1 I en godispåse ligger 10 röda, 10 gröna och 10 gula karameller av samma typ. Du tar, utan att titta, karameller ur påsen.

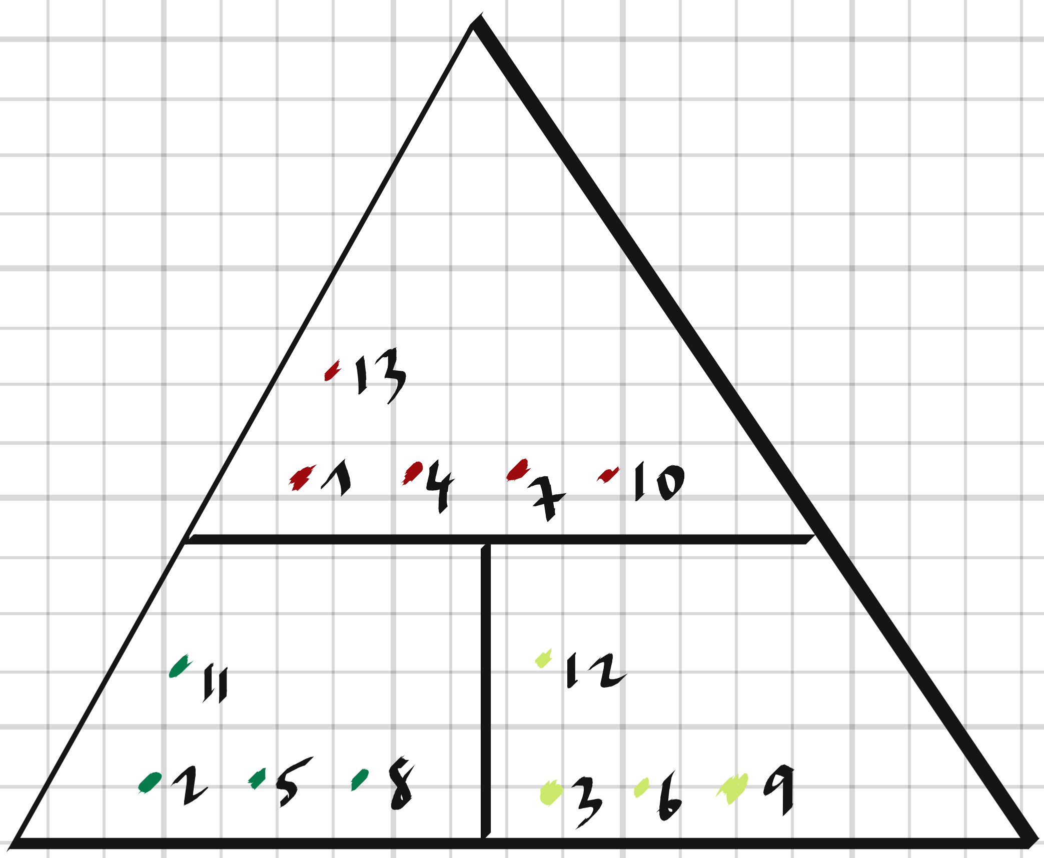
Hur många måste du ta för att vara säker på att få minst 5 av samma färg?

1. Lådprincipen ger:

$k+1=5 \Rightarrow k=4$

3 färger $\Rightarrow n=3$

Antal dragningar $= n \cdot k+1 = 3\cdot 4+1 = 13$.



2 Låt $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$ och $C = \{a, c, d, g\}$. Bestäm

a) $A \cup B$

b) $B \setminus C$

c) $A \cap C$

d) $B \cap C$

e) $A \cap B \cap C$

f) $|A \cup B \cup C|$

2.

a) $A \cup B$ = A or B $= \underline{\{a, b, c, d, e, f\}}$

b) $B \setminus C = \underline{\{b, e, f\}}$ (Alla som ingår i B men inte i C)

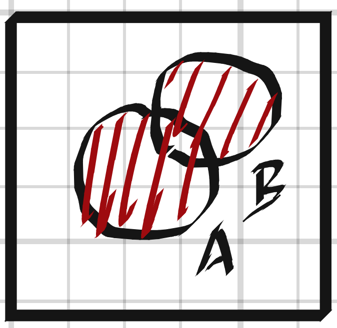
c) $A \cap C$ = A and C $= \underline{\{a, c\}}$

d) $B \cap C$ = B and C $= \underline{\{c, d\}}$

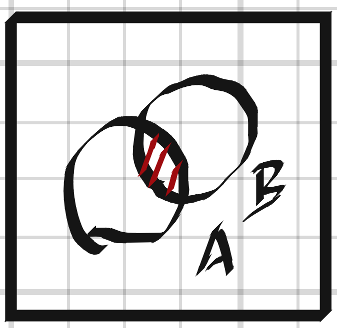
e) $A \cap B \cap C$ = A and (B and C) $= \underline{\{c\}}$

f) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\} \Rightarrow$

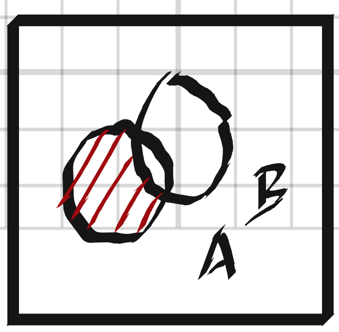
$|A \cup B \cup C| = \underline{7}$ (Antal element i listan)



$A \cup B$ = A or B "unionen"



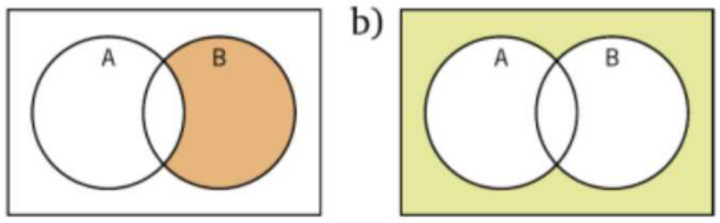
$A \cap B$ = A and B "snittet"



$A \setminus B$ alla i A men inte de som också ingår i B.

3 Beskriv med symboler den färgade delen av Venndiagrammet.

a) b)



3.

a) $B \setminus A$ b) $(A \cup B)^c$

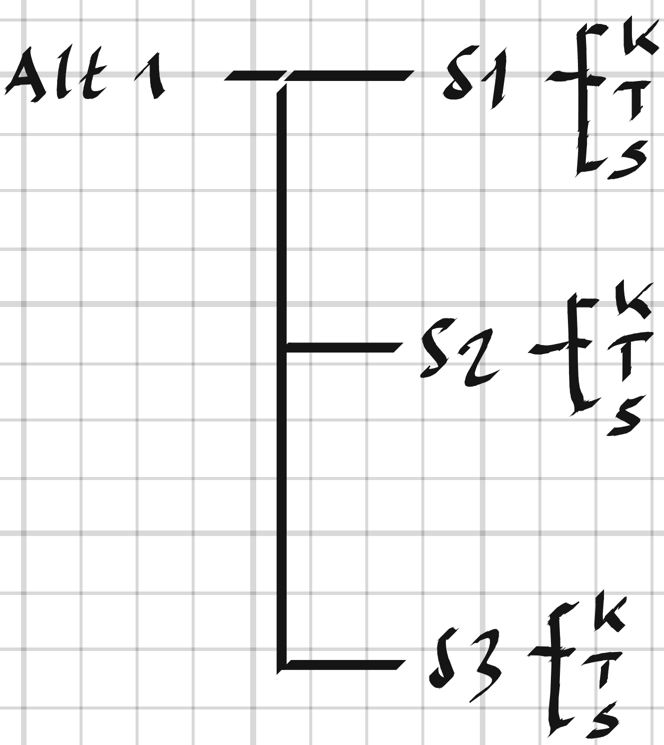
---

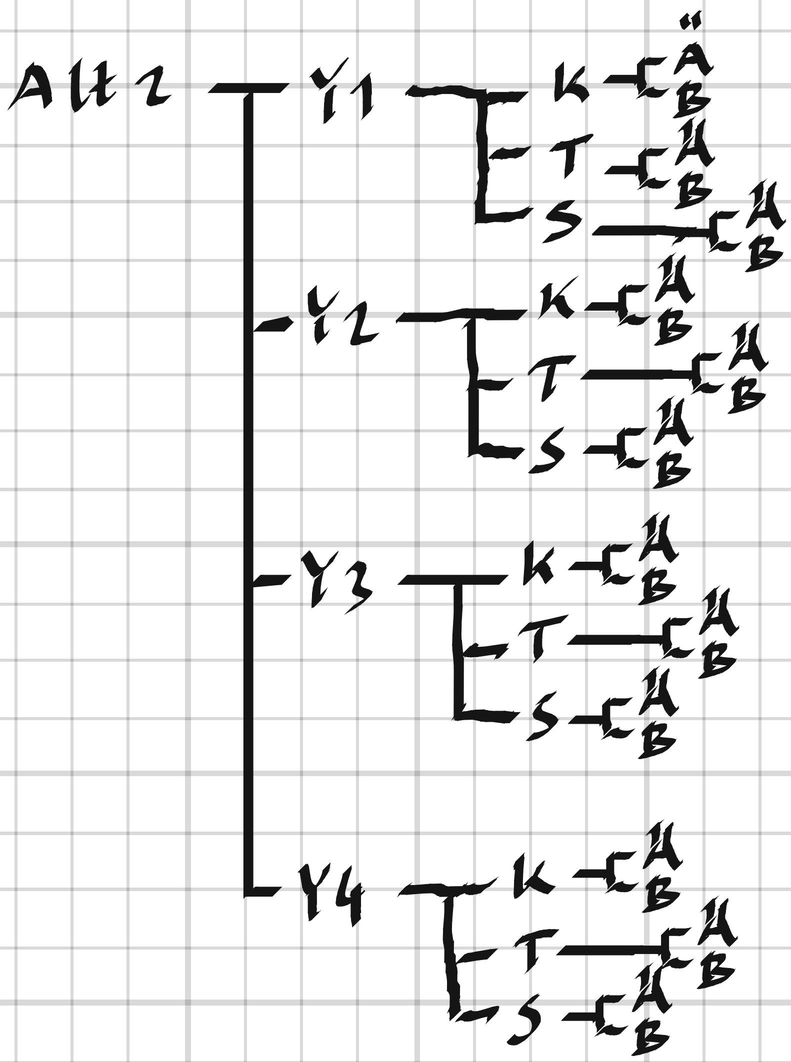
5 I skolcafeterian kan man köpa ett mellanmål för 25 kr. Man får då antingen en dryck och en smörgås eller en dryck, en yoghurt och en frukt.

Det finns te, kaffe eller saft, tre olika smörgåsar, fyra yoghurtsmaker och äpple eller banan att välja på.

På hur många sätt kan man välja sitt mellanmål för 25 kr?

5.





$3 \cdot 3 = 9$ sätt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sätt

$9 + 24 = 33$ sätt

6 I en låda med åtta nya batterier har det hamnat två gamla som ska slängas. Du tar tre batterier ur lådan.

Hur många sådana urval

a) är möjliga

b) innehåller bara nya batterier

c) innehåller minst ett gammalt batteri?

6. Ordningen har här ingen betydelse $\Rightarrow$

a) $C(10,3) = \frac{P(10,3)}{3!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{120}$

b) $C(8,3) = \frac{P(8,3)}{3!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 2 = \underline{56}$

c) Minst ett gammalt är komplement-händelse till att få alla nya. $\Rightarrow$

Totalt antal möjliga kombinationer minus antal kombinationer med bara nya.

$C(10,3) - C(8,3) = \binom{10}{3} - \binom{8}{3} = 120 - 56 = \underline{64}$

7 Utveckla

a) $\binom{n}{3}$ c) $\binom{n}{n-2}$

b) $\binom{n+1}{2}$ d) $\binom{n+1}{n-1}$

7.

a) $$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cancel{(n-3)!}}{3\cdot 2\cdot\cancel{(n-3)!}} = \underline{\underline{\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{6}}}$$

b) $$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2\cdot(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot\cancel{(n-1)!}}{2\cdot\cancel{(n-1)!}} = \underline{\underline{\frac{(n+1)\cdot n}{2}}}$$

c) $$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

d) $$\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

---

8 Hur många permutationer kan man göra av de fyra symbolerna, om de ska placeras på rad?

a) ✚ ♥ ✸ ▼ c) ✚ ♥ ✚ ♥

b) ✚ ♥ ✚ ✸ d) ✸ ▼ ✸ ✸

a) $4! = 4\cdot 3\cdot 2 = \underline{\underline{24}}$

b) $P(4,2) = \frac{4!}{2} = 4\cdot 3 = \underline{\underline{12}}$

c) $\underline{\underline{6 \text{ st}}}$

d) $P(4,1) = \underline{\underline{4}}$

c)

+ ♥ ♥ +
+ + ♥ ♥
♥ ♥ + +
♥ + + ♥
+ ♥ ♥ +
+ + ♥ ♥

9 Varför är alla fakulteter utom 1! jämna tal?

9. Eftersom den näst sista faktorn alltid blir 2, vilket medför att talet alltid också är delbart med två.

10 Visa att

a) $m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$

b) $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ för alla $n \geq 1$.

10. a) $HL = 2 \cdot \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} + \frac{m!}{(m-1)!} =$

$= \frac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!} + \frac{m(m-1)!}{(m-1)!} =$

$= m(m-1) + m = m^2 - m + m = m^2 = VL$ #

b) $HL = 2 \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)! \cdot n!}$

$VL = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{2n(2n-1)!}{n(n-1)! \cdot n!} = 2 \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)! \cdot n!} = HL$ #

11 A och B är mängder.

a) Beskriv innebörden av mängddifferensen $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ med ord.

b) Vad innebär $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \varnothing$?

11. a) Alla element som tillhör A eller B, men inte dem som tillhör både A och B

b) Om A och B är lika är

$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \cup B \setminus A \cap B = \varnothing$

---

12 Går det att hitta mängder A, B och C som uppfyller $A \cup C = B \cup C$, $A \setminus C = B \setminus C$ och $A \neq B$

12. T.ex. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$

$A \cup C = B \cup C \Rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow \{1, 2\} = \{1, 2\}$

$A \neq B \Rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3\}$

13 En träningsgrupp i fotboll består av 20 utespelare och en målvakt.
På hur många sätt kan ett 11-mannalag väljas ut om man inte tar hänsyn till att de tio utespelarna helst vill spela på vissa positioner?

13. $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = \underline{184756 \text{ sätt}}$

---

14 Hedvig kastar 4 tärningar.
Hur stor är sannolikheten att hon får
a) åtminstone en sexa
b) exakt tre sexor?

14. a) $P = 1 - P(\text{ingen sexa}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518 \approx \underline{52\%}$

Alt. lösning:

Antal möjliga utfall $= 6^4 = 1296$

Antal fall utan en sexa $= 5^4 = 625$

$P = \frac{1296 - 625}{1296} = \frac{671}{1296} = 0.518 \approx \underline{52\%}$

b) Antal möjliga utfall $= 6^4 = 1296$

Antal gynnsamma utfall $= \binom{4}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 20$

$P(\text{exakt tre sexor}) = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324} = 0.0154 \approx \underline{1.5\%}$

---

15 En undersökning inför en friluftsdag, i årskurs 4, visar elevernas val.

65 % vill åka skidor

55 % vill åka skridskor

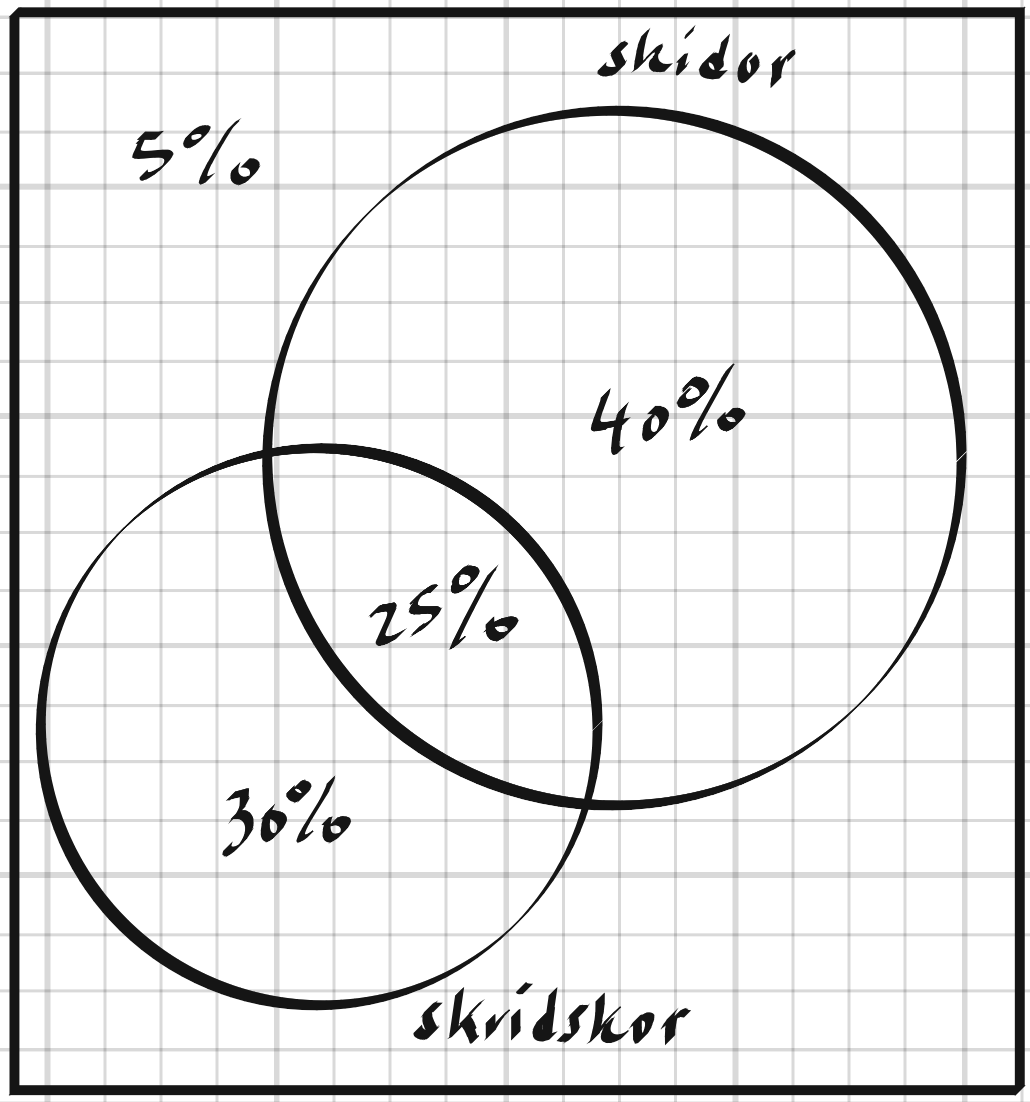
25 % vill åka både skidor och skridskor.

a) Rita ett Venndiagram som presenterar undersökningen.

b) Hur många procent av eleverna vill varken åka skidor eller skridskor?

15.

a)



b) $(100-40-25-30)\% = \underline{5\%}$

---

16 a) Visa att $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$

b) Beskriv en vardaglig situation där $\binom{9}{3}$ och $\binom{9}{6}$ är lika.

16. a) $VL = \dfrac{9!}{3!(9-3)!} = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!}$

$HL = \dfrac{9!}{6!(9-6)!} = \dfrac{9!}{6! \cdot 3!} = VL$ #

b) Att välja ut 3 av 9 kan göras på lika många sätt som de andra 6 av 9.

17 Utveckla

a) $(3x^2 - y^3)^2$ c) $(x - y)^4$

b) $(a + 2b)^3$ d) $(z^2 + 3u)^5$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

17. a) $\underline{9x^4 - 6x^2y^3 + y^6}$

b) $\underline{a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3}$

c) $\underline{x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4}$

d) $(z^2)^5 + 5(z^2)^4 \cdot 3u + 10 \cdot (z^2)^3 \cdot (3u)^2 +$

$+ 10 \cdot (z^2)^2 \cdot (3u)^3 + 5\, z^2 \cdot (3u)^4 + (3u)^5 =$

$= \underline{z^{10} + 15z^8u + 90 \cdot z^6u^2 + 270\, z^4u^3 + 405\, z^2u^4 + 243\, u^5}$

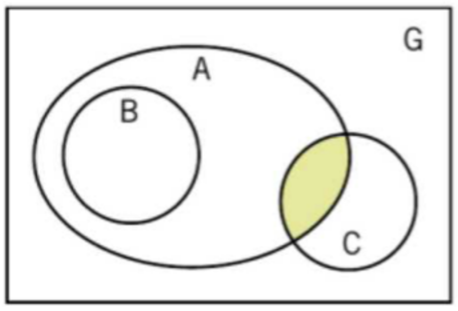
---

18 Utveckla och förenkla uttrycket $\frac{(x+h)^6 - x^6}{h}$

18. $$\frac{6x^5h + 15x^4h^2 + 20x^3h^3 + 15x^2h^4 + 6xh^5 + h^6}{h} =$$

$= \underline{6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5}$

20



G = {alla trianglar}

A = {likbenta trianglar}

a) Var bör de liksidiga trianglarna finnas?

b) Var bör de rätvinkliga trianglarna finnas?

c) Vilka trianglar är det färgade omådet?

Motivera dina svar.

20. a) B - liksidiga ingår i mängden likbenta

b) C - rätvinkliga trianglar.

c) Likbenta rätvinkliga trianglar, typ 90-45-45.

21 Människans DNA består av en 1,5 m lång spiral med miljarder baspar (”stegpinnar”) med beteckningarna AT, TA, CG och GC. Bokstäverna A, T, C och G står för adenin, tymin, cytosin och guanin. I DNA-spiralen finns ca 30 000 gener insprängda.

Ordningen mellan basparen, tagna i grupper om tre, talar om vilket protein som ska byggas. Så ger t ex sekvensen TAC TTG TTT CAC ett visst protein.

a) Hur många ”ord” med tre bokstäver kan skrivas med det genetiska alfabetet A, T, C och G?

b) Hur många av orden med tre bokstäver innehåller exakt ett A?

c) En gen som beskriver hur ett visst protein ska byggas innehåller 200 ord med tre bokstäver. På hur många sätt kan en sådan gen vara uppbyggd?

21. a) $4^3 = 64$ (Permutationer med återläggning)

b) $\binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (A kan placeras $\binom{3}{1} = 3$ olika platser)

c) 64^{200} (Permutationer med återläggning)

---

22 En familj på fem personer cyklar efter varandra på en smal landsväg.

a) På hur många sätt kan familjemedlemmarna placera sig?

b) På hur många sätt kan de placera sig om det yngsta barnet ska cykla näst först eller i mitten?

22. a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 120 olika sätt

b) $\underbrace{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(4!)} + \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}_{(4!)} = 24 + 24 = 48$ olika sätt

---

23 I en klass med 28 elever är 13 flickor.

a) På hur många sätt kan två flickor och två pojkar väljas ut till en tävling?

b) Hur stor är sannolikheten att det blir just två flickor och två pojkar om fyra elever slumpmässigt väljs ut ur klassen?

23. a) $\binom{13}{2} \cdot \binom{15}{2} = 78 \cdot 105 = \underline{8190}$

b) $\dfrac{\binom{13}{2} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{28}{4}} = \dfrac{8190}{20475} = 0{,}4 = \underline{40\%}$

---

25 Skriv talen 1, 2, 3, 4, 5 och 6 på lappar och välj fyra av lapparna.

Visa att minst ett par av dessa lappar ger summan 7.

25. Antal sätt att få summan 7 = 3 par
(jämför motstående sidor på en tärning)

Om 4 lappar dragits återstår 2 siffror som maximalt kan tillhöra 2 par ⇒ Minst ett par måste finnas bland de 4 lapparna.

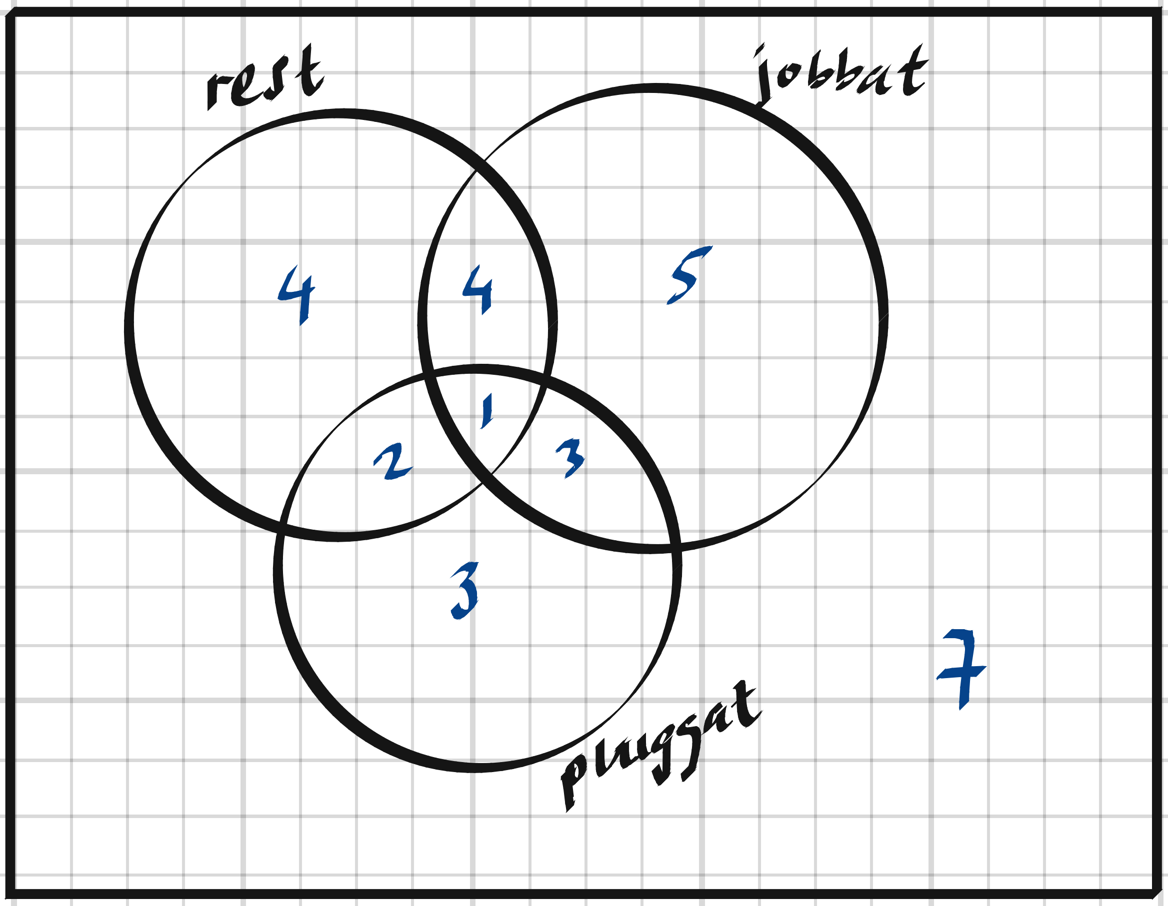
26 De 29 eleverna i en gymnasieklass fick efter sommarlovet ange om de jobbat, pluggat respektive rest utomlands på lovet.

13 elever hade jobbat, 11 hade varit utomlands och 9 hade pluggat. 3 hade rest och pluggat, 4 hade jobbat och pluggat och 5 hade jobbat och rest. En elev hade gjort alla tre sakerna.

Hur många av eleverna hade varken jobbat, pluggat eller rest?

Tips: Börja inifrån och vandra utåt!

26.



$29 - 4 - 4 - 2 - 1 - 3 - 3 - 5 = 7$ st hade varken jobbat, pluggat eller rest

---

27 I den förenklade utvecklingen av $(x + 2y)^{13}$ finns en term $k \cdot x^2y^{11}$.

Bestäm talet k.

27. Näst sista termen på rad 13 i Pascals triangel $\Rightarrow$

$\binom{13}{11} \cdot x^2 \cdot (2y)^{11} \Rightarrow k = \binom{13}{11} \cdot 2^{11} = 78 \cdot 2048 = 159\,744$

28 På stryktipset innebär en rad att man tippar resultatet i 13 fotbollsmatcher. Man väljer 1, X eller 2 (hemmavinst, oavgjort eller bortavinst) för varje match.

Hur många rader måste man tippa för att säkert få minst 5 rätt av 13?

28. $k = 13//3 = 4 \Rightarrow$

En rad med 13 rätt måste innehålla minst $k+1 = 5$ st ettor, kryss eller tvåor.

Om man då tippar 3 rader med bara ettor, kryss resp. tvåor kommer minst en av dessa innehålla 5 rätt.

---

29 Faktorisera

a) $n! - (n-1)!$ b) $(n+2)! - 2 \cdot n!$

29. a) $n! - (n-1)! = n \cdot (n-1)! - (n-1)! = (n-1)! (n-1)$

b) $(n+2)! - 2n! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n! - 2n! =$

$= n! ((n+2)(n+1) - 2) = n! \cdot (n^2 + 3n)$

---

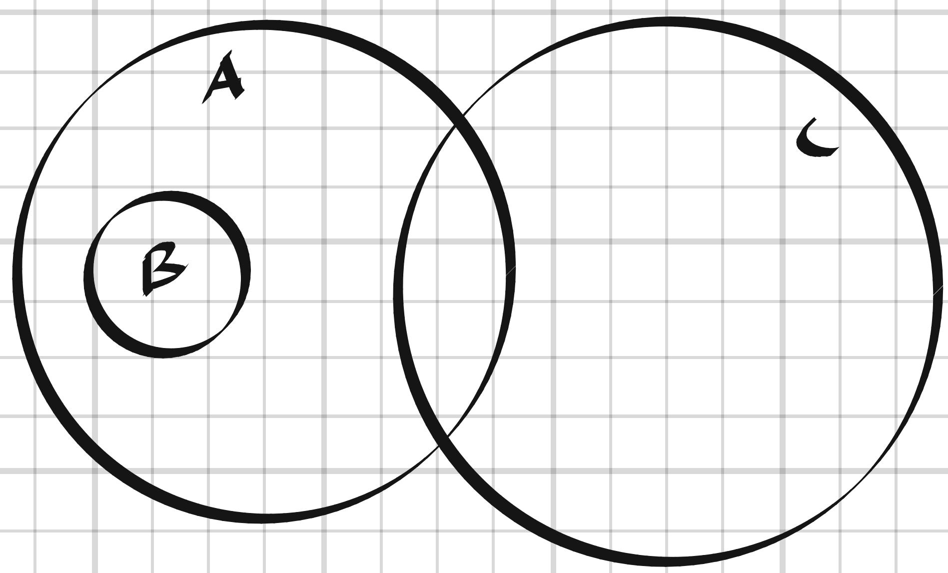
30 Rita mängderna A, B och C i ett Venndiagram så att de uppfyller
$A \cap B \cap C = \varnothing$, $B \setminus A = \varnothing$ och $\varnothing \subset (A \cap C)$.

30. $B \setminus A = \varnothing$ => B är en delmängd av A => $A \cap B = B$

=> $A \cap B \cap C = B \cap C = \varnothing$ => B och C saknar gemensamma element.

$\varnothing \subset (A \cap C)$ => Den tomma mängden $\varnothing$ är en delmängd av snittet $A \cap C$ =>

$A \cap C$ existerar.



31 Bridge spelas med en vanlig kortlek. En bridgehand har 13 kort.

a) Hur många bridgehänder finns det?

b) Hur många bridgehänder har fördelningen 4 – 3 – 3 – 3 , dvs 4 av en färg och 3 av de övriga?

c) Hur många bridgehänder innehåller minst ett hjärterkort?

31. a) $\binom{52}{13} \approx 6{,}35 \cdot 10^{11}$

b) $4 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3} \approx 6{,}69 \cdot 10^{10}$

c) Minst ett hjärterkort är komplement till inget hjärterkort =>

Antal $= \binom{52}{13} - \binom{39}{13} \approx 6{,}27 \cdot 10^{11}$

---

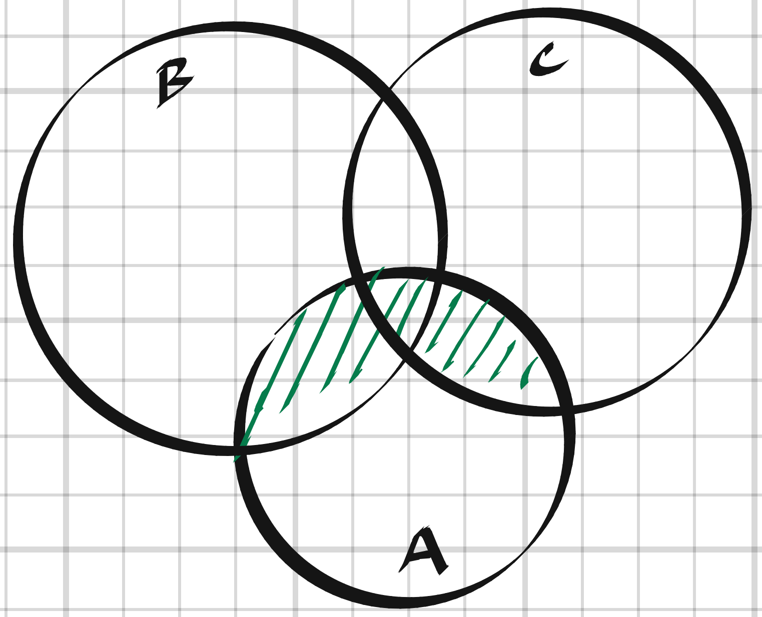
32 Visa med ett Venndiagram att

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

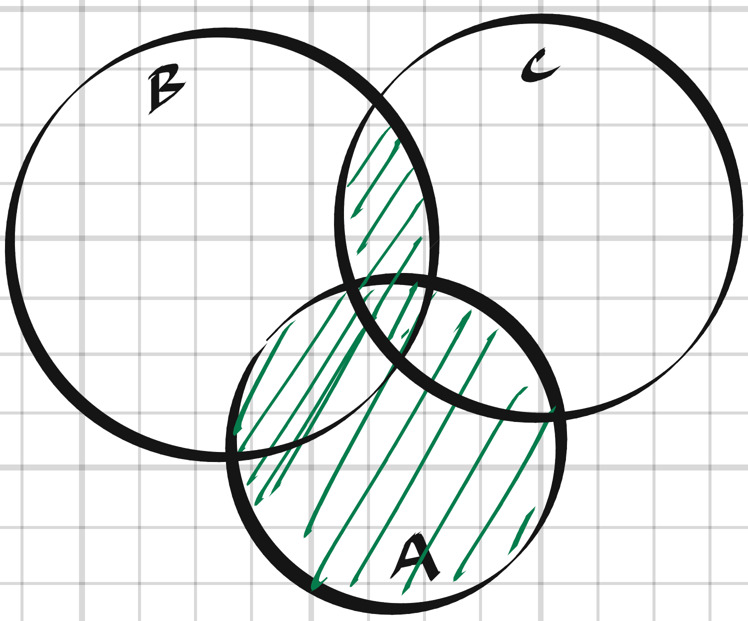
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

32.

a)

VL =  = HL

b)

VL =  = HL

33 Tolv länder är inbjudna till en konferens. Varje land representeras av tre personer.

Första dagen hälsar alla, utom de från samma land, på varandra en gång med att ta i hand.

Hur många handhälsningar görs denna dag?

33.

$3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$

$3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$

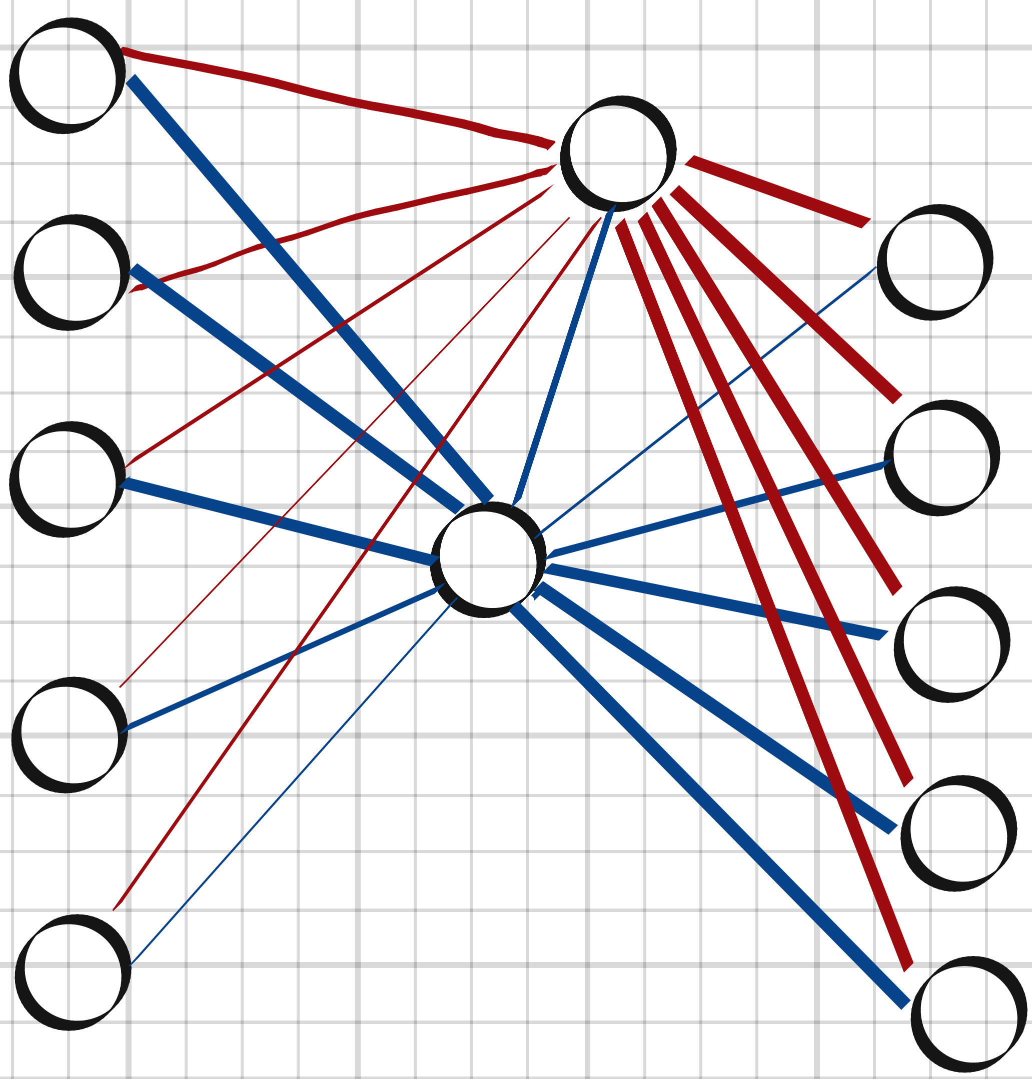
$3 \cdot 3 \cdot 9 = 81$

$3 \cdot 3 \cdot 8 = 72$

$\vdots$

$3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

$$3 \cdot 3 \cdot (11 + 10 + \ldots + 1) = 3 \cdot 3 \cdot \frac{11 \cdot (11+1)}{2} = \underline{594 \text{ st}}$$



Alt. lösning:

Om alla skakar hand med alla: $\binom{36}{2} = 630$ st

Om varje lands representanter skulle skaka hand med varandra: $12 \cdot \binom{3}{2} = 12 \cdot 3 = 36$ st

Antal handhälsningar $= 630 - 36 = \underline{594 \text{ st}}$

35 Varje lördag säljer Jönssons bageri nybakade rågbullar, sesambullar, tekakor, gifflar och surdegsbullar.

På hur många sätt kan man köpa ett dussin (12 st) av det nybakade brödet?

35. 5 grupper och 12 bullar =>

16 symboler (4 delstreck och 12 bullar)

• • | • • • | • • | • • • | • •

De 4 delstrecken kan fördelas på 16 olika positioner. =>

$$\text{Antal sätt} = \binom{16}{4} = 1820 \text{ st}$$

Alt. lösning:

Antal kombinationer med återläggning:

$n = 5$, $k = 12$

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = \underline{1820 \text{ st}}$$

36 Till en golftävling kommer 18 personer. Första dagen ska de spela tillsammans tre och tre.

a) På hur många sätt kan grupperna (3-bollarna) arrangeras?

b) Den största sponsorn kräver att de 4 bäst rankade spelarna inte ska spela tillsammans. På hur många sätt kan grupperna arrangeras om man tar hänsyn till detta?

36.

a) Första gruppen kan väljas på $\binom{18}{3}$ sätt.

Andra — " — $\binom{15}{3}$ sätt o.s.v

$\Rightarrow \binom{18}{3}\cdot\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}$ (6 st grupper)

Detta är en permutation av en rad kombinationer, dvs vi har tagit hänsyn till ordningen. För att kompensera för dubletter divideras med 6! $\Rightarrow$

$$\text{Antal sätt} = \frac{\binom{18}{3}\cdot\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}}{6!} = \underline{190590400 \text{ sätt}}$$

b) De 4 bäst rankade placeras i varsin grupp 1-4:

$$\binom{14}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}$$

På samma sätt som i a) är detta en permutation och vi måste kompensera för med 2! för de två sista grupperna som kan skifta ordning. =>

$$\frac{\binom{14}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}}{2!} = \underline{75\,675\,600 \text{ sätt.}}$$