1 Bestäm konstanten k i uttrycket

$f(x) = \sin 3x + k \cdot \sin x$ så att $f'(\pi/3) = 4$

1.
$$f'(x) = 3\cos 3x + k \cdot \cos x$$

$$3\cos \pi + k \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \implies$$

$$-3 + k \cdot \frac{1}{2} = 4$$

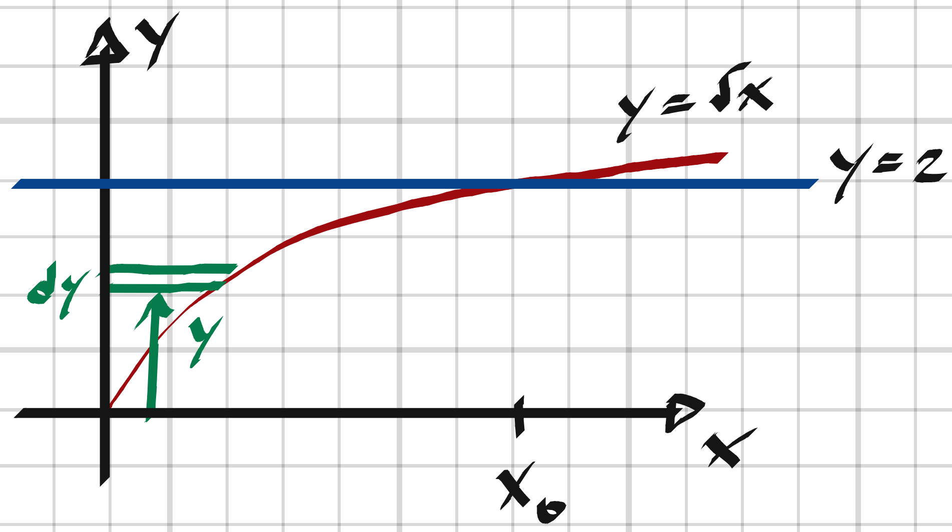
$$k = (4+3) \cdot 2 = \underline{14}$$

---

2 Ett område begränsas av y-axeln, linjen $y = 2$ och kurvan $y = \sqrt{x}$.

a) Beräkna områdets area.

b) Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området får rotera kring y-axeln.



2.

a) $\sqrt{x_0} = 2 \implies x_0 = 4$

$$A = \int_0^{x_0} (2 - \sqrt{x})\,dx = \left[2x - \frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \underline{\frac{8}{3} \text{ a.e.}}$$

b) $dV = \pi x^2\,dy = \pi y^4\,dy$

$$V = \int_0^2 dV = \frac{\pi}{5}\left[y^5\right]_0^2 = \underline{\frac{32\pi}{5} \text{ v.e.}}$$

---

3 Koloxidnivån $y(x)$ ppm i en stad beror av antalet registrerade bilar x.

Vad betyder det att $y(a) = b$ och $y'(a) = c$, där a, b och c är positiva tal?

3. Koldioxidnivån är b då antalet bilar är a. Ökningen av koldioxidnivån är c just vid tidpunkten då antalet bilar är a.

---

4 Bestäm talen a, b och c så att andragradsfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ uppfyller villkoren

$f(0) = 5$, $f'(0) = 4$ och $\int_0^1 f(x)\,dx = 8$

4. $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$

$f'(0) = 4 \Rightarrow b = 4$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 8 \Rightarrow \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x\right]_0^1 = 8 \Rightarrow a = 3$$

$$[a, b, c] = [3, 4, 5]$$

---

5 Antal individer i en insektspopulation är en funktion av tiden t dygn. Tillväxthastigheten är $5t$ individer/dygn.

Hur mycket ökar populationen från $t_1 = 4$ till $t_2 = 6$?

5. $dy = 5t\,dt$

$$\int_{t_1}^{t_2} dy = \int_4^6 5t\,dt = \frac{5}{2}\left[t^2\right]_4^6 = \frac{5}{2}(36-16) = 50$$

Populationen ökar med 50 individer

---

6 I sambandet $y = kx^2$ är y och x funktioner av tiden t och k en konstant, $k = \frac{1}{20}$

Bestäm x i det ögonblick då $\frac{dy}{dt} = 3$ och $\frac{dx}{dt} = 8$ (NP)

6. $y = kx^2$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$3 = 2kx \cdot 8 \implies x = \frac{3}{16k} = \frac{20 \cdot 3}{16} = \frac{15}{4}$$

7 Visa att för funktionen $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$ gäller att $f'(x) > 0$ för alla x där funktionen är definierad.

7. $f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x+1)}{(x+5)^2} = \dfrac{9}{(x+5)^2} > 0 \;,\; x \neq -5$ #

---

8 Ersätt $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ med en linjär approximation kring $x = 9$.

8. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$; $f'(9) = 4,5$

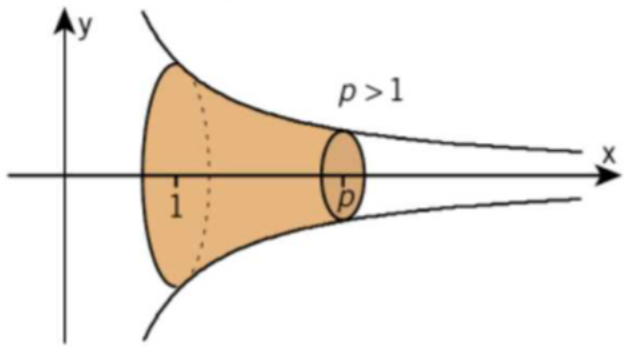
$y - y(9) = y'(9)(x-9)$, $y'(9) = f'(9) \Rightarrow$

$y - 27 = 4,5(x-9)$

$\underline{y = 4,5x - 13,5}$

---

9 Kurvan $y = \frac{1}{x}$ roteras kring x-axeln (se fig.).



a) Beräkna den markerade volymen då $p = 2$

b) Undersök om det finns något värde på p som gör att volymen blir dubbelt så stor som i a). *(NP)*

9. a) $dV = \pi y^2 dx = \frac{\pi}{x^2} dx$

$$V = \int_1^p dV = -\pi \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{\pi}{2} \text{ v.e.}}$$

b) $\int_1^p dV = \pi \Rightarrow$

$$\left[\frac{\pi}{x}\right]_p^1 = \pi$$

$1 - \frac{1}{p} = 1$ saknar lösning => Nej

10 Undersök om ekvationen $f'(x) = 0$ har någon lösning då

a) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = \ln x + \ln(2x + 1)$

10. a) $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 2x = 0 \Rightarrow$ Ja, $x = -\frac{1}{2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{2x+1}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{2x+1} = \frac{1}{x}$

$-2x = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Nej, funktionen ej definierad för $x \leq 0$

---

11 Bestäm $\int x \cdot e^{-4x} dx$

11. Partiell integration: $\int f \cdot g \, dx = f \cdot G - \int f' \cdot G \, dx$

$\int x e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} x e^{-4x} + \frac{1}{4} \int e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} e^{-4x}\left(\frac{1}{4} + x\right) + C$

12 Visa med derivata att

$$x^4 - x^2 \geq -\frac{1}{4} \text{ för alla } x.$$

12. $f(x) = x^4 - x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = 12x^2 - 2$

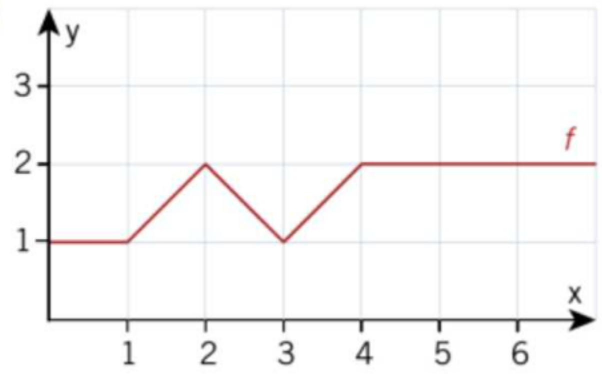
$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ maximum

$f''(x_{2,3}) = f''(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ minimum

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = f(0) = 0 \\ f(x_{2,3}) = f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \text{minimum } -\frac{1}{4} \quad \#$$

13 Figuren visar grafen till funktionen f.

C



a) Är det sant att $2\int_0^2 f(x)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx$?

Motivera ditt svar.

b) Bestäm konstanten a så att

$$\int_0^a (f(x) - 1{,}5)\,dx = 0$$

13. a) $VL = 2\int_0^2 f(x)dx = 2 \cdot 2{,}5 = 5{,}0$

$HL = \int_2^5 f(x)dx = 1{,}5 + 1{,}5 + 2 = 5{,}0$

Ja, $VL = HL$

b) $\int_0^a (f(x) - 1{,}5)dx = 0 \Rightarrow$

a	$F(a) - 1{,}5a$
1	$1 - 1{,}5 \cdot 1 = -0{,}5$
2	$2{,}5 - 1{,}5 \cdot 2 = -0{,}5$
3	$4 - 1{,}5 \cdot 3 = -0{,}5$
4	$5{,}5 - 1{,}5 \cdot 4 = -0{,}5$
5	$7{,}5 - 1{,}5 \cdot 5 = 0$

$a = 5$

14 $y = x^2$ roterar runt y-axeln för $y = 0$ till 1 och $y = \sqrt{x}$ roterar kring x-axeln för $x = 0$ till 1.

a) Beräkna och jämför rotationsvolymerna. Vilken slutsats kan du dra?

b) Ge ett förslag på en rotationsvolym som är lika stor som den som uppstår när $y = \ln x$ roterar runt x-axeln från $x = 1$ till 2.

14. a)

$$\left.\begin{aligned} dV_1 &= \pi x^2 dy = \pi y\,dy \\ V_1 &= \int_0^1 dV_1 = \frac{\pi}{2} \text{ v.e.} \\ dV_2 &= \pi y^2 dx = \pi x\,dx \\ V_2 &= \int_0^1 dV_2 = \frac{\pi}{2} \text{ v.e.} \end{aligned}\right\} \quad \underline{V_1 = V_2 = \frac{\pi}{2} \text{ v.e.}}$$

b) <u>$y = e^x$ roterar kring y-axeln mellan 1 och 2.</u>

15 Visa med derivatans definition att

$$D\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

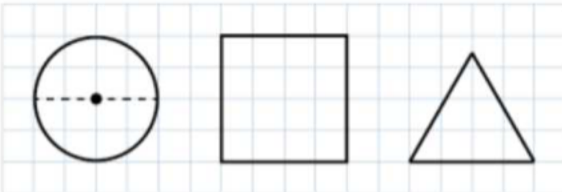
15. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x+h) = \frac{1}{(x+h)^2}$

$$D\frac{1}{x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{hx^2(x+h)^2} = -\lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{hx^2(x+h)^2} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = -\lim_{h \to 0} \frac{2}{x(x+h)^2} = -\frac{2}{x^3} \quad \#$$

16



a) En cirkels diameter har samma längd som sidan i en kvadrat.
Undersök vilken area som ökar snabbast om cirkelns radie och kvadratens sida ökar med samma hastighet.

b) Sidan i en liksidig triangel har samma längd och ökar med samma hastighet som sidan i kvadraten.
Jämför triangelareans förändringshastighet med kvadratens och cirkelns.

16.

a)

$$A_c = \frac{\pi x^2}{4} \Rightarrow dA_c = \frac{\pi x}{2} dx$$

$$\frac{dA_c}{dt} = \frac{dA_c}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$A_K = x^2 \Rightarrow dA_K = 2x\,dx$$

$$\frac{dA_K}{dt} = \frac{dA_K}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\underline{\frac{dA_K}{dt} > \frac{dA_c}{dt}}$$

b)

$$A_T = x \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow dA_T = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\frac{dA_T}{dt} = \frac{dA_T}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \underline{\frac{dA_T}{dt} < \frac{dA_c}{dt} < \frac{dA_K}{dt}}$$

17 För funktionen f gäller att

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x^2}$$

Visa med derivata att funktionen

a) är avtagande då $x = 1$.

b) har ett lokalt minimum och ange minimipunktens koordinater.

17. a) $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{x^3}$

$f'(1) = \frac{1}{4} - 2 < 0 \Rightarrow$ Avtagande

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8^{1/3} = 2$

$f''(x) = \frac{6}{x^4}$; $f''(2) > 0 \Rightarrow$ minimum

$f_{min} = f(2) = \frac{2}{4} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

Minpunkten $= \left(2, \frac{3}{4}\right)$

18 Ett paket har formen av ett rätblock med kvadratisk basyta med sidan x dm, höjden h dm och volymen y dm^3. Summan av höjden och basytans omkrets är 21 dm.

a) Uttryck y som funktion av x.

b) Ange funktionens definitionsmängd.

c) Ange med ett lämpligt antal värdesiffror paketets mått då dess volym är maximal.

18. a) $4x + h = 21$

$y(x) = x^2 h = \underline{x^2(21-4x)}$

b) $\underline{0 < x \leq \frac{21}{4} \quad \text{dm}}$

c) $y' = 42x - 12x^2 = 6x(7-2x)$

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = \frac{7}{2}$

$y'' = 42 - 24x$

$y''(x_1) = y''(0) > 0 \Rightarrow$ minimum

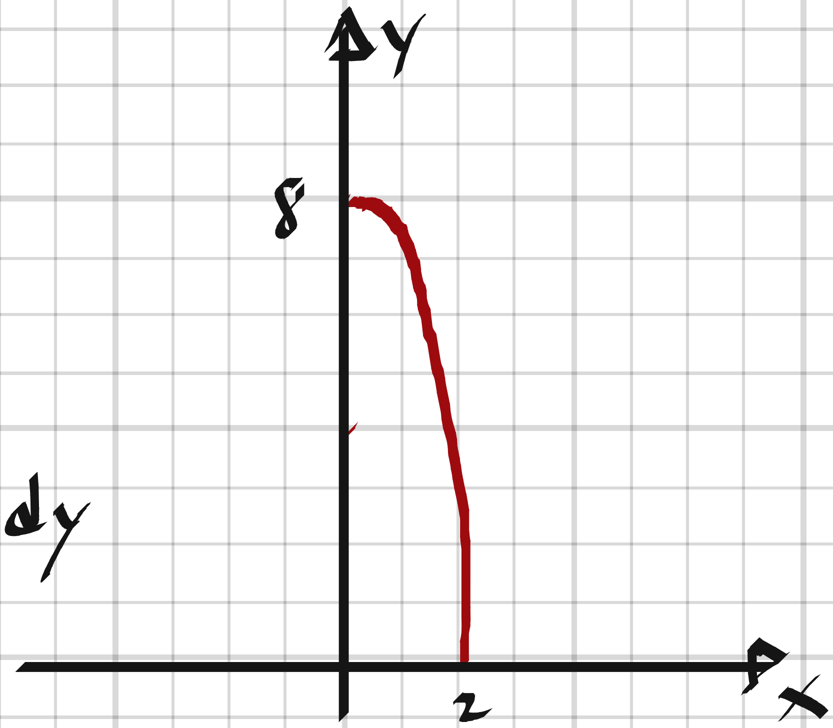
$y''(x_2) = y''(\frac{7}{2}) = 42 - 84 < 0 \Rightarrow$ maximum

Paketet har maximal volym

då $x = 3{,}5$ dm och $h = 21 - 4 \cdot 3{,}5 = 7{,}0$ dm

19 Då det område som begränsas av kurvan $y = 8 - 2x^2$ och de positiva koordinataxlarna roterar kring y-axeln erhålls en kropp A. Då samma område roterar kring x-axeln erhålls en kropp B.

Vilken av kropparna har störst volym?



19.

$$dV_A = \pi x^2 dy = \pi\left(4 - \frac{y}{2}\right)dy$$

$$V_A = \int_0^8 dV_A = \pi\left[4y - \frac{y^2}{4}\right]_0^8 = \pi(32 - 16) = 16\pi \text{ v.e.}$$

$$dV_B = \pi y^2 dx = \pi(8 - 2x^2)^2 dx = \pi(64 - 32x^2 + 4x^4)dx$$

$$V_B = \int_0^2 dV_B = \pi\left[64x - \frac{32x^3}{3} + \frac{4x^5}{5}\right]_0^2 =$$

$$= \pi\left(128 - \frac{256}{3} + \frac{128}{5}\right) = \frac{1024}{15}\pi \text{ v.e.}$$

$$V_B = \frac{1024}{15 \cdot 16} V_A = \frac{64}{15} V_A$$

20 En liten sten kastas i en damm. Då skapas en våg i form av en cirkel på vattenytan. Enligt en förenklad modell kan man anta att cirkelns radie ökar med den konstanta hastigheten 1,5 m/s.

Med vilken hastighet ändras cirkelytans area 6,0 sekunder efter det att stenen träffat vattenytan? *(NP)*

20. $A = \pi r^2$

$dA = 2\pi r\,dr$; r vid 6s $= 6 \cdot 1,5 = 9,0$ m

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot 9,0 \cdot 1,5 = \underline{27\pi \approx 85 \text{ m}^2/\text{s}}$

21 Medeltemperaturen under en tidsperiod från a till b kan beräknas med formeln

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx$$

där y °C beskriver temperaturen som funktion av tiden.

På en plats registrerades temperaturen under ett dygn. Man fann att temperaturen kunde beskrivas med funktionen

$y = 3\sin(0{,}3x - 3) + 7{,}7$

där x är antalet timmar efter midnatt.

a) Beräkna dygnets medeltemperatur.

b) När under dygnet ökar temperaturen snabbast, och hur snabbt ökar den då?

21. a) $$\frac{1}{24}\int_0^{24}(3\sin(0.3x-3)+7.7)\,dx = \frac{1}{24}\Big[7.7x - 10\cos(0.3x-3)\Big]_0^{24} =$$

$$= \frac{1}{24}\big(184.8 - 10\cos(4.2) + 10\cos(-3)\big) = \underline{7.5\ °C}$$

b) $y' = 0.9\cos(0.3x-3)$

$y'' = -0.27\sin(0.3x-3)$

$y'' = 0 \Rightarrow 0.3x - 3 = 0 + n\cdot\pi$

$x = 10 + n\cdot 3.33\pi$

$y'(10) = 0.9$ °C/h

<u>Temperaturen ökar snabbast kl. 10 med 0,9 °C/h</u>

22 Ange en exponentialfunktion som kring $x = 0$ har den linjära approximationen $y = -2x + 1$

22.

$$y' = -2$$

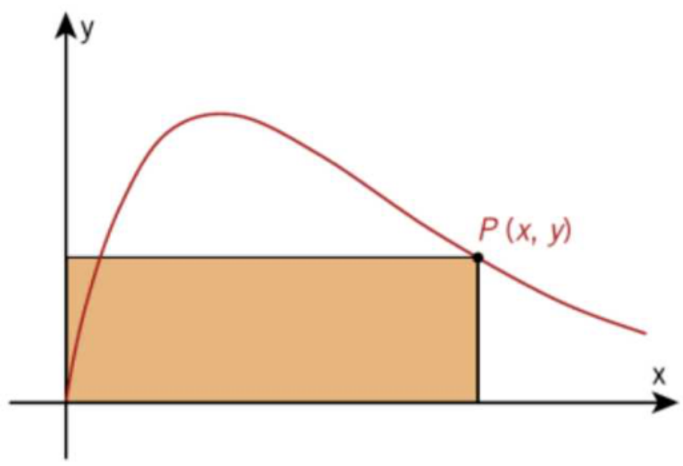
$$f(x) = c \cdot e^{ax} \quad ; \quad f'(x) = ace^{ax}$$

$$f'(0) = y' = -2 \Rightarrow a \cdot c = -2$$

Välj exempelvis $c = 1 \Rightarrow \underline{f(x) = e^{-2x}}$

---

23 Figuren visar grafen till funktionen $y = \dfrac{2x}{e^x}$ i intervallet $x \geq 0$. Från en punkt P på kurvan dras linjer mot x-axeln och y-axeln så att en rektangel bildas (se fig).



a) Bestäm med derivata ett exakt värde på rektangelns maximala area.

b) Bestäm ett exakt värde på arean som begränsas av kurvan i figuren, x-axeln och linjen $x = 1$.

(NP)

23.

a) $$A = xy = 2x^2e^{-x}$$

$$A' = 4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} = 2xe^{-x}(2-x)$$

$$A' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 2$$

$$A_{max} = A(2) = 2 \cdot 2^2 \cdot e^{-2} = \underline{\frac{8}{e^2} \text{ a.e.}}$$

b) $$dA = y\,dx = 2xe^{-x}dx$$

$$A = \int_0^1 dA = 2 \cdot \left(\left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \right) =$$

$$= \underline{2 - \frac{4}{e} \text{ a.e.}}$$

---

24 Ange en valfri funktion $y = g(x)$ som uppfyller villkoren

$$\int_1^4 g(x)\,dx = 5 \text{ och } g'(0) = 2$$ (NP)

24.

$g(x) = 2x + a$

$\left[x^2 + ax\right]_1^4 = 5$

$16 + 4a - 1 - a = 5$

$3a = -10 \Rightarrow a = -\frac{10}{3}$

$\underline{g(x) = 2x - \frac{10}{3}}$

25 En kurva definieras av formeln $y = 2\sin x \cos x$.

a) Bestäm en ekvation för kurvans tangent då $x = \pi/2$.

b Kurvan, tangenten och den positiva y-axeln begränsar ett område.

Beräkna områdets area.

25. a)

$$y = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$y' = 2\cos 2x \; ; \; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$g - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{g = -2x + \pi}$$

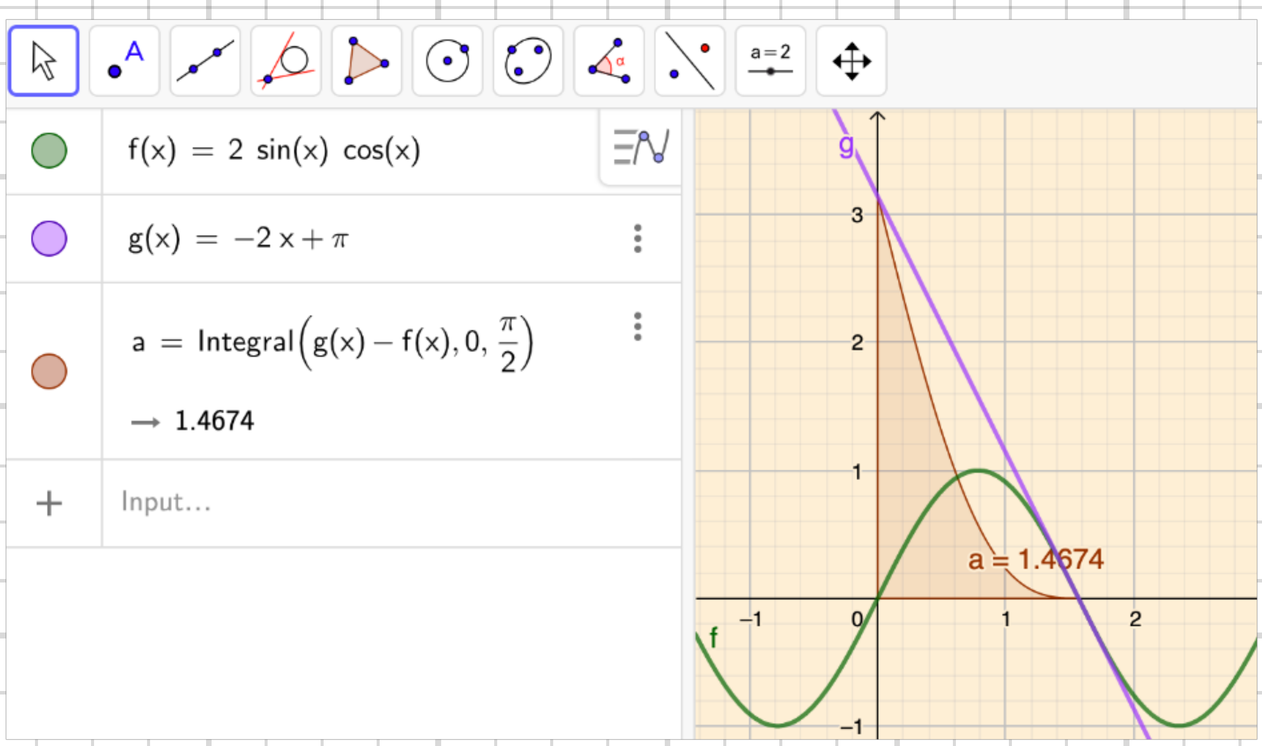
b)

$$h(x) = g - y = -2x + \pi - \sin 2x$$

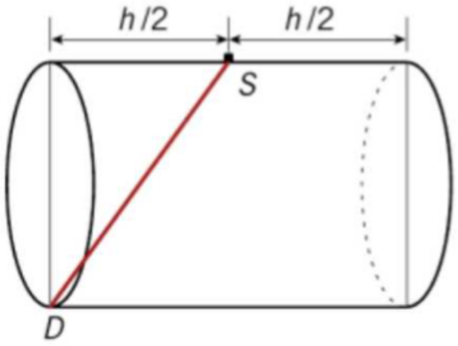
$$A = \int_0^{\pi/2} h(x)\,dx = \left[-x^2 + \pi x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{4} - 1 \approx \underline{1.467 \text{ a.e.}}$$

Lösning i Geogebra:

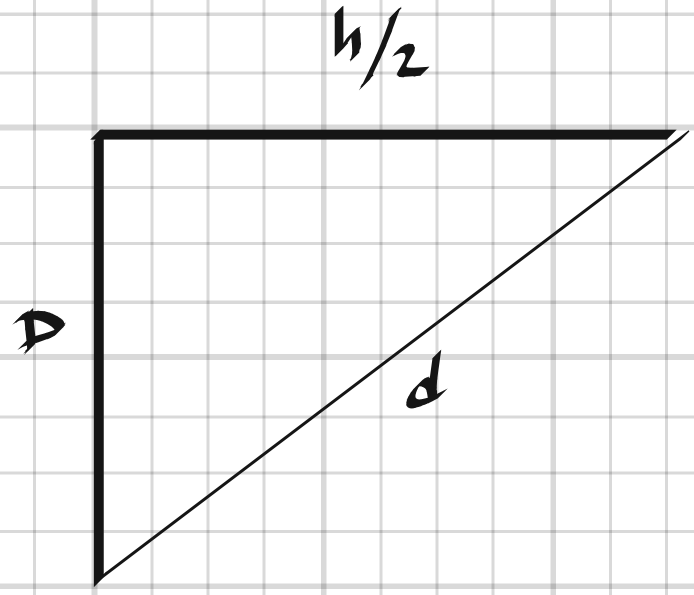


26 En gammal metod att bestämma priset på en vintunna gick till så här:
Man stack in en måttstav i tapphålet S tills den nådde locket vid D. Längden $SD = d$ användes sedan för att beräkna vintunnans pris.



Astronomen Johannes Kepler (1571 – 1630) som studerade vintunnornas geometri (se historik sidan 157), påstod i början av 1600-talet – utan hjälp av derivator – att man gör det bästa köpet om $h = 2d/\sqrt{3}$

Var Keplers påstående riktigt?
Vintunnorna antas vara raka, cirkulära cylindrar.



$$D^2 = d^2 - \frac{h^2}{4}$$

26.

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h = \frac{\pi}{4}\left(d^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

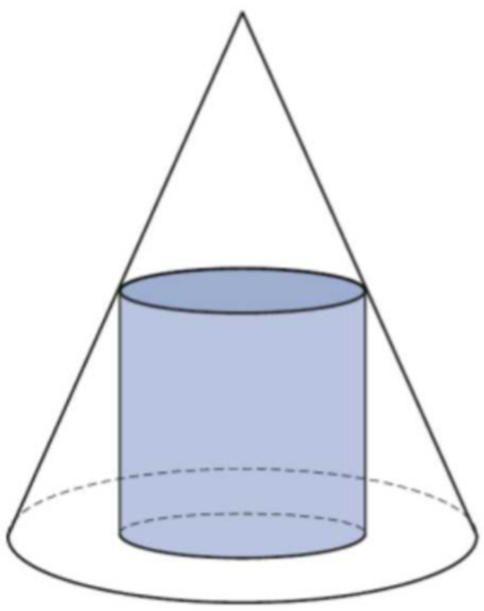
$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow h = \frac{2d}{\sqrt{3}}$$

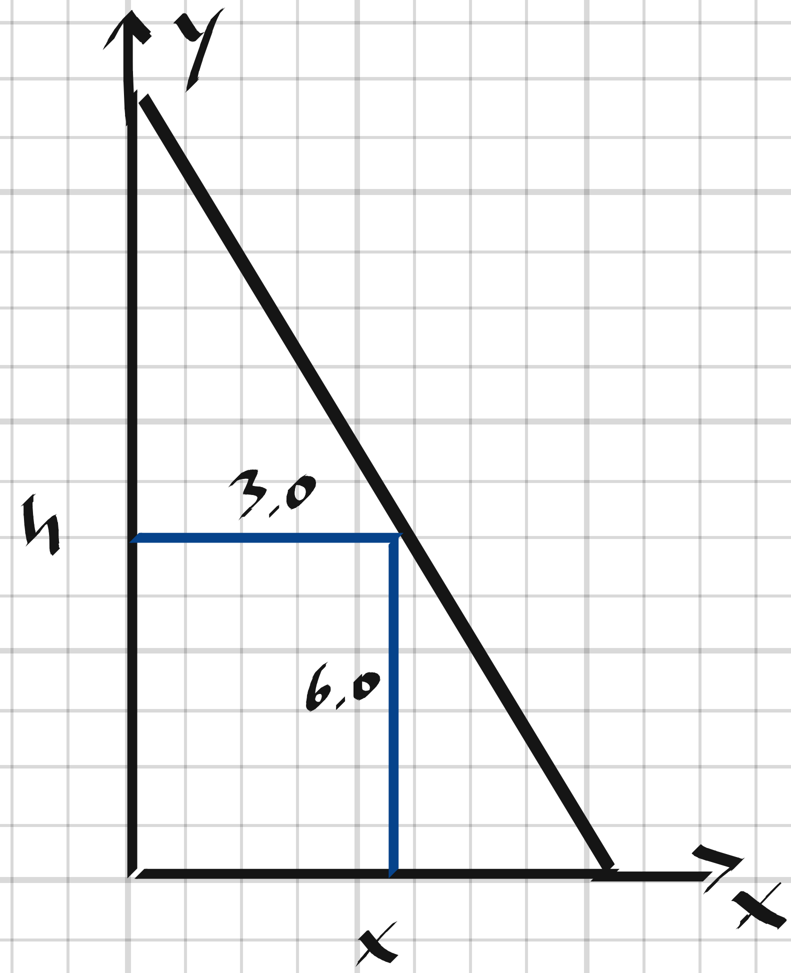
$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{6\pi h}{16} < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

Ja, Keplers påstående var korrekt.

27 På ett bord står en rak cirkulär cylinder med radien $R = 3{,}0$ cm och höjden $H = 6{,}0$ cm. Till cylindern tillverkas en rak cirkulär kon som ska sättas över cylindern så att konens baskant vilar på bordet.



Bestäm konens minsta möjliga volym med två siffrors noggrannhet. (*NP*)



27.

$$V = \frac{\pi x^2 h}{3}$$

$$\frac{x}{h} = \frac{x-3}{6} \Rightarrow h = \frac{6x}{x-3}$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{x^3}{x-3}$$

$$V' = 2\pi \cdot \frac{3x^2(x-3) - x^3}{(x-3)^2} = 2\pi x^2 \cdot \frac{2x-9}{(x-3)^2}$$

$$V' = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$V_{min} = V\left(\frac{9}{2}\right) = 2\pi \cdot \frac{\frac{9^3}{2^3}}{\frac{3}{2}} = \frac{9^3 \pi}{2} = \frac{729\pi}{6} \approx \underline{380 \text{ cm}^3}$$

28 Grafen till $y = x^2 + ax$ har en minimipunkt. När a varierar ändras minimipunktens läge.

Visa att minimipunktens olika lägen kan beskrivas av en parabel.

28.

$$y = x^2 + ax$$

$$y' = 2x + a$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2}, \quad y\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4}$$

$$\text{Minimipunkt} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\text{Sätt } x_p = -\frac{a}{2} \Rightarrow (x, -x^2) \text{ dvs } f(x) = -x^2$$

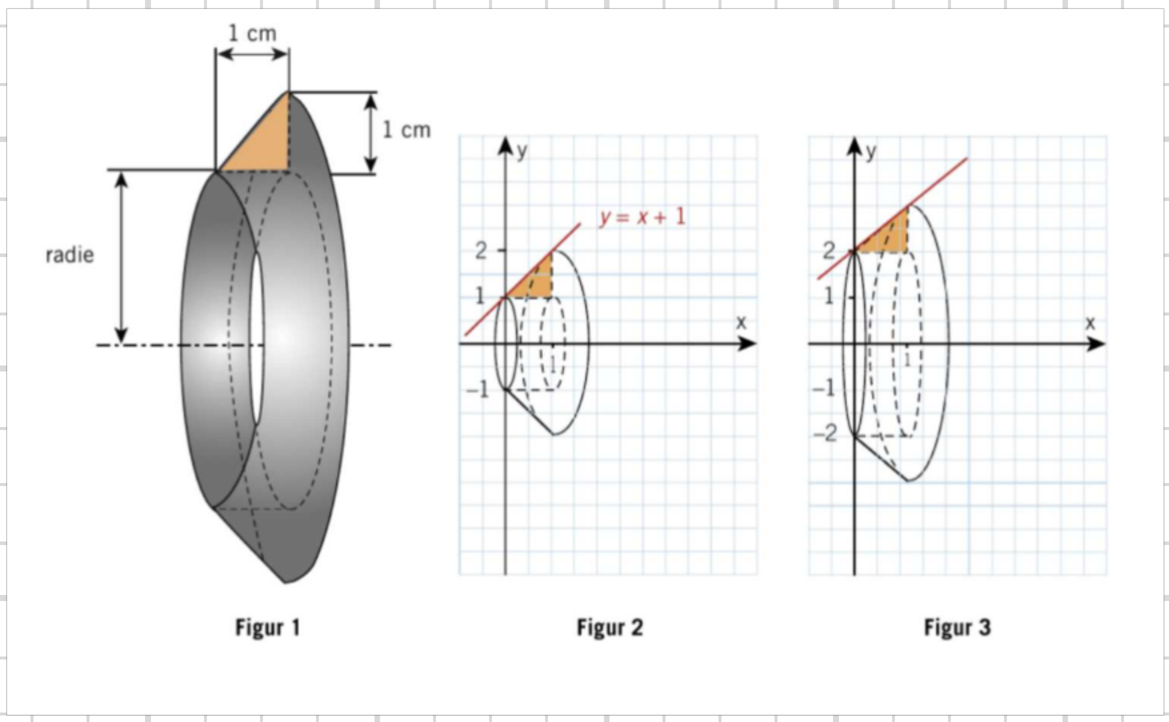
---

29 Ett företag tillverkar tätningsringar för rör i olika storlekar. Alla ringar har både höjden och tjockleken 1 cm, men kan ha olika radier (se figur 1).

Företagets produktutvecklare funderar på att utöka sortimentet. De vill därför veta hur mycket materialåtgången ökar för varje centimeter som tätningsringarnas radie ökar.

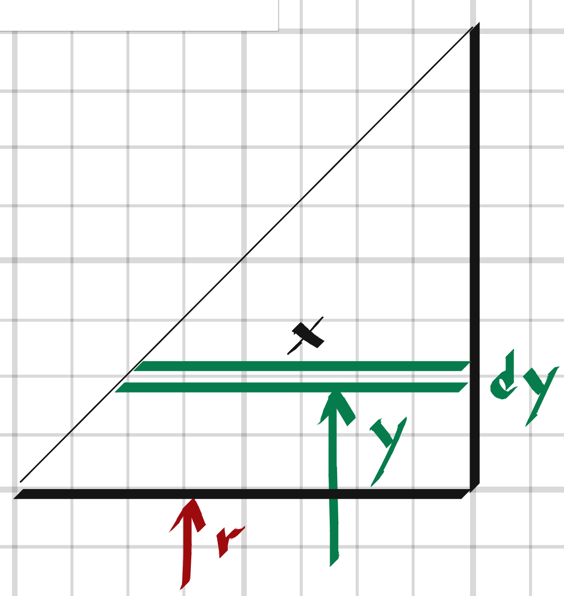
Tätningsringar kan representeras matematiskt genom rotation av trianglar runt x-axeln. I figur 2 och 3 ser du exempel på detta. I dessa figurer har ringarna runt radierna 1 cm resp. 2 cm.

Undersök och beskriv hur tätningsringarnas volym förändras för varje centimeter som radien ökar. *(NP)*



Figur 1 Figur 2 Figur 3

29.



$$x = r + 1 - y$$

$$dV = 2\pi y \cdot x \cdot dy = 2\pi(ry + y - y^2)dy$$

$$V = \int_r^{r+1} dV = 2\pi \int_r^{r+1} (ry + y - y^2)dy = 2\pi \left[\frac{r+1}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_r^{r+1} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{(r+1)^3}{2} - \frac{(r+1)^3}{3} - \frac{r^2(r+1)}{2} + \frac{r^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(3(r+1)^3 - 2(r+1)^3 - 3r^2(r+1) + 2r^3 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left((r+1)^3 - r^3 - 3r^2 \right) = \frac{\pi}{3}(3r+1) = \pi\left(r + \frac{1}{3}\right)$$

Om $r \to r+1 \Rightarrow V \to \pi\left(r + \frac{4}{3}\right)$, dvs

ökar radien med 1 cm ökar volymen med π.