1 Ange ordningsnummer n för de två första talen, som inte är primtal, i talföljden
$a_n = 6n - 1 \quad n \geq 1$.

1.

n	a_n
1	5
2	11
3	17
4	23
5	29
6	35
7	41
8	47
9	53
10	59
11	65

Svar: $n=6$ och $n=11$

---

2 Talet 4 096 kan skrivas 2^{12}.
Beräkna summan
$2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 4096$

2.

$$S = 2 \cdot \frac{2^{12}-1}{2-1} = 2 \cdot 4095 = \underline{8190}$$

3 Visa med hjälp av räknelagar att

a) $88 \cdot 75 \equiv 3 \pmod 9$
b) $8^6 \cdot 7^8 \equiv 4 \pmod 6$
c) $9^4 + (-6)^4 \equiv 3 \pmod 7$

3. a) $VL = 88 \cdot 75 \pmod 9 = 7 \cdot 3 \pmod 9 = 3 \pmod 9 = HL$

b) $VL = 8^6 \cdot 7^8 \pmod 6 = (2^3)^6 \cdot 7^8 \pmod 6 = 2^6 \cdot 1^8 \pmod 6 =$

$= (2^3)^2 \pmod 6 = 2^2 \pmod 6 = 4 \pmod 6 = HL$

c) $VL = 9^4 + (-6)^4 \pmod 7 = 2^4 + 36^2 \pmod 7 = 2 + 1^2 \pmod 7 =$

$= 3 \pmod 7 = HL$

---

4 Ange en rekursiv definition av talföljden

1, 4, 10, 22, 46, …

4. $a_1 = 1$

$a_{n+1} = 2a_n + 2$

---

5 I ekvationen $m = 4k + 2$ är k ett heltal.
Undersök om $4 | m^2 - 2$

5. Är $m^2 - 2 \pmod 4 = 0$?

$m^2 - 2 \pmod 4 = 16k^2 + 16k + 2 \pmod 4 =$

$= 2(8k^2 + 8k + 1) \pmod 4 \neq 0 \rightarrow$ Svar: Nej!

Motbevis: ex. $k = 1 \Rightarrow m^2 - 2 \pmod 4 = 6^2 - 2 \pmod 4 =$

$= 34 \pmod 4 \neq 0$.

6 Förklara med egna ord och ett eget exempel vad som menas med

a) $a | b$
b) SGF (a, b)
c) MGM (a, b)
d) $a \equiv b \pmod n$

6. a) a är en delare till b, ex.v $2|4$

b) Största gemensamma faktor mellan a och b, ex.v SGF $(12, 20) = 4$ $(12 = 3 \cdot 2 \cdot 2,\ 20 = 5 \cdot 2 \cdot 2)$

c) Minsta gemensamma multipel mellan a och b, ex.v MGM $(12, 20) = 60$ $(60 = 12 \cdot 5,\ 60 = 20 \cdot 3)$

d) a är kongruent med b modulo n, dvs a och b ger samma rest vid division med n.

7 Låt p och q vara två olika primtal och bestäm

a) SGF $(2p, 6q)$ b) MGM $(2p, 6q)$

7. a) $SGF(2p, 6q) = \underline{2}$ $\qquad (2 \cdot p \;,\; 2 \cdot 3 \cdot q)$

b) $MGM(2p, 6q) = \underline{6pq}$ $\qquad (6pq = 2p \cdot 3 \;,\; 6pq = 6q \cdot p)$

---

8 Skriv en formel för summan utan att använda summatecknet

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

Glöm inte att kontrollera om din formel stämmer för några tal i talföljden.

8.

a) $2+4+6+8+\ldots$ Aritmetisk summa $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$S = \frac{n}{2}(2+2n) = n+n^2$

b) $-1+1-1+\ldots$ Geometrisk summa med $a_1=-1, k=-1$

$S = (-1) \cdot \frac{(-1)^n - 1}{(-1)-1} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$ $\qquad a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$

---

9 Tal i Fibonaccis talföljd förekommer t ex i spiralmönstret hos vissa blommor. Talen i talföljden definieras med

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_0 = 1$ och $a_1 = 1$

a) Ange de sju första talen i talföljden.

b) Använd induktion för att visa att

$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+2} - 1 \quad n \geq 0$

9. a) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$

b)

$n=1$: $HL = a_3 - 1 = 3 - 1 = 2$

$VL = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$

Antagande:

Formeln $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+2} - 1$ gäller för $n = p$, dvs

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p = a_{p+2} - 1$

Påstående:

Formeln gäller även för $n = p+1$, dvs $HL = a_{p+3} - 1$

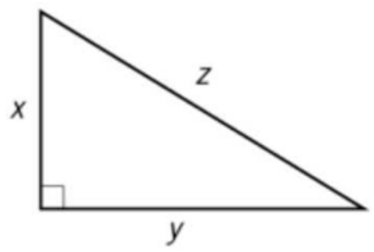
Bevis:

$VL = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1} = a_{p+2} - 1 + a_{p+1}$

$HL = a_{p+3} - 1$

$VL = HL \Rightarrow a_{p+3} = a_{p+1} + a_{p+2}$ #

10 Visa att Pythagoras ekvation $x^2 + y^2 = z^2$ har oändligt många jämna heltalslösningar, dvs lösningar där x, y och z alla är jämna tal.



10. ex. 3-4-5 triangeln

$$3^2+4^2=5^2$$

Talen multipliceras med en godtycklig konstant $k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$

$$VL = (3k)^2+(4k)^2 = 9k^2+16k^2 = 25k^2$$

$$HL = (5k)^2 = 25k^2 \quad , \quad VL = HL \quad \#$$

11 Använd induktion för att visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \le \frac{n^2}{n+1} \quad \text{där } n \in Z^+$$

11. ex. $n=2$ $\quad VL = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} = \frac{7}{6}$

$HL = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \ge VL$ ok!

Antagande:

Formeln gäller för $n=p$, dvs $\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k+1} \le \frac{p^2}{p+1}$

Påstående:

Formeln gäller även för $n=p+1$, dvs

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k+1} \le \frac{(p+1)^2}{p+2}$$

Bevis:

$$VL = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{p}{p+1} + \frac{p+1}{p+2} \le \frac{p^2}{p+1} + \frac{p+1}{p+2}$$

$$= \frac{p^2(p+2) + (p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{(p+1)(p+2)}$$

$$HL = \frac{(p+1)^2}{p+2} = \frac{(p+1)^3}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}{(p+1)(p+2)}$$

$HL \ge VL$ #

12 Beräkna

a) 17 (mod 4)

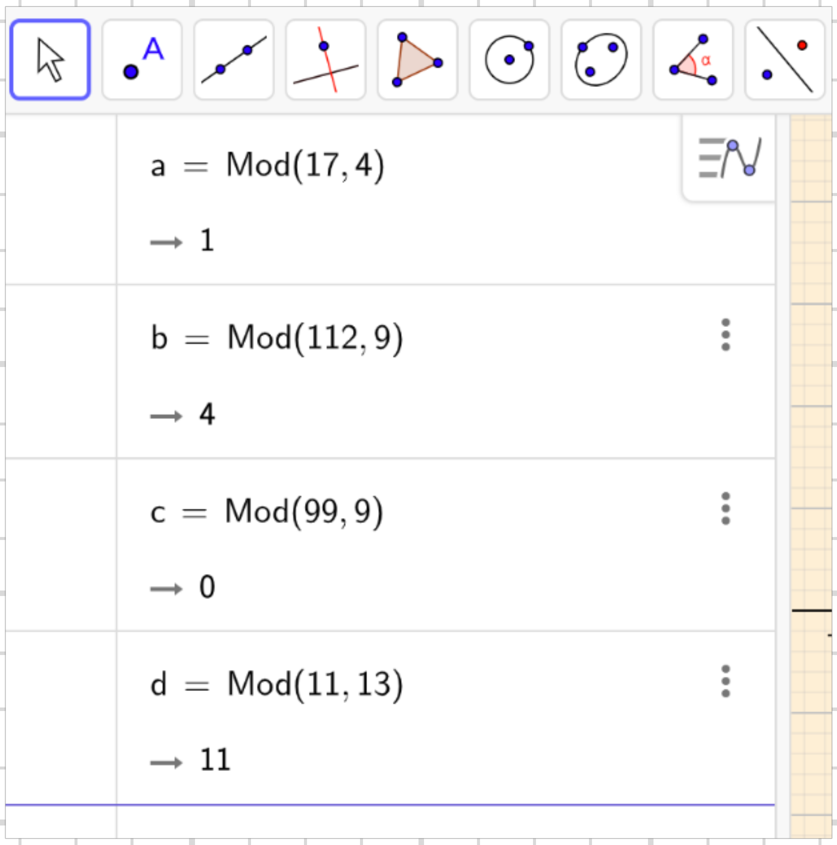
b) 112 (mod 9)

c) 99 (mod 9)

d) 11 (mod 13)

12.

Lösning i Geogebra:



---

13 I en talföljd är det första talet 5 och det tredje talet 125. Ange det andra talet om talföljden är

a) aritmetisk

b) geometrisk?

13. a) $d = (125-5)/2 = 60 \Rightarrow a_2 = 5+60 = \underline{65}$ (5, 65, 125)

b) $\frac{a_2}{5} = \frac{125}{a_2} \Rightarrow a_2 = \pm\sqrt{5 \cdot 125} = \underline{\pm 25}$ (5, 25, 125)

(5, -25, 125)

---

14 Ett heltal N kallas perfekt om summan av dess divisorer (delare) (1 inräknad, men inte N) är lika med N.

a) Vilka divisorer har talet 6?

b) Beräkna summan av divisorerna (utom 6) till talet 6.

c) Är talet 6 ett perfekt tal?

d) Är något av talen 28, 342 och 496 perfekta? Motivera.

14. a) 1, 2, 3, 6

b) $1+2+3 = 6$

c) Ja, då summan av dess divisorer är talet självt.

d) Lösning i Geogebra:

(observera att Geogebra inkluderar N)

l1 = DivisorsList(28)

→ {1, 2, 4, 7, 14, 28}

a = DivisorsSum(28) − 28

→ 28

l2 = DivisorsList(342)

→ {1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57, 114, 171, 342}

b = DivisorsSum(342) − 342

→ 438

l3 = DivisorsList(496)

→ {1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496}

c = DivisorsSum(496) − 496

→ 496

$\Rightarrow$ 28, 496 perfekta

342 ej perfekt

15 Beskriv talföljden dels med en enkel formel, dels med en rekursiv formel

a) 160, 153, 146, 139, …

b) 100, –50, 25, –12,5 …

15. a) $a_n = -7n + 167$

$$\begin{cases} a_1 = 160 \\ a_{n+1} = a_n - 7 \end{cases}$$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 100$

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{2} \end{cases}$$

---

16 En klocka som visar 24 h saktar sig fem minuter per timme.

Hur ofta visar den rätt tid?

16.

$$MGM(24 \cdot 60, 24 \cdot 55) = LCM(24 \cdot 60, 24 \cdot 55) = 15840 \text{ min} =$$

$$= \frac{15840}{24 \cdot 60} \text{ dygn} = 11 \text{ dygn}$$

---

17 Hur många element ingår i talföljden

a) 2, 6, 18, 54, … om summan av talen i talföljden är 1 594 322

b) 2, 6, 10, 14, … om summan av talen i talföljden är 12 800?

17. a) $S = a_1 \cdot \dfrac{k^n - 1}{k - 1} \Rightarrow$ Geometrisk summa

$$1594322 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 2}$$

$$3^n = \frac{1594322}{2} + 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1594322}{2} + 1\right)}{\ln 3} = \underline{13}$$

b) $a_n = 4n - 2$ Aritmetisk summa

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + 4n - 2)$$

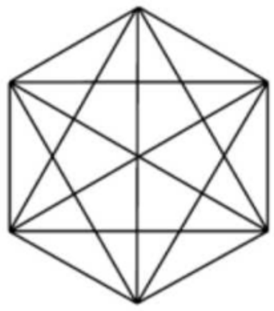
$$2S = (a_1 - 2)n + 4n^2$$

$$n^2 + \frac{a_1 - 2}{4} n - \frac{2S}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$n = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{S}{2}} = \sqrt{\frac{12800}{2}} = \underline{80}$$

18

I en sexhörning kan man dra nio diagonaler.

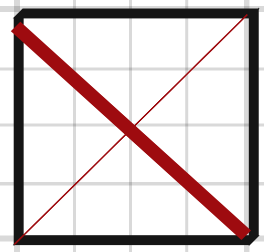


a) Rita en fyr-, en fem- och en sjuhörning. Hur många diagonaler kan du dra i respektive figur?

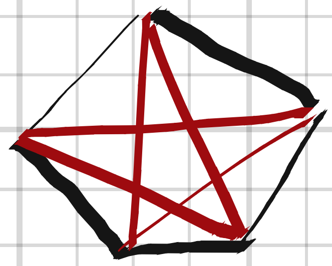
b) Hur många diagonaler kan man dra i en 10-hörning?

c) Skriv en rekursiv formel för antalet diagonaler i en n-hörning.

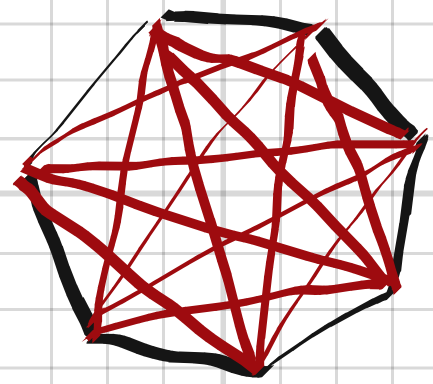
a)



2 diagonaler



5 diagonaler



14 diagonaler

18.

n	s
4	2
5	5
7	14

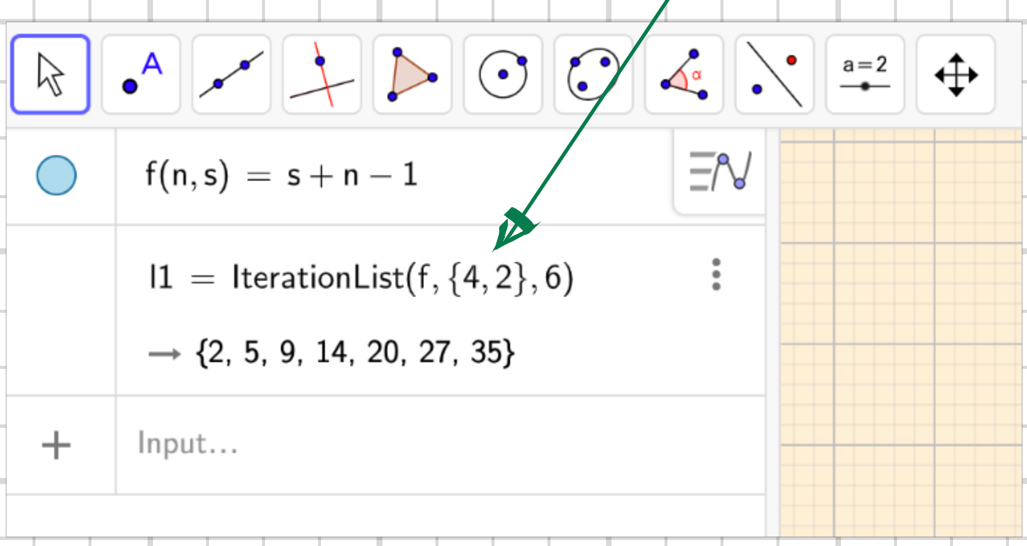
c) $S_4 = 2$

$S_{n+1} = S_n + n - 1$

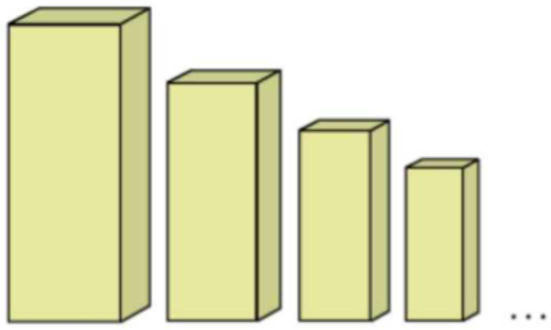
b) $S_{10} = 35$

startvärden

Geogebra:



19



Varje kloss har en höjd och bredd som är 80 % av den intill.

a) Hur många klossar har vi om den första är 20 cm och den minsta 4,2 cm hög?

b) Hur hög blir stapeln om vi ställer klossarna i uppgift a) på varandra?

c) Undersök hur hög stapeln blir, beroende på hur många klossar vi har och hur hög den första klossen är.

19. a)

$$20,\ 20\cdot 0.8,\ 20\cdot 0.8^2,\ \ldots,\ 4.2 \text{ cm} \Rightarrow$$

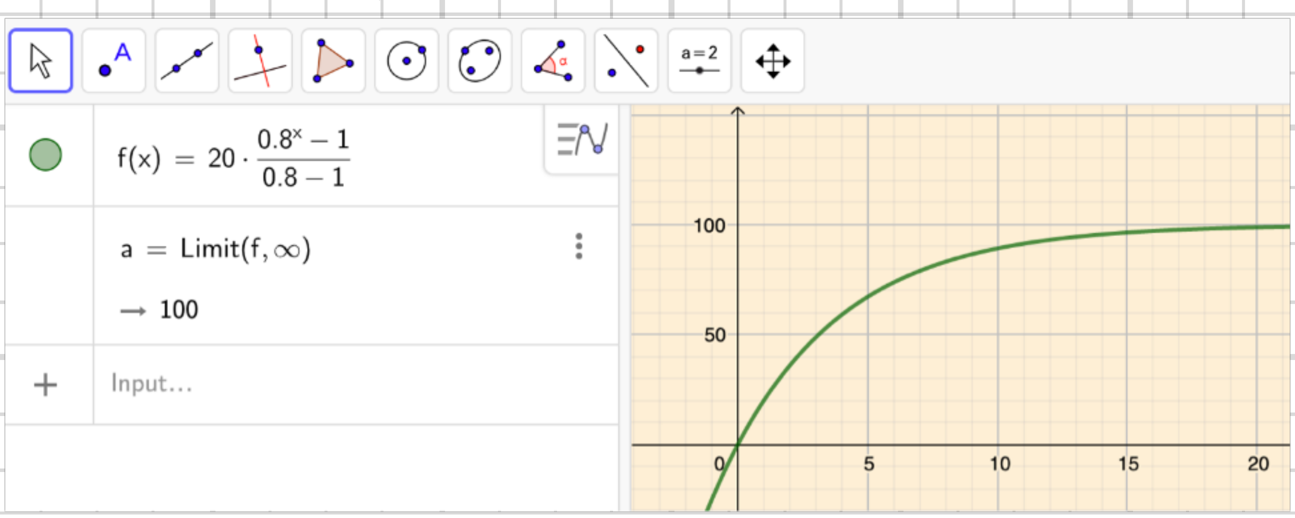
$$20\cdot 0.8^{n-1} = 4.2$$

$$n = \frac{\ln \frac{4.2}{20}}{\ln 0.8} + 1 = \underline{8 \text{ st}}$$

b)

$$h = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 20 \cdot \frac{0.8^8 - 1}{0.8 - 1} = \underline{83 \text{ cm}}$$

c) Stapeln går mot höjden 100 cm.



20 I den geometriska talföljden $t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots$ gäller att $t_4 + t_5 = 3$ och $t_9 + t_{10} = 9\,375$. Bestäm talföljden.

20.

$$\begin{cases} k = \dfrac{t_5}{t_4} = \dfrac{3 - t_4}{t_4} = \dfrac{3}{t_4} - 1 \\ k = \dfrac{t_{10}}{t_9} = \dfrac{9375 - t_9}{t_9} = \dfrac{9375}{t_9} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t_9 = 3125\, t_4 = k^5 t_4 \Rightarrow k = 3125^{1/5} = 5$$

$$t_4 + 5t_4 = 3 \Rightarrow t_4 = \frac{1}{2}$$

$$t_3 = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}, \quad t_2 = \frac{1}{10 \cdot 5} = \frac{1}{50}, \quad t_1 = \frac{1}{50 \cdot 5} = \frac{1}{250}$$

$$\underline{\frac{1}{250}, \frac{1}{50}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{25}{2}, \ldots}$$

21 a) Visa att $(a-b)\mid(a^2-b^2)$ gäller för några positiva heltal a och b.

b) Visa att $(a-b)\mid(a^3-b^3)$ gäller för några positiva heltal a och b.

c) Visa med induktion att $(a-b)\mid(a^n-b^n)$ gäller då a, b och n är positiva heltal.

21. $a=1$, $b=2$

a) $$\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{1^2-2^2}{1-2}=3$$

b) $$\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{1^3-2^3}{1-2}=7$$

c) Antagande: Delbarhet med $(a-b)$ gäller för $n=p$,

dvs $a^p-b^p=m(a-b)$.

Påstående: Delbarhet med $(a-b)$ gäller även för

$n=p+1$, dvs $a^{p+1}-b^{p+1}=n(a-b)$

Bevis:

$$VL=a^pa-b^pb=a^pa-b^pb+a^pb-a^pb=a^p(a-b)+b(a^p-b^p)=$$

$$=a^p(a-b)+b\cdot m(a-b)=(a^p+bm)(a-b)=n(a-b) \quad \#$$