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 1$? *(NP)*

14. a) Lösningen till en diffekvation är vanligen en funktion.

b) $y' - \frac{10}{3}y = 0$

$y = Ce^{\frac{10}{3}x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

$y = e^{\frac{10}{3}x}$

$y' = \frac{10}{3}e^{\frac{10}{3}x}$

$y'(0) \neq 1$ Svar: Nej

15 Koldioxiden i atmosfären ökar bl a på grund av förbränning av fossila bränslen. Före industrialismens genombrott uppgick koldioxidhalten till 280 ppm (miljondelar). År 1960 var halten 310 ppm och har sedan dess ökat med hastigheten 0,40 % per år.

a) Ställ upp en differentialekvation som visar hur koldioxidhalten *y* ppm förändras med tiden *x* år räknat från 1960.

b) När det förindustriella värdet 280 ppm har fördubblats anser vissa forskare att medeltemperaturen vid jordytan kommer att höjas 2 – 5 grader. Kommer denna fördubbling att inträffa under 2000-talet?

c) Slutsatsen i b) grundar sig på användning av en matematisk modell. Hur kan en kritiker argumentera mot denna användning av modellen? (*NP*)

15. a) $y' = 0.004y \quad , \quad y(0) = 310$

b) $y = 310e^{0.004x}$

$2 \cdot 280 = 310e^{0.004x} \Rightarrow$

$x = \dfrac{\ln \frac{2 \cdot 280}{310}}{0,004} \approx 150$ år $\equiv$ År 2110

c) ökningstakten behöver inte vara konstant.

16 En sjö har under en lång tid förorenats av utsläpp från en fabrik. Detta har medfört att det nu finns cirka 500 kg föroreningar i sjön.

Fabriken släpper ut cirka 100 kg föroreningar per år. Via ett vattendrag försvinner årligen 10 % av mängden föroreningar från sjön.

För att studera hur mängden föroreningar (y kg) i sjön förändras med tiden (t år) går det att använda en matematisk modell i form av följande differentialekvation:

$$\frac{dy}{dt} = 100 - 0{,}1y \text{ och } y(0) = 500$$

a) Förklara hur $\frac{dy}{dt} = 100 - 0{,}1y$ hänger ihop med förutsättningarna i texten.

b) Lös differentialekvationen då $y(0) = 500$.

c) Vad händer enligt modellen med mängden föroreningar i sjön i ett längre tidsperspektiv?

(*NP*)

16. a) Det tillkommer 100 kg/år och försvinner 0,1y kg/år.

b) $y' + 0{,}1y = 100 \quad , \quad y(0) = 500$

$y = Ce^{-0{,}1x} + a$

$y' = -0{,}1Ce^{-0{,}1x}$

$-0{,}1Ce^{-0{,}1x} + 0{,}1Ce^{-0{,}1x} + 0{,}1a = 100 \Rightarrow a = 1000$

$y(0) = 500 \Rightarrow C + a = 500 \Rightarrow C = -500$

$y = 1000 - 500e^{-0{,}1x}$

c) $\lim_{x \to \infty} y = 1000$. Mängden föroreningar går mot 1000 kg.

17 I en skog samlas nedfallna löv på marken med cirka 3 g per cm^2 och år. Förmultningshastigheten är 75 % per år av lövmängden

Undersök vad som händer med de nedfallna löven på sikt.

17. $y' = 3 - 0{,}75y \quad , \quad y(0) = 0$

$y = Ce^{-0{,}75x} + a$

$y' = -0{,}75Ce^{-0{,}75x}$

$-0{,}75Ce^{-0{,}75x} = 3 - 0{,}75Ce^{-0{,}75x} - 0{,}75a \Rightarrow a = \frac{3}{0{,}75} = 4$

$y(0) = 0 \Rightarrow C + a = 0 \Rightarrow C = -4$

$y = 4(1 - e^{-0{,}75x})$

$\lim_{x \to \infty} y = 4$, På sikt samlas 4 g/cm^2

18 En biolog studerade tillväxten för en nyfödd blåval och fann att vikten y ton under de första åtta månaderna kunde beskrivas med differentialekvationen

$\frac{dy}{dt} = 0{,}27y$ där t är tiden i månader.

När valen var åtta månader gammal vägde den 23 ton. För att beskriva valens vikt y kg efter åtta månaders ålder använder biologen den logistiska tillväxtmodellen

$\frac{dy}{dt} = 0{,}27y\left(1 - \frac{y}{150}\right)$ där t var valens ålder i månader.

a) Vad vägde valen som nyfödd?

b) Med vilken hastighet ökade valens vikt då den var fyra månader gammal?

c) Visa att funktionen

$y = \frac{150}{1 + 48 \cdot e^{-0,27t}}$ är en lösning till den logistiska tillväxtmodellen.

d) Beräkna och jämför valens vikt enligt de två modellerna dels för små värden på t dels för stora värden på t. Kommentera resultatet.

a) $y' = 0{,}27y \quad , \quad y(8) = 23$

$y = Ce^{0{,}27t}$

$Ce^{0{,}27 \cdot 8} = 23 \Rightarrow C \approx 2{,}65$

$y = 2{,}65e^{0{,}27t}$

$\underline{y(0) = 2{,}65 \text{ ton}}$

b) $y' = 2{,}65 \cdot 0{,}27e^{0{,}27t} = 0{,}72e^{0{,}27t}$

$\underline{y'(4) = 0{,}72e^{0{,}27 \cdot 4} = 2{,}1 \text{ ton/mån}}$

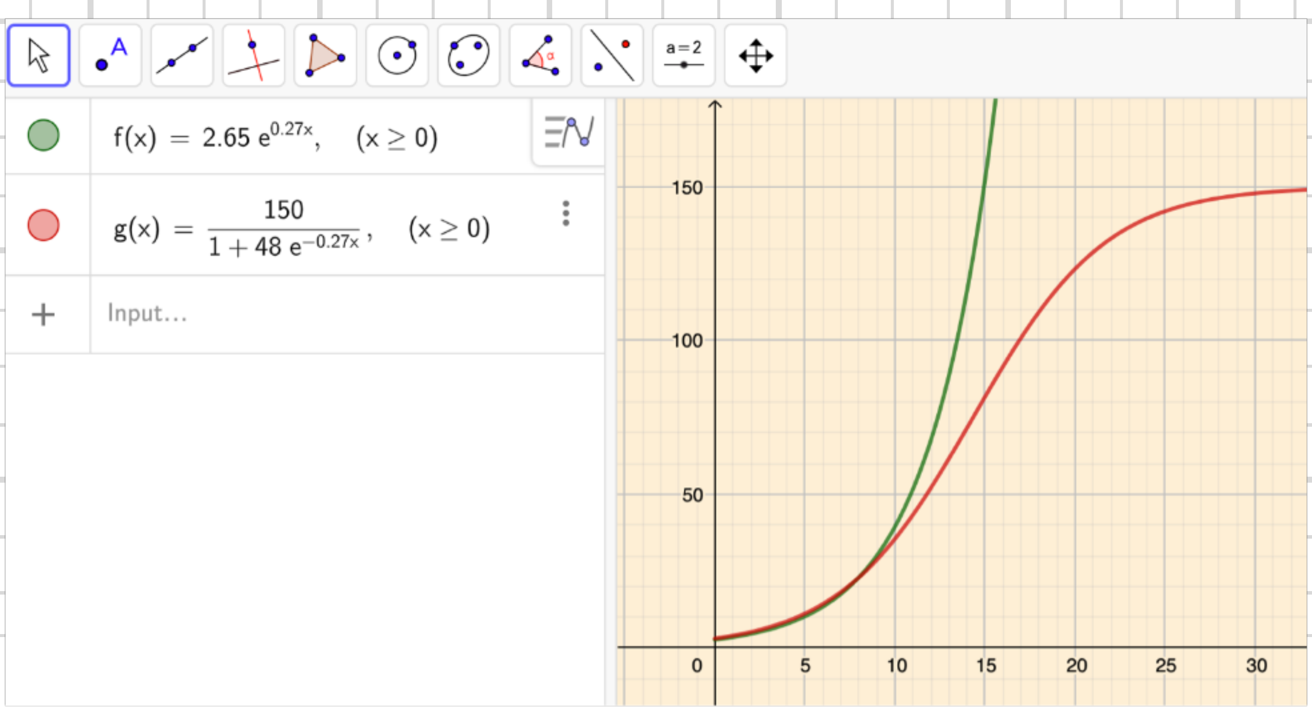
18.

c) $HL = y' = \frac{-150 \cdot 48 \cdot (-0{,}27) \cdot e^{-0{,}27t}}{(1+48e^{-0{,}27t})^2} = \frac{1{,}944e^{-0{,}27t}}{(1+48e^{-0{,}27t})^2}$

$VL = 0{,}27y\left(1 - \frac{y}{150}\right) = \frac{40{,}5}{1+48e^{-0{,}27t}} - \frac{40{,}5}{1+48e^{-0{,}27t}} \cdot \frac{1}{1+48e^{-0{,}27t}} =$

$= \frac{40{,}5(1+48e^{-0{,}27t}) - 40{,}5}{(1+48e^{-0{,}27t})^2} = \frac{1{,}944e^{-0{,}27t}}{(1+48e^{-0{,}27t})^2} = HL \ \#$

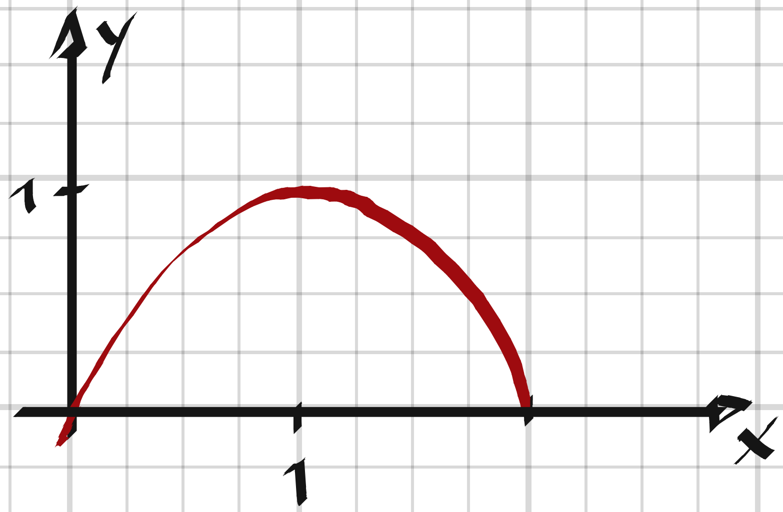
d)



19 Finn en differentialekvation som har en lösningskurva som uppfyller

$y(0) = 0 \quad y(1) = 1 \quad y(2) = 0$

Kan du hitta fler differentialekvationer som uppfyller samma villkor?



19

$$y = -x(x-2) = 2x - x^2$$

ex1: $y' = 2 - 2x$

$$y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

ex2: $y' = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

20 Kalle är inblandad i en arbetsplatsolycka där han råkar inandas skadliga ångor från ett kemiskt preparat.

Det dröjer ganska länge innan Kalle uppsöker ett sjukhus och inte förrän 20 timmar efter olyckan tas ett blodprov. Analysen visar att blodet innehåller 0,00372 mg/ml av det gift som han inandats.

Efter ytterligare 8 timmar tas ett nytt blodprov och då har koncentrationen gift i blodet sjunkit till 0,00219 mg/ml.

Låt oss anta att förändringshastigheten för giftkoncentrationen är proportionell mot koncentrationen och låt y mg/ml vara koncentrationen av gift i blodet t timmar efter det första blodprovet.

Läkaren vill ge medicinsk behandling om giftkoncentrationen vid något tillfälle varit större än 0,017 mg/ml. Finns det enligt modellen någon risk för att koncentrationen av gift i Kalles blod varit så hög? *(NP)*

$$y' = -ky \;,\; y(20) = 0{,}00372 \;,\; y(28) = 0{,}00219$$

$$y = Ce^{-kt}$$

$$\begin{cases} Ce^{-20k} = 0{,}00372 \\ Ce^{-28k} = 0{,}00219 \end{cases} \Rightarrow$$

$$e^{8k} = \frac{0{,}00372}{0{,}00219} \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{0{,}00372}{0{,}00219}\right)}{8} = 0{,}0662$$

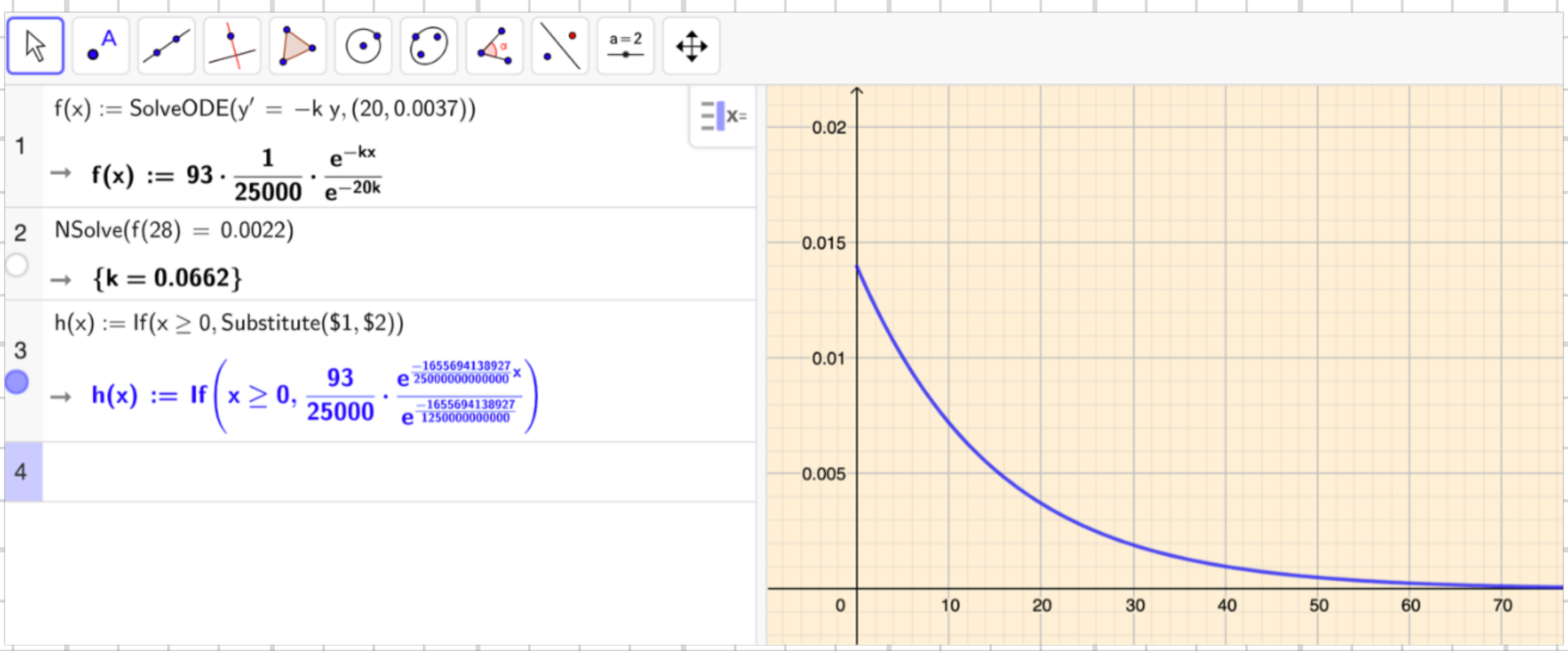
$$C = \frac{0{,}00372}{e^{-20 \cdot 0{,}0662}} = 0{,}014$$

20.

$$y = 0{,}014e^{-0{,}0662t} \Rightarrow \underline{y(0) = 0{,}014 \text{ g}}$$

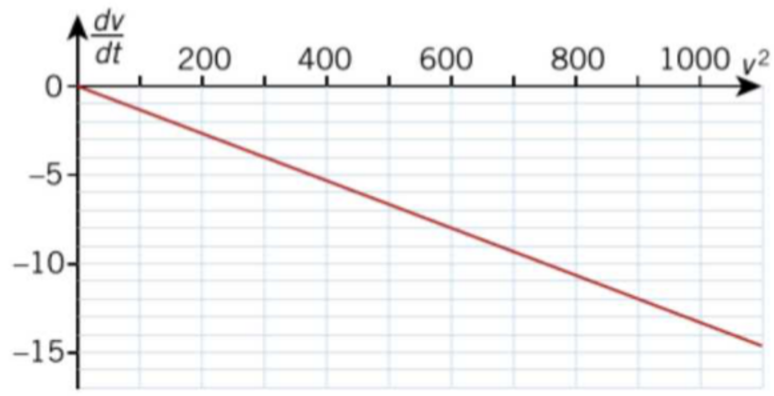
<u>Nej, koncentrationen var maximalt 14 mg.</u>

Lösning i Geogebra:



21 En snabb motorbåt med massan 1 200 kg rör sig med hastigheten 30 m/s i lugnt vatten när båtens motor plötsligt stannar. Båten bromsas in av vattnet och t sekunder efter det att båtmotorn stannat är båtens hastighet v m/s.

Båtens hastighetsändring $\frac{dv}{dt}$ i m/s² är enligt en modell beroende av hastigheten i kvadrat enligt nedanstående graf.



a) Ställ upp en differentialekvation för båtens rörelse vid inbromsningen med hjälp av diagrammet ovan.

b) En lösning till differentialekvationen ges av uttrycket $v = \dfrac{1200}{16t + C}$ där C är en konstant. Beräkna det värde som detta uttryck ger för båtens hastighet 2 sekunder efter det att motorn stannat.

c) Bestäm hur långt båten har rört sig efter 2 sekunders inbromsning.

21.

a) $v' = -\dfrac{8}{600}v^2 = -0{,}0133\,v^2 \;, \quad v(0) = 30$

b) $v(0) = 30 \Rightarrow \dfrac{1200}{16 \cdot 0 + C} = 30 \Rightarrow C = 40$

$v(2) = \dfrac{1200}{16 \cdot 2 + 40} = 16{,}7 \text{ m/s}$

c) $s = \displaystyle\int_0^2 v\,dt = 300 \cdot \int_0^2 \frac{1}{4t+10}\,dt = \frac{300}{4}\left[\ln(4t+10)\right]_0^2 =$

$= \dfrac{300}{4} \cdot \ln\dfrac{18}{10} = 44{,}1 \text{ m}$

22 Differentialekvationen
$y''' + y'' + y' + y = A(\cos x + \sin x)$ (1)
har en lösning $y_p = x\cos x$ och ekvationen
$y''' + y'' + y' + y = 0$ (2) har en lösning
$y_h = B(e^{-x} + \cos x + \sin x)$

a) Bestäm konstanterna A och B.

b) Ange samtliga lösningar till ekvation (1).

22.

a)

$$\left.\begin{aligned} y_h &= B(e^{-x} + \cos x + \sin x) \\ y_h' &= B(-e^{x} - \sin x + \cos x) \\ y_h'' &= B(e^{x} - \cos x - \sin x) \\ y_h''' &= B(e^{x} + \sin x - \cos x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{B \text{ godtycklig}}$$

$$y_p = x\cos x$$
$$y_p' = \cos x - x\sin x$$
$$y_p'' = -\sin x - (\sin x + x\cos x) = -2\sin x - x\cos x$$
$$y_p''' = -2\cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x - 3\cos x$$

$$\cancel{x\sin x} - 3\cos x - 2\sin x - \cancel{x\cos x} + \cos x - \cancel{x\sin x} + \cancel{x\cos x} = A(\cos x + \sin x)$$

$$-2(\cos x + \sin x) = A(\cos x + \sin x) \Rightarrow \underline{A = -2}$$

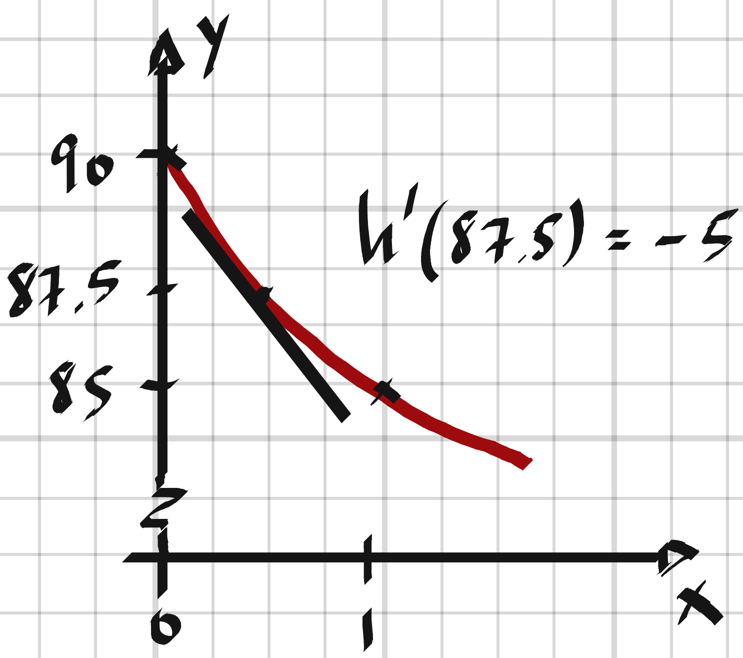
b)

$$\underline{y = y_h + y_p = B(e^{-x} + \cos x + \sin x) + x\cos x}$$

23 Under ett regnväder fylls en vattentunna, med höjden 90 cm, upp till brädden. När det slutar regna läcker tunnan så att vattennivån sjunker med en hastighet som är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet.

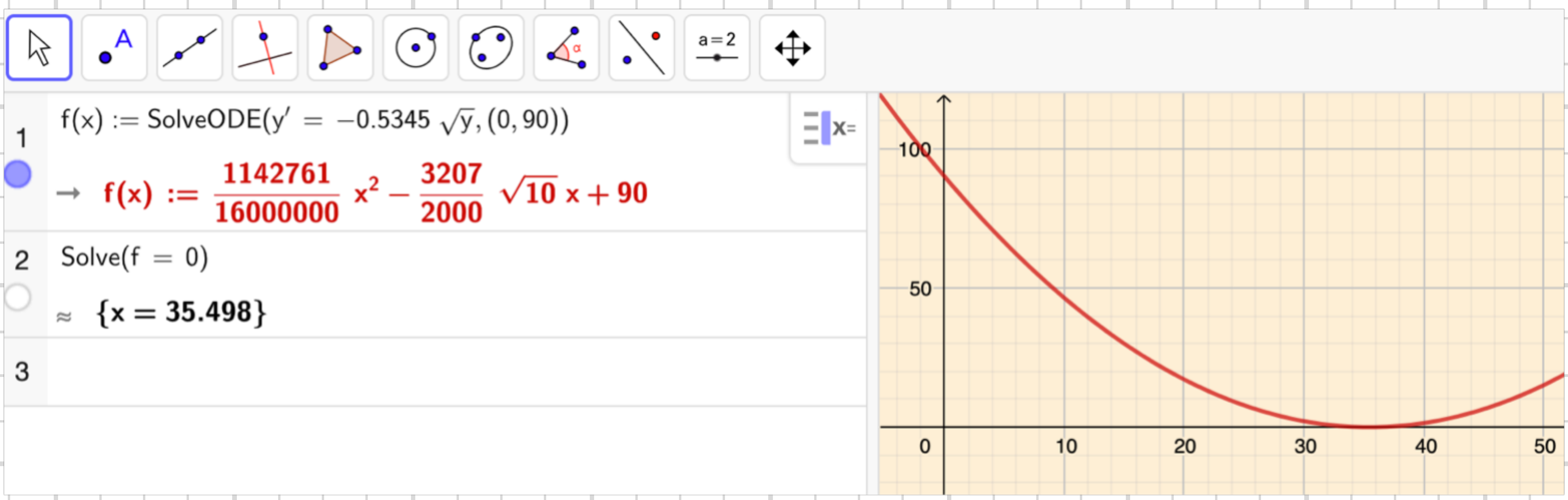
Hur länge dröjer det tills tunnan är tom, om nivån sjunker från 90 cm till 85 cm på en timme?

23. $h' = -k\sqrt{h}$, $h(0) = 90$



$h'(87{,}5) = -5 \Rightarrow k = \dfrac{5}{\sqrt{87{,}5}} \approx 0{,}5345$

Ekv. $h' = -0{,}5345\sqrt{h}$, $h(0) = 90$ löst i Geogebra:



Det dröjer 35,5 timmar tills tunnan är tom.