KOMMENTARMATERIAL

Kommentarmaterial till ämnesplanen i matematik

Gymnasieskolan och kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå

Skolverket

Publikationen finns att ladda ner som kostnadsfri
PDF från Skolverkets webbplats:
www.skolverket.se/publikationer

ISBN: 978-91-7559-495-8

Skolverket, Stockholm 2022

Innehåll

Inledning 4

Övergripande kommentarer till ämnesplanen i matematik 5

Tre spår 5

Byte mellan spåren 5

Särskilda kommentarer rörande kommunal vuxenutbildning 6

Kommentarer till ämnesplanens syfte 8

Att arbeta matematiskt 8

Varierade arbetsformer och arbetssätt 9

Digitala verktygs roll i ämnet 9

Ämnesplanens mål 10

Kommentarer till ämnesplanens centrala innehåll 11

Återkommande begrepp 11

Matematik inom karaktärsämnen och yrkesliv 14

Aritmetik, algebra och funktioner 15

Trigonometri/Trigonometri och vektorer 21

Statistik/Sannolikhet och statistik 22

Logik/Logik och geometri/Logik och diskret matematik 24

Problemlösning, verktyg och tillämpningar 25

Kommentarer till ämnesplanens betygskriterier 27

Övergripande kommentarer till betygskriterierna 28

Förmåga att använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp 29

Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg 29

Förmåga att analysera och lösa problem med hjälp av matematik 30

Förmåga att tillämpa, formulera och utvärdera matematiska modeller 31

Förmåga att föra och följa matematiska resonemang 32

Förmåga att kommunicera matematik muntligt, skriftligt och i handling 33

Inledning

Kommentarmaterial för ämnesplaner riktar sig till lärare, rektorer och andra som är verksamma inom skolväsendet. Avsikten med materialet är att ge en bredare och djupare förståelse för ämnesplanen.

Det finns omkring 1 000 kurser och 300 ämnen för gymnasieskolan och kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå. Till några av dem finns kommentarmaterial och de varierar till både omfång och karaktär.

Formuleringar som är hämtade direkt från ämnesplanen är genomgående kursiverade i texten.

Övergripande kommentarer till ämnesplanen i matematik

Tre spår

Matematikämnet är indelat i 100-poängskurser. De tre inledande kurserna har parallella spår för olika grupper av program. För yrkesprogrammen finns ett a-spår, för ekonomiprogrammet, estetiska programmet, humanistiska programmet och samhällsvetenskapsprogrammet finns ett b-spår, och för naturvetenskaps-programmet och tekniska programmet ett c-spår. I kommunal vuxenutbildning kan kurser från alla tre spår erbjudas.

Matematik 3b bygger på 2a eller 2b, och matematik 3c bygger på 2a eller 2c. Matematik 4 bygger på matematik 3b eller 3c. Matematik 5 och matematik – specialisering bygger på matematik 4.

Det centrala innehållet skiljer sig åt mellan spåren, men är till större delen lika framför allt mellan b- och c-spåren. I kurserna 1a och 2a ska delar av det centrala innehållet väljas utifrån karaktärsämnen och yrkesliv, vilket gör att innehållet kan variera även inom en och samma kurs.

Kurserna matematik 5 och matematik – specialisering är inte obligatoriska kurser på något program. Innehållet i specialiseringskursen kan variera, och kursen kan läsas flera gånger med olika innehåll. Exempel på matematikområden ges i det centrala innehållet.

Sett till mängden punkter i det centrala innehållet kan omfattningen på olika kurser tyckas olika. Till exempel innehåller matematik 1c tre punkter som inte återfinns i matematik 1b, medan matematik 1b endast omfattar en punkt som inte återfinns i matematik 1c. Detta behöver inte betyda att kurserna ska ses som olika omfattande, eller ha olika mycket undervisningstid, eftersom hur djupt olika punkter behandlas kan variera.

Byte mellan spåren

Vid byte mellan spåren kan eleverna behöva komplettera visst innehåll. Nedan kommenteras de övergångar som bedöms vara vanligast och innehållet i spåren jämförs.

Övergång från 2a till 3b eller 3c

Logaritmer ingår i matematik 2b och 2c, men är inte obligatoriskt innehåll i a-spåret. Logaritmer används i matematik 3b och 3c exempelvis i samband med derivering av exponentialfunktioner.

Linjära olikheter ingår i matematik 1b och 1c, men är inte obligatoriskt innehåll i a-spåret. Linjära olikheter används i matematik 3b (men inte 3c) i området linjär optimering, men saknas som obligatoriskt innehåll i a-spåret.

Grundläggande trigonometri ingår i matematik 1c, men är inte obligatoriskt innehåll i a-spåret. Trigonometrin fördjupas i matematik 3c, men ingår inte i centralt innehåll för matematik 3b.

Övergång från 3b till 4

Trigonometri ingår inte i b-spåret, men förekommer både i matematik 1c och 3c. I matematik 4 fördjupas trigonometrin ytterligare med till exempel hantering av trigonometriska uttryck och bevis av trigonometriska formler.

Vektorer och absolutbelopp av vektorer ingår i matematik 1c, och absolutbelopp för reella tal ingår i matematik 3c. Detta innehåll saknas i b-spåret. Vektorer och absolutbelopp används i matematik 4 i samband med komplexa tal.

Räkneregler för logaritmer är i matematik 2b kopplat till *lösning av exponentialekvationer*, medan de behandlas bredare i matematik 2c. Logaritmer används i matematik 4 i samband med logaritmfunktioner samt derivering av dessa.

Särskilda kommentarer rörande kommunal vuxenutbildning

Ämnesplanen i matematik gäller både i gymnasieskolan och kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå. Eftersom man inom kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå inte läser program utan *utbildningen bedrivs i form av kurser* (20 kap. 5 § skollagen (2010:800)) är förutsättningarna för hur utbildningen ska bedrivas annorlunda jämfört med gymnasieskolan.

För kommunal vuxenutbildning gäller att *utgångspunkten för utbildningen ska vara den enskildes behov och förutsättningar* (20 kap. 2 § skollagen) och detta är avgörande för vilka kurser eleven ska läsa, förutsatt att eleven är behörig att tas emot till utbildningen.

De tre spåren i matematik är utformade för olika typer av program inom gymnasieskolan. För kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå gäller att *huvudmannen beslutar om vilka nationella kurser som ska ges* (2 kap. 9 § förordningen om vuxenutbildning).

Om eleven har som mål att avlägga en gymnasieexamen finns krav på att vissa kurser måste ingå, bland annat i matematik. I en gymnasieexamen kan det inte ingå betyg från två eller flera kurser i matematik på samma nivå – eleven kan inte ha betyg i till exempel både matematik 1a och matematik 1c i sin examen. *Om eleven tidigare har fått godkänt betyg på en inledande kurs i matematik, får rektorn besluta att detta betyg ska ersätta det betyg som krävs för att en* *gymnasieexamen ska kunna utfärdas* (4 kap. 14–16 §§ förordningen (2011:1108) om vuxenutbildning).

Karaktärsämnen och kommunal vuxenutbildning

I det centrala innehållet nämns *karaktärsämnen*[1] på flera ställen, för infärgning eller urval av centralt innehåll. I kurser som ges inom yrkesprogram på gymnasieskolan nämns även *yrkesliv* i liknande sammanhang. A-spåret i matematiken är utformat för elever på väg mot eller inom specifika yrkesområden. Om en elev inte är på väg mot eller befinner sig inom ett specifikt yrkesområde finns i stället kurser inom b- eller c-spåret.

[1] Karaktärsämnen definieras i 1 kap. gymnasieförordningen (2010:2039).

Kommentarer till ämnesplanens syfte

Ämnets syfte riktar sig till läraren och beskriver de övergripande målsättningar som ska gälla för undervisningen i det aktuella ämnet eller ämnesområdet. Syftet är därför en viktig del när lärare planerar och genomför undervisningen. Syftestexten avslutas med ett antal mål som avgränsar de delar av syftet som ligger till grund för betygskriterierna.

Att arbeta matematiskt

Mycket av matematikämnets roll i skolan motiveras med dess användbarhet inom vitt skilda områden, och ett övergripande syfte med ämnet är att eleven ska få verktyg för att se och upptäcka nya fenomen omkring sig – och för att förstå, analysera och bearbeta dem. Undervisningen i matematik syftar därför till att eleverna ska utveckla förmåga att *arbeta matematiskt* bland annat med att *utveckla olika strategier för att kunna lösa problem* och att *använda matematik i samhälls- och yrkeslivet*. Det är av stor vikt att elevens matematikkunnande inte är begränsat till klassrummet eller övningar i ett läromedel, utan kan användas i olika sammanhang. Ämnets syfte nämner därför att undervisningen, där det är lämpligt, ska *ske i relevant praxisnära miljö och med verktyg som används inom karaktärsämnena*, vilket kan vara ett sätt att få matematiken att användas även utanför klassrummet.

I syftets inledande stycke nämns också *förståelse av matematikens begrepp och metoder*. God förståelse av och förtrogenhet med begrepp och metoder är viktigt för att kunna använda matematik i olika sammanhang, bland annat för att väl befästa kunskaper är lättare att överföra till nya situationer. Men det är också viktigt för att goda kunskaper i begrepp och metoder frigör tankeutrymme som kan användas för att upptäcka, förstå och bearbeta bredare frågeställningar. Att låta elever befästa begrepp och träna på att använda metoder kan därför motiveras med att det gör det möjligt för eleverna att ägna sig åt matematikens mer utforskande och kreativa sidor. Många av de begrepp och metoder som förekommer i matematiken på gymnasial nivå är dessutom nödvändiga byggstenar för begrepp och metoder i senare kurser och eventuella studier på högskola. Samtidigt finns också värden i begrepp och metoder som inte kräver att de är verktyg för annan matematisk verksamhet, exempelvis för att de kan väcka nyfikenhet eller för att begreppen och metoderna visar upp olika delar av vad matematik kan vara.

Matematiska begrepp och metoder kan ha värden i sig, och detsamma gäller för matematikämnet som helhet. Även om matematik ofta motiveras av nytta och användbarhet finns det också många egenvärden (exempelvis i linjär algebra). Matematiskt arbete rymmer bland annat kreativitet, samarbete och estetik, vilka inte behöver motiveras utifrån praktisk nytta för individ eller samhälle. Matematik ger också goda möjligheter att träna logiskt tänkande, argumentation och abstraktionsförmåga.

Ämnets syfte tar upp *problemlösning som både mål och medel*. Detta är ett exempel på att matematik både är ett verktyg för andra ändamål (ett medel) och att matematiska aktiviteter i sig kan ha värde (ett mål).

Varierade arbetsformer och arbetssätt

Ämnesplanen anger att undervisningen ska innehålla *varierade arbetsformer och arbetssätt*. Matematikundervisning som är varierad främjar elevernas kunskapsutveckling i ämnet. Även färdighetsträning, som är en viktig del av undervisningen inte minst när elever möter nya metoder, kan varieras på många olika sätt både vad gäller arbetsformer och själva innehållet.

Studier i klassrum visar att matematik är ett av de ämnen där undervisningen är mest bunden till läromedel. Att använda läromedel står inte i motsatsförhållande till att ha varierade arbetssätt, samtidigt som en medveten pedagogik innebär att undervisningens former och upplägg anpassas till elever och situationer där undervisningen bedrivs.

Digitala verktygs roll i ämnet

Digitala verktyg nämns både i ämnets syfte, centralt innehåll och betygskriterier. Ämnets syfte anger att elever ska få *utveckla sin förmåga att använda digitala verktyg för att lösa problem samt fördjupa sitt matematikkunnande och utvidga de områden där matematikkunnandet kan användas.*

De digitala verktygen spelar flera roller i skolämnet matematik. De kan vara pedagogiska hjälpmedel, exempelvis för att illustrera vad som händer när koefficienter i ett andragradsuttryck ändras, eller troliggöra randvinkelsatsens giltighet. Digitala verktyg som pedagogiska hjälpmedel regleras inte genom ämnesplanen.

Digitala verktyg kan också vara medel för att få större räckvidd med sina matematiska kunskaper. Det kan handla om att lösa ekvationer eller beräkna integraler där eleven ännu inte har kunskaper för att göra det för hand, eller där det endast är möjligt att göra detta numeriskt. Ett annat exempel är tillfällen där eleven har kunskaperna för att göra beräkningar för hand, men mängden beräkningar i praktiken kräver digitala verktyg. I det centrala innehållet nämns detta som *digitala metoder* och *användning av digitala verktyg för att effektivisera beräkningar och komplettera metoder*. Även användning av programmering faller inom denna kategori.

Digitala verktyg kan därutöver vara ett centralt innehåll där just användandet av en särskild sorts digitala verktyg står i fokus för lärandet. I kurserna på gymnasial nivå omfattar detta kalkylprogram, som nämns i samtliga matematik 1-kurser, och symbolhanterande verktyg, som nämns i matematik 3–5. Till skillnad från grundskolans matematikämne ingår inte programmering som ett centralt innehåll i sig på gymnasial nivå, eftersom programmering där finns som egna ämnen. Programmering nämns i stället som ett sätt att arbeta med annat matematiskt innehåll.

Ämnesplanens mål

Ämnesplanens syftestext avslutas med ett antal mål. Dessa är avgränsade till de delar av syftet som ligger till grund för betygskriterierna. Målen innehåller inte sådant som elevernas socioemotionella utveckling, värderingar, beteenden eller intresse för ämnet. Dessa områden är viktiga när lärarna planerar, genomför och utvärderar sin egen undervisning men ska inte vara underlag för bedömning och betygssättning.

Kommentarer till ämnesplanens centrala innehåll

Varje kurs i ämnet har ett centralt innehåll. Det är formulerat i ett antal innehållspunkter och anger vilket obligatoriskt innehåll som ska behandlas i undervisningen. Punkterna ska uppfattas som byggstenar som kan kombineras på olika sätt och väga olika tungt i undervisningen. I planeringen kan de enskilda punkterna i det centrala innehållet kräva olika mycket utrymme i undervisningen, beroende på vad de omfattar och på elevgruppens behov och förutsättningar.

I matematikämnet är det centrala innehållet indelat under rubriker, kallade kunskapsområden. De återkommer i flera av kurserna, och kan underlätta för läraren att se hur innehållet utvecklas och fördjupas från en kurs till nästa. Kunskapsområdena bör inte ses som separata arbetsområden för undervisningen, utan de kan kombineras på de sätt som läraren bedömer som mest lämpligt för att uppnå syftet med undervisningen för elevgruppen.

Återkommande begrepp

Till exempel och inklusive

I det centrala innehållet förekommer uttrycket *till exempel*. De exempel som ges är valda för att ge en anvisning om nivå, omfattning eller avgränsning av ett innehåll, eller för att ge uppslag till läraren om vad ett centralt innehåll kan omfatta. Exemplen är inte obligatoriskt innehåll, utan kan ersättas av annat likvärdigt innehåll.

> *Användning av digitala verktyg, även symbolhanterande, för att effektivisera beräkningar och komplettera metoder, till exempel vid ekvationslösning, derivering, integrering och hantering av algebraiska uttryck.*

> *Användning av integraler i mer komplexa sammanhang, till exempel täthetsfunktioner, sannolikhetsfördelning, rotationsvolymer och beräkning av storheter.*

Citaten ovan är hämtade ur matematik 3b och 3c respektive matematik 4. Exemplen är valda för att förtydliga och avgränsa det centrala innehållet.

> *Beräkningsmetoder som är relevanta för karaktärsämnen och yrkesliv, till exempel uppskattningar, beräkningar på störningar eller mätfel, spill- och svinnberäkningar, överslagsräkning, avrundning, användning av kalkylprogram och metoder för kontrollberäkning.*

> *Behandling av ett eller flera övergripande matematikområden, till exempel linjär optimering, spelteori, logik, matematik som grund för artificiell*

intelligens, differentialekvationer, statistiska metoder, sannolikhetslära, grafteori, linjär algebra, analytisk geometri samt finans-, populations- eller beräkningsmatematik.

Citaten ovan är hämtade ur matematik 1a respektive matematik – specialisering. Dessa längre listor med exempel ska ses som uppslag som läraren kan använda vid urval av centralt innehåll.

I det centrala innehållet förekommer också uttrycket *inklusive*. Det mer detaljerade innehåll som nämns är då obligatoriskt, till skillnad från i fallet *till exempel*.

Lägesmått och spridningsmått, inklusive percentiler och standardavvikelse, samt digitala metoder för att bestämma dessa.

Citatet ovan är hämtat ur matematik 2a, 2b och 2c. Det anger att percentiler och standardavvikelse ska finnas med bland de läges- och spridningsmått som tas upp i undervisningen.

Exempel på

På några ställen i det centrala innehållet förekommer skrivningen *exempel på*. Formuleringen är vald för att sätta fokus på praktisk användning av det matematiska innehållet. Observera att exemplen i sig är det centrala innehållet och därför är obligatoriska att ta upp i undervisningen.

Exempel på hur några statistiska begrepp används i samhälle och yrkesliv, inklusive signifikans, korrelation, kausalitet, urvalsmetoder och felkällor.

Exempel på hur programmering kan användas som verktyg vid problemlösning, databearbetning eller tillämpning av numeriska metoder.

Citaten ovan är hämtade ur matematik 1-kurserna respektive matematik 1c och 2c. De föreskriver att elever i undervisningen ska få möta exempel på hur ett visst matematiskt innehåll används.

Metoder och procedurer

I mål och betygskriterier nämns *procedurer* medan det centrala innehållet nämner *metoder*, vilket också är den term som används i grundskolans kursplan. Med *metoder* avses specifika metoder för att utföra något, exempelvis att använda kvadratkomplettering för att lösa en andragradsekvation. Med *procedurer* avses metoder på en mer generell nivå, såsom att lösa andragradsekvationer (oavsett metod). Att hantera procedurer väl omfattar inte bara att kunna utföra steg i metoder, utan också att välja för sammanhanget lämpliga metoder och även att identifiera att vissa procedurer är påkallade.

Manuella och digitala metoder

När endast *metoder* nämns i det centrala innehållet förutsätts att någon av de metoder som tas upp är manuell (icke-digital). Formuleringen *metoder för att* *bestämma funktionsvärden* betyder alltså att elever i undervisningen ska få möta minst en metod för detta där digitala verktyg *inte* används.

Metoder nämns på ett par andra, mer specifika sätt.

- Digitala metoder, till exempel *digitala metoder för att skapa funktionsgrafer*. I dessa fall finns krav på att elever får möta metoder där digitala verktyg används, och det finns inga krav på att icke-digitala metoder tas upp i undervisningen.
- Grafiska metoder, till exempel *grafiska metoder för att lösa ekvationer*. Detta kan omfatta både grafer på papper och digitala grafer, och det finns ingen närmare styrning om att metoderna måste vara digitala eller icke-digitala.

I matematik 5 nämns *metoder för att lösa [differentialekvationer] för hand.* Att *för hand* skrivs ut är ett undantag för att särskilt betona att metoder utan digitala verktyg ska tas upp. Det ska inte tolkas som att manuella metoder endast är påkallade där de skrivs ut i centralt innehåll.

I samtliga kurser nämns användning av digitala verktyg *för att effektivisera beräkningar och komplettera metoder*, vilket innebär att digitala verktyg kan vara aktuella att ta upp även där digitala metoder inte särskilt skrivs ut i det centrala innehållet. I vilka sammanhang digitala verktyg tas upp är upp till läraren att avgöra.

Motivering och hantering

I många av ämnets kurser används frasen *motivering och hantering* av (vanligtvis) metoder. Det markerar att inte bara utförande av metoder ska ingå i undervisningen, utan också motivering av varför metoderna är giltiga. Hur formellt metoder motiveras avgörs av läraren – i vissa fall är det rimligt att genomföra härledningar eller bevis, medan det i andra fall inte ens är möjligt att göra formella härledningar inom ramen för matematik på gymnasial nivå.

I några fall används frasen *bevis av*, vilket då signalerar att just formella bevis krävs.

Matematik som karaktärsämne

På flera ställen i centralt innehåll nämns karaktärsämnen, exempelvis problemlösning *med särskild utgångspunkt i karaktärsämnen*. För de program som följer c-spåret är matematik i sig själv ett karaktärsämne. Det kan exempelvis innebära att inommatematiska problem får en framträdande roll för dessa program.

Kunskapsområdena

Det centrala innehållet är grupperat i sju kunskapsområden genom de olika kurserna: Matematik inom karaktärsämnen och yrkesliv; Aritmetik, algebra och funktioner; Trigonometri/Trigonometri och vektorer; Statistik/Sannolikhet och statistik; Logik/Logik och geometri/Logik och diskret matematik; Matematikområden; Problemlösning, verktyg och tillämpningar.

Sex av kunskapsområdena beskrivs närmare nedan, tillsammans med kommentarer om utvalda delar av det centrala innehållet. Kunskapsområdet Matematikområden, som endast förekommer i specialiseringskursen, kommenteras inte då det endast består av exempel på vad kursen kan innehålla.

Matematik inom karaktärsämnen och yrkesliv

Detta kunskapsområde återfinns i kurserna i a-spåret och samlar centralt innehåll där läraren gör ett urval utifrån behov i karaktärsämnen och yrkesliv. Elever som läser på olika yrkesprogram kan och bör möta olika innehåll, eftersom den matematik som är relevant för karaktärsämnen och yrkesliv ser olika ut för exempelvis bygg- och anläggningsprogrammet respektive handels- och administrationsprogrammet.

I många av punkterna i det här kunskapsområdet ingår exempel. Dessa är tänkta som uppslag, för att belysa bredden av hur innehåll kan väljas ut. Liksom andra exempel är de inte obligatoriska. Däremot är *mätning och hantering av storheter och enheter som är relevanta för karaktärsämnen och yrkesliv* ett obligatoriskt innehåll där tidsuppskattningar, avrundningsprinciper och kostnadsberäkningar med mera endast är exempel på hur innehållet kan omsättas. Flera av exemplen tar också upp begrepp eller metoder som nämns i grundskolans matematik. Det görs för att markera att det är fullt möjligt att innehållet i kursen omfattar sådant som redan har behandlats i grundskolan, så länge det är relevant för karaktärsämnen och yrkesliv.

Exemplet *matematiska begrepp som utvecklas under förskoleåldern* förtjänar att nämnas särskilt. Det tas upp för att markera att det i vissa sammanhang (framför allt på barn- och fritidsprogrammet) kan vara relevant att undervisningen tar upp hur barns taluppfattning och matematiska kunnande utvecklas och hur det kan stimuleras.

I matematik 2a finns bara två punkter i detta kunskapsområde, medan det är fem punkter i matematik 1a. Detta ska inte ses som att innehållet minskas. De två punkterna i 2a kan motsvara samtliga punkter i 1a, men är formulerade i mer generella ordalag för att ge större frihet att välja vilken matematik som breddas eller fördjupas. Punkten som berör hjälpmedel och verktyg nämner ingen breddning eller fördjupning, eftersom det också kan vara relevant att fortsätta att använda samma hjälpmedel och verktyg som i matematik 1a.

Gällande hur skrivningar om karaktärsämne och yrkesliv kan hanteras inom kommunal vuxenutbildning, se rubriken ”Karaktärsämnen och kommunal vuxenutbildning”.

Aritmetik, algebra och funktioner

Detta kunskapsområde samlar mycket av det centrala innehållet som specifikt rör beräkningsmetoder, hantering av algebraiska uttryck, ekvationer och funktioner.

Hantering av algebraiska uttryck

I matematik 1-kurserna finns innehållet *hantering av [formler och] algebraiska uttryck, inklusive att faktorisera och multiplicera uttryck*. Innehållet behöver ses i ljuset av att hantering av algebra även ingår i grundskolans matematik, och även i senare kurser på gymnasial nivå. Det innebär exempelvis följande:

- Faktorisering som tillhör matematik 1-kurserna kan till exempel vara att bryta ut konstanter och variabler som är faktorer i samtliga termer i ett uttryck. Ett grundläggande exempel kan vara $x^2 + 2x = x(x + 2)$. Ett mer avancerat exempel kan vara $12x^2 - 18xy = 6x(x - 3y)$. Mer avancerade faktoriseringar av uttryck, så som $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ eller $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, tillhör snarare senare kurser.
- Multiplicering som tillhör 1-kurserna kan till exempel handla om att multiplicera uttryck där parenteser ingår, men utan att använda färdiga regler för exempelvis kvadrater och konjugat. Två grundläggande exempel kan vara $-2(x + 5) = -2x - 10$ respektive $(x + 1)(x + 5) = x^2 + 6x + 5$. Ett mer avancerat exempel kan vara $-½(a - 1)(2b + ½c) = -ab + b - ¼ac + ¼c$. Att använda färdiga regler för att multiplicera konjugatuttryck eller kvadrater på binom, så som $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ eller $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$, tillhör snarare matematik 2-kurserna.
- Att hantera uttryck där både faktorisering och multiplicering av uttryck ingår kan också anses ingå i matematik 1-kurserna, till exempel att förenkla och faktorisera $2(x + x^2) - x(3 + x)$. Detta ökar förstås komplexiteten i proceduren och ställer därmed högre krav på elevens säkerhet.

Det är förstås inte otänkbart att ta upp mer avancerad hantering av algebraiska uttryck. Det kan exempelvis göras inom ramar för problemlösning eller för att hitta generella mönster, eller för att medvetet börja titta på innehåll i senare kurser.

Räkneregler för potenser

I matematik 1b, 1c och 2a ingår *motivering och hantering av räkneregler för potenser*. Detta omfattar även negativa och rationella exponenter, där de senare är användbara bland annat för att hantera potensekvationer (som ingår i samma kurser).

Innehållet är i viss mån repetition av matematiska lagar och regler samt deras användning vid beräkningar med tal i […] potensform som ingår i grundskolans årskurs 7–9.

Logaritmer

I matematik 2b och 2c ingår *begreppet logaritm*. Innehållet avser främst logaritmer med basen tio, men det kan finnas pedagogiska vinster med att även ta upp andra baser. I matematik 3b och 3c ingår *naturlig logaritm*.

I 2c ingår *motivering och hantering av räkneregler för logaritmer* medan motsvarande innehåll i 2b är avgränsat till *i samband med lösning av exponentialekvationer*. I praktiken betyder det att räkneregler för logaritmer i matematik 2b har en mer pragmatisk inriktning, och att vissa räkneregler inte behöver tas upp.

Logaritmer nämns inte i a-spårets kurser. Lösning av exponentialekvationer tas upp i matematik 2a, men då med digitala metoder.

Absolutbelopp

I matematik 1c ingår *beräkning av absolutbelopp* av vektorer (i kunskapsområdet Trigonometri och vektorer). Detta har tydliga beröringspunkter med *beräkning av […] absolutbelopp* av komplexa tal i matematik 4. Absolutbelopp för vektorer kallas också ofta *längd* eller *belopp* av vektorer.

I matematik 3c ingår *begreppet absolutbelopp*, vilket avser absolutbelopp av reella tal. Liksom andra begrepp kan de omsättas genom det centrala innehållet *problemlösning som omfattar begrepp och metoder i kursen*, vilket exempelvis kan omfatta att lösa ekvationer eller olikheter där absolutbelopp ingår.

Funktionstyper och relaterade begrepp i matematikkurserna

Funktioner ingår i samtliga matematikkurser på gymnasial nivå, med möjligt undantag för specialiseringskursen där innehållet kan väljas mer fritt. Tabellen nedan ger en överblick av i vilka kurser funktionstyper och några relaterade begrepp introduceras. Eventuella kommentarer till respektive funktionstyp finns under separata rubriker.

Kurs nr	A-spåret	B-spåret	C-spåret
1	Grunder i funktioner Linjära funktioner Exponentialfunktioner	Grunder i funktioner Linjära funktioner Räta linjens ekvation Exponentialfunktioner Potensfunktioner	Grunder i funktioner Linjära funktioner Räta linjens ekvation Exponentialfunktioner Potensfunktioner Trigonometriska begrepp
2	Räta linjens ekvation Potensfunktioner Andragradsfunktioner	Andragradsfunktioner	Andragradsfunktioner
3		Polynom Derivata I Integraler I	Polynom Derivata I Integraler I Trigonometriska funktioner I

4			Derivata II Integraler II Funktioner, fördjupning Trigonometriska funktioner II
5			Differentialekvationer

I ämnesplanen nämns funktionstyper och ett par relaterade begrepp på tre olika sätt.

1. Explicit nämnda egenskaper – till exempel *begreppet andragradsfunktion och egenskaper hos andragradsfunktioner, inklusive symmetrilinje, extrempunkt och nollställen*. Denna utförliga beskrivning av egenskaper används när funktionstypen har många egenskaper och vissa av dessa bedömts särskilt angelägna att ta upp i undervisningen.
2. Implicit nämnda egenskaper – till exempel *begreppet linjär funktion och egenskaper hos linjära funktioner*. Detta används när funktionstypen har tämligen få egenskaper och det inte bedömts råda tveksamheter om vilka egenskaper som bör tas upp.
3. Egenskaper utelämnade – till exempel *begreppet potensfunktion*. Denna korta formulering används när funktionstypen saknar egenskaper som bedömts angelägna att ta upp på gymnasial nivå (utöver de mest basala egenskaperna, såsom formen för funktionsuttryck).

Grunder i funktioner

I grundskolans matematik nämns funktion som begrepp och även innehåll som koordinatsystem, funktionsgrafer, värdetabeller och funktionsuttryck. Matematik 1-kurserna bygger vidare på och repeterar delar av detta.

- *Definitionsmängd och värdemängd* (1b och 1c) ger grunden till en mer formell bild av funktionsbegreppet.
- *Representationer av funktioner i form av ord, funktionsuttryck, tabeller och grafer* (1a, 1b och 1c) är i stora delar repetition av innehållet representation av *funktioner i form av grafer, tabeller och funktionsuttryck* från grundskolans årskurs 7–9.
- *Digitala metoder för att skapa funktionsgrafer* (1a, 1b och 1c) kan vara ett nytt innehåll för eleven, även om funktionsgrafer nämns i grundskolans centrala innehåll.
- *Metoder för att bestämma funktionsvärden* (1a, 1b och 1c) kan exempelvis vara algebraiska eller grafiska, och är i många delar repetition av innehåll från grundskolan. Typfallet för att bestämma funktionsvärden är troligtvis att utifrån ett givet funktionsuttryck beräkna funktionens värde för olika *x*-värden, men det kan exempelvis också innebära att läsa funktionsvärden ur

tabeller eller att göra uppskattningar baserat på grafer. Det är rimligt att skrivsättet $f(x)$ används.

- *Grafiska metoder för att lösa ekvationer av typen f(x) = a* (matematik 1a) betyder i praktiken att eleven i grafer ska kunna läsa ut när en funktion har ett givet värde. Formuleringen är inte är begränsad till särskilda funktionstyper.
- *Digitala och grafiska metoder för att lösa ekvationer av typen f(x) = a* (1b och 1c) ställer utöver punkten ovan också i praktiken krav på att eleven kan använda digitala verktyg för att lösa ekvationer. Det kan också tilläggas att ekvationer av typen $f(x) = g(x)$ relativt enkelt kan överföras till formen $f(x) = a$. Även om det förra inte nämns explicit i centralt innehåll skulle det kunna vara ett sätt att fördjupa innehållet.

Linjära funktioner och räta linjens ekvation

Begreppet linjär funktion och egenskaper hos linjära funktioner ingår i samtliga matematik 1-kurser. Med linjära funktioner avses funktioner som kan skrivas på formen $f(x) = ax + b$ (medan ordet inom högskolematematik vanligtvis har en annan betydelse). Riktningskoefficient och skärning med y-axeln är två av de mest framträdande egenskaperna hos linjära funktioner.

Linjära funktioner har många beröringspunkter med *räta linjens ekvation* samt *metoder för att bestämma linjära funktioner*, som även det ingår i kurs 1 för b- och c-spåret men i kurs 2 för a-spåret. I grundskolans årskurs 7–9 ingår *räta linjens ekvation och begreppet förändringstakt* samt *användning av räta linjen för att beskriva samband*.

Det centrala innehållet föreskriver inte att räta linjens ekvation ska skrivas på någon särskild form, och det kan vara värdefullt att elever får se att det finns olika sätt att skriva ekvationer för räta linjer, såsom allmän form och k-form. Även parameterform kan vara ett sätt att fördjupa förståelsen för räta linjer.

Liksom för linjära funktioner är ändringstakt eller lutning en framträdande egenskap även för räta linjer, vilket gör att undervisningen kan ta upp villkor för att två linjer är parallella. (Angående villkor för vinkelräta linjer, se rubriken ”Grundläggande logik och klassiska satser”.)

Ett vanligt fall för att bestämma räta linjer är att hitta den linje som går genom två givna punkter. Att hitta riktningskoefficienten för en sådan linje spelar en viktig roll i matematik 3b och 3c när derivata introduceras.

Både räta linjens ekvation och linjära funktioner har tydliga beröringspunkter med linjära ekvationssystem, som ingår i samtliga matematik 2-kurser.

Exponentialfunktioner

I samtliga matematik 1-kurser ingår *begreppet exponentialfunktion och egenskaper hos exponentialfunktioner, inklusive skillnader och likheter med linjära funktioner*. Den här funktionstypen är mer komplex än linjära funktioner, och viktiga verktyg för att göra beräkningar på funktionerna (framför allt logaritmer) saknas i kursen. Funktionstypen ingår ändå i den enda matematikkurs som är obligatorisk på alla program, baserat på att exponentiella förlopp förekommer i många sammanhang som är viktiga för samhället och människan.

En framträdande egenskap för exponentialfunktioner är att de växer eller avtar med en konstant andel, vilket också kan uttryckas som att värdet fördubblas eller halveras med jämna mellanrum.

Vid hantering av exponentialfunktioner är förändringsfaktor ett centralt begrepp. Förändringsfaktor ingår i samtliga matematik 1-kurser och nämns även i centralt innehåll för grundskolans årskurs 7–9.

Skillnader och likheter med linjära funktioner nämns explicit för att synliggöra viktiga skillnader mellan två vanliga typer av samband.

Potensfunktioner

I matematik 1b, 1c och 2a ingår *begreppet potensfunktion*. Detta avser framför allt potensfunktioner där exponenten är ett heltal (inklusive negativa heltal), men även exponenter som inte är heltal kan förekomma exempelvis i samband med potensekvationer.

Polynom

I matematik 3b och 3c ingår *begreppet polynom och egenskaper hos polynomfunktioner* samt *metoder för att lösa enklare polynomekvationer.*

Enklare polynomekvationer kan exempelvis avse ekvationer där en (enkel) variabelsubstitution kan reducera en fjärdegradsekvation till en andragradsekvation, eller där nollproduktsmetoden kan användas för att (enkelt) reducera en ekvation av högre ordning till ekvationer som eleven kan lösa för hand. I matematik 3-kurserna är det också rimligt att eleverna får lösa högre ordningens polynomekvationer med digitala verktyg.

I matematik 4 ingår *metoder för att faktorisera polynom, användning av faktorsatsen för att lösa polynomekvationer* och *metoder för att bestämma även komplexa lösningar till […] polynomekvationer.* Detta ger eleven fler verktyg för att lösa ekvationer av högre ordning utan digitala verktyg, även om det i regel kräver att polynomet har ett nollställe som är lätt att hitta.

Ämnesplanen föreskriver inte vilken metod som ska används för att faktorisera polynom.

I regel avses polynom med reella koefficienter – inte komplexa.

Derivata

I matematik 3b och 3c introduceras derivata bland annat genom *begreppet gränsvärde* och *begreppen sekant, tangent, förändringshastighet, ändringskvot och derivata för en funktion.*

Innehållet *grafiska och digitala metoder för att derivera funktioner* innebär att eleverna ska få möta sätt att uppskatta derivata genom att dra tangenter till kurvor, men också att med hjälp av digitala verktyg kunna bestämma derivatan för en funktion i en viss punkt med godtycklig noggrannhet. Formuleringen är inte begränsad till särskilda funktionstyper.

Villkor för deriverbarhet omfattar exempelvis att funktioner ska vara kontinuerliga och att höger- och vänsterderivata ska vara lika.

Med innehållet *motivering och hantering av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av dessa* får eleverna verktyg för att för hand derivera flera vanliga funktionstyper, inklusive polynomfunktioner.

I matematik 3b och 3c ingår också *begreppet andraderivata* och *metoder för att lösa extremvärdesproblem*. Två vanliga metoder för att lösa extremvärdesproblem är att söka nollställen för derivatan och sedan klassificera extrempunkter med hjälp av andraderivata eller teckenstudium. Direkt användning av digitala verktyg kan vara ett bra komplement till manuella metoder.

I matematik 4 ingår *motivering och hantering av deriveringsregler för logaritmfunktioner, sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner*. Detta ger eleven fördjupad förståelse för derivata som begrepp, och fler verktyg för att hantera derivata utan digitala verktyg.

Integraler

I matematik 3b och 3c introduceras integraler genom *begreppen primitiv funktion och bestämd integral* samt *sambandet mellan primitiv funktion och derivata*. Innehållet *grafiska och digitala metoder för att bestämma integraler* innebär att eleverna ska få möta sätt att uppskatta integraler genom att beräkna yta under kurvor, men också att med hjälp av digitala verktyg kunna bestämma integraler med godtycklig noggrannhet. Formuleringen är inte begränsad till särskilda funktionstyper.

Med innehållet *motivering och hantering av metoder för att bestämma integraler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av dessa* får eleverna verktyg för att för hand hitta primitiva funktioner och integrera flera vanliga funktionstyper, inklusive polynomfunktioner. Observera dock att primitiv funktion för $1/x$ behandlas i matematik 4, där *motivering och hantering av deriveringsregler för logaritmfunktioner* ingår.

I matematik 3b och 3c ingår *formulering och beräkning av integraler i enkla situationer*, vilket fördjupas i matematik 4 med innehållet *användning av integraler i mer komplexa sammanhang, till exempel täthetsfunktioner, sannolikhetsfördelning, rotationsvolymer och beräkning av storheter.* Skillnaden mellan de två innehållspunkterna består framför allt i den mängd tolkning som krävs för att ställa upp integraler eller förstå vad integralers värden motsvarar. Det handlar alltså inte om hur komplexa beräkningar integralerna medför.

Differentialekvationer

I matematik 5 introduceras differentialekvationer. I kursen ingår bland annat *metoder för att lösa enklare linjära differentialekvationer av första och andra* *ordningen för hand*. Med *enklare* avses i det här sammanhanget differentialekvationer där en partikulärlösning faller väl inom ramarna för de funktionstyper som hanteras på gymnasial nivå.

Komplexa tal

Komplexa tal introduceras i matematik 4.

Representation av komplexa tal i […] polär form avser här främst formen $r(\cos(v) + i\sin(v))$, men även $re^{i\theta}$ är en polär form.

Metoder för att bestämma även komplexa lösningar till […] potensekvationer innebär att eleven kommer att möta de Moivres formel eller metoder som är likvärdiga med denna. Ämnesplanen föreskriver inte att eleverna känner till just denna formel.

Trigonometri/Trigonometri och vektorer

Trigonometri introduceras i matematik 1c.

Innehållet *metoder för att beräkna sträckor och vinklar i koordinatsystem och i rätvinkliga trianglar* har beröringar med *representationer av vektorer i koordinatsystem och skrivna i koordinatform*, där trigonometri exempelvis kan användas för att bestämma x- och y-koordinaten för en vektor som utgår från origo och har en viss längd och vinkel mot x-axeln.

I samband med trigonometriska arcusfunktioner nämner det centrala innehållet också *invers funktion*. Avsikten med detta är att eleverna ska få möta invers funktion som begrepp utan att det ska kräva för stort djup eller ta alltför stort utrymme i undervisningen.

I matematik 3c fördjupas trigonometrin genom *bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen*. I matematik 3c ingår också *definition av trigonometriska begrepp utifrån enhetscirkeln*. Det är också möjligt att definiera de trigonometriska begreppen utifrån enhetscirkeln redan i matematik 1c.

I matematik 4 fördjupas trigonometrin ytterligare på flera sätt. Dels genom *hantering av trigonometriska uttryck*, och omsättning av detta i *bevis och hantering av trigonometriska identiteter, inklusive trigonometriska ettan och additionsformler*, dels i *egenskaper hos trigonometriska funktioner, inklusive period, amplitud och fasförskjutning* samt *metoder för att bestämma trigonometriska funktioner* och *metoder för att lösa trigonometriska ekvationer*. I kursen ingår också derivering och integrering av trigonometriska funktioner, vilket i sin tur föranleder radianer som enhet för att ange vinklar.

Statistik/Sannolikhet och statistik

Sannolikheter i flera steg

I samtliga matematik 1-kurser ingår *begreppen oberoende och beroende händelse samt komplementhändelse* och *metoder för att beräkna sannolikheter i flera steg, inklusive exempel från spel, risk- och säkerhetsbedömningar*. Innehållet bygger bland annat vidare på grundskolans innehåll *sannolikhet och metoder för att beräkna sannolikhet i olika situationer* samt *bedömningar av risker och chanser utifrån datorsimuleringar och statistiskt material*. Progressionen från grundskolan ligger i att det just är sannolikheter i *flera steg* som beräknas, och i de fördjupande begrepp som hänger samman med detta.

Det centrala innehållet anger att undervisningen ska omfatta exempel från spel samt från risk- och säkerhetsbedömningar. Detta motiveras bland annat av rapporter om att förhållandevis många unga fastnar i osunt spelande om pengar.

Begreppet index

I matematik 1b ingår *begreppet index*. Detta avser snarare tolkning och användning av vanliga indexmått (som konsumentprisindex eller börsindex), än att exempelvis fördjupa sig i hur komplexa nyckelmått är uppbyggda.

I matematik 1a finns *indexmått* med som ett exempel på begrepp som kan vara relevant för karaktärsämnen och yrkesliv. Detta skulle kunna innebära grundläggande användning av indexmått, likt innehållet i matematik 1b, men också exempelvis att förstå och använda index över försäljning i en butik eller en bransch, eller välmående hos personal.

Begreppet index har kopplingar till både förändringsfaktor och procenträkning, som ingår i grundskolans matematik. *Förändringsfaktor* och *beräkning av förändringar i flera steg* ingår även i samtliga matematik 1-kurser.

Statistik i samhälle, yrkesliv och vetenskap

I matematik 1-kurserna ingår *exempel på hur några statistiska begrepp används i samhälle och [yrkesliv/inom vetenskap], inklusive signifikans, korrelation, kausalitet, urvalsmetoder och felkällor*.

Undervisningen ska ta upp exempel på hur begreppen faktiskt används, snarare än att fördjupa sig i själva begreppen. Detta eftersom många av de relevanta begreppen är så pass avancerade att en djupare förståelse av matematiken bakom dem inte är rimlig på gymnasial nivå. Samtidigt spelar begreppen en så pass viktig roll i samhälle, yrkesliv och vetenskap att det är angeläget att elever som läser på gymnasial nivå ska känna till dem på en orienterande nivå.

Signifikans

I matematik 1-kurserna är varken beräkningar på signifikansbegreppet eller fördjupning i olika aspekter av signifikansbegreppet (se nedan) obligatoriskt innehåll. Däremot ingår exempel på hur signifikans används. I praktiken skulle det kunna omfatta att peka på uttryck som ”signifikanta resultat” eller ”statistiskt säkerställda skillnader” i nyheter, lyfta att det finns metoder för att räkna på de mätosäkerheter som urvalsundersökningar ger upphov till (utan att gå igenom metoderna), att diskutera vad felmarginaler innebär för hur statistik presenteras, och diskutera olika sätt som ”statistiskt säkerställd” och ”inte statistiskt säkerställd” kan misstolkas på. Man skulle också kunna resonera om hur storleken på ett urval påverkar möjligheten att få signifikanta resultat, liksom varför större underliggande skillnader lättare ger signifikanta resultat.

Några andra uppslag för exempel man kan ta upp är hur signifikans används inom läkemedelsstudier, enkätundersökningar och bullermätningar.

Begreppet *signifikans* förtjänar en närmare beskrivning, eftersom det används i många olika sammanhang och på delvis olika sätt. Nedan ges en bakgrund till begreppet.

Statistisk signifikans betecknar i grunden hur väl data från ett urval stämmer överens med en så kallad nollhypotes – vanligtvis att det inte skett några ändringar i hela populationen jämfört med ett givet utgångsläge. Detta mått brukar betecknas p och beskriver, något förenklat, sannolikheten att en observerad förändring uppstått slumpmässigt på grund av urvalet, trots att inga ändringar skett i populationen.

I vetenskapliga sammanhang pratar man ofta om att resultat är *statistiskt signifikanta* om p-värdet ligger under ett visst på förhand givet värde. Vilket tröskelvärde som används beror på sammanhanget, men 0,05, 0,01 eller 0,001 är vanliga. Att ett resultat är statistiskt signifikant betyder inte med säkerhet att nollhypotesen kan förkastas – det anger bara att det är förhållandevis troligt att den inte stämmer. Och omvänt: Att ett resultat *inte* är statistiskt signifikant betyder inte att man visat att nollhypotesen stämmer – bara att man inte har starka skäl att förkasta den.

Statistisk signifikans kan också användas för att ange felmarginaler eller konfidensintervall för mätvärden. Något förenklat jämför man då inte mot en nollhypotes, utan i stället mot många olika tänkbara värden i hela populationen. Gränserna för konfidensintervallet dras där det observerade värdet ger en statistiskt signifikant skillnad. Resultatet blir ett intervall, där alla värden stämmer förhållandevis väl med det observerade värdet.

Lägesmått och spridningsmått

Samtliga matematik 2-kurser omfattar *lägesmått och spridningsmått, inklusive percentiler och standardavvikelse, samt digitala metoder för att bestämma dessa.*

Ämnesplanen föreskriver inte att eleverna ska kunna göra beräkningar på dessa läges- eller spridningsmått för hand. Detta motiveras med att måtten i regel endast är meningsfulla när mätvärdena är så många att manuella beräkningar är orimliga.

Innehållet bygger vidare på *lägesmått och spridningsmått samt hur de används för bedömning av resultat vid statistiska undersökningar* som ingår i grundskolans årskurs 7–9, samt *lägesmåtten medelvärde, typvärde och median samt hur de används i statistiska undersökningar* som ingår i årskurs 4–6.

Normalfördelning

Matematik 2a omfattar *metoder för att göra enklare beräkningar på normalfördelat material*, medan matematik 2b och 2c omfattar *digitala metoder för att göra beräkningar på normalfördelat material.*

Med enklare beräkningar i matematik 2a avses exempelvis beräkningar som utgår från fördelning baserat på hela standardavvikelser från medelvärde, eller andra enklare samband som utgår från normalfördelning.

Att matematik 2b och 2c omfattar digitala verktyg för dessa beräkningar innebär att det kan ställas högre krav på hur normalfördelat material behandlas. Utöver sådant som behandlas i matematik 2a kan beräkningar till exempel omfatta att bestämma hur stor del av en normalfördelning som ligger i ett visst intervall, eller hur långt från medelvärdet man måste gå för att fånga 10 procent av fördelningen. Det finns inga krav på att eleverna ska förstå teorin bakom normalfördelning, utan bara att de ska kunna använda digitala verktyg som gör dessa beräkningar.

Regressionsanalys

I matematik 2b och 2c ingår *begreppen regressionsanalys och korrelationskoefficient* samt *digitala metoder för regressionsanalys*. Den vanligaste formen av regressionsanalys är linjär regression, men det kan vara värdefullt att elever även får möta andra typer av regressionsanalys.

Logik/Logik och geometri/Logik och diskret matematik

Grundläggande logik och klassiska satser

I matematik 2a ingår innehållet *användning och motivering av Pythagoras sats, inklusive exempel som omfattar beräkningar i koordinatsystem.*

I matematik 2b och 2c ingår *användning och motivering av grundläggande klassiska satser i geometri om vinklar och likformighet samt Pythagoras sats, inklusive exempel som omfattar beräkningar i koordinatsystem*. Avsikten med detta innehåll är inte att eleverna ska behärska vissa givna satser, med undantag för Pythagoras sats som nämns explicit, utan snarare att de ska kunna ta till sig och använda (enklare) geometriska satser.

Utöver Pythagoras sats föreskriver ämnesplanen inte vilka satser som ska tas upp. Några tänkbara exempel är satser om grundläggande likformighet, yttervinkel-satsen, randvinkelsatsen, vinkelsumma i månghörningar, transversalsatsen, topptriangelsatsen, bisektrissatsen, kordasatsen, satser om vinkelräta linjer och kongruenssatser för trianglar.

Beräkningar i koordinatsystem kan exempelvis omfatta att beräkna avstånd i koordinatsystem med hjälp av Pythagoras sats, eller att använda andra satser för att räkna på sträckor, vinklar eller objekt som är inritade i koordinatsystem eller beskrivna med koordinater.

Att *motivering* av satser nämns i det centrala innehållet innebär att eleverna kan förväntas motivera satsers giltighet, men inte nödvändigtvis genomföra formella bevis. (Se även kommentarer till betygskriterierna som rör att föra resonemang.)

Problemlösning, verktyg och tillämpningar

Kunskapsområdet *problemlösning, verktyg och tillämpningar* samlar centralt innehåll som antingen rör övergripande användning av innehåll från andra kunskapsområden, eller som tydligt fokuserar på specifika verktyg.

Kalkylprogram

I samtliga matematik 1-kurser ingår *användning av kalkylprogram för beräkning av ränta och amortering*. Att kalkylprogram är ett obligatoriskt innehåll motiveras framför allt av hur vanliga de är för olika typer av beräkningar, både i arbets- och privatlivet. Med kalkylprogram avses program där eleverna själva kan skriva in data och ange beräkningar i celler, och inte färdiga program som används för att hantera ekonomi.

Programmering

I matematik 3b, 3c, 4 och 5 ingår *användning av programmering som verktyg vid problemlösning, databearbetning eller tillämpning av numeriska metoder*. I matematik 1c och 2c ingår det besläktade innehållet *exempel på hur programmering kan användas som verktyg vid problemlösning, databearbetning eller tillämpning av numeriska metoder*.

Anledningen till att programmering nämns i ämnesplanen är framför allt de möjligheter som programmering ger för att genomföra stora mängder beräkningar. Detta gör det möjligt att utforska och använda matematik på fler sätt än vad som är möjligt för hand eller med enklare digitala verktyg och färdiga applikationer.

Att matematik 1c och 2c endast omfattar *exempel på* programmeringens användning innebär att eleverna ska få möta exempel på situationer där programmering är användbar i matematiken. Det behöver inte nödvändigtvis innebära att de själva ska programmera eller ens använda färdiga program. I matematik 3–5 är kraven större på att eleverna själva ska använda programmering.

Tre olika användningsområden nämns för programmering. Vilket eller vilka som passar bäst beror bland annat på det övriga innehållet i kursen. Läraren avgör vilket eller vilka av dessa områden som ska tas upp.

- *Problemlösning* kan exempelvis omfatta programmering för att beräkna/uppskatta sannolikheter genom simuleringar, att låta en dator göra en stor mängd gissningar eller testa alla möjliga fall, att testa många olika fall för att försöka hitta mönster, undersöka effekter av slumpvisa variationer, och andra sätt för att utforska eller lösa matematiska problem.
- *Databearbetning* kan exempelvis omfatta att beräkna ovanliga statistiska mått (där man saknar eller inte känner till verktyg som gör beräkningarna), att ta bort dubbletter eller felaktiga värden i data enligt komplexa villkor, att sortera ut vissa data, att utnyttja samband mellan olika datatabeller, eller slå upp data baserat på olika villkor.
- *Tillämpning av numeriska metoder* kan exempelvis omfatta att skriva program som kan beräkna/approximera derivata och integraler, lösa ekvationer med viss noggrannhet eller rita riktningsfält för differentialekvationer. Det behöver inte handla om etablerade numeriska metoder, utan kan också handla om numeriska metoder som skapats för en särskild situation.

Ämnesplanen föreskriver inte att vissa programspråk eller programmeringsmiljöer ska användas.

Även kalkylblad kan användas för iterativa eller villkorsstyrda beräkningar, vilket är det som ofta används för att känneteckna programmering. Att låta elever använda iterativa eller villkorsstyrda beräkningar i kalkylblad för att arbeta med problemlösning, databearbetning eller tillämpning av numeriska metoder kan vara särskilt användbart om eleverna saknar relevanta kunskaper i att skriva kod. Samtidigt innehåller kalkylblad många begränsningar som konventionell programmering inte gör. I den mån eleverna behärskar att skriva kod är det därför lämpligt att de får använda denna kunskap för att fördjupa sitt matematiska kunnande.

Kommentarer till ämnesplanens betygskriterier

Betygskriteriernas uppgift är att fungera som måttstock för bedömning av elevens kunskaper i den aktuella kursen. Betygskriterierna behöver läsas och tolkas i relation till syftet, det centrala innehållet och den undervisning som har bedrivits.

Läraren använder betygskriterierna som ett verktyg för att bedöma elevens kunskaper vid betygssättningen. Betygskriterierna är alltså inte mål för undervisningen och är inte avsedda som grund för planering eller genomförande av undervisning. Inför betygsättningen behöver läraren samla in ett brett och varierat bedömningsunderlag. Det innebär att läraren då och då behöver kontrollera sitt bedömningsunderlag mot betygskriterierna för att säkerställa att det kommer att finnas tillräckligt med underlag för en allsidig utvärdering av elevens kunskaper vid slutet av kursen.

För att betygskriterierna ska fungera som ett användbart verktyg för en sammantagen bedömning vid betygssättning är de formulerade på ett övergripande sätt. På så sätt ger de läraren möjligheter att göra en allsidig bedömning utan att enstaka detaljer får alltför stor betydelse för elevens betyg. Det underlättar också att vid betygsättning utgå från ett brett och varierat underlag som lämnat utrymme för eleven att visa sina kunskaper på olika sätt.

Lärarens uppgift är att sätta det betyg som sammantaget motsvarar elevens kunskaper genom att hitta den bästa överensstämmelsen mellan betygsunderlaget och betygskriterierna. En sammantagen bedömning handlar om att läraren analyserar både hur elevens kunskaper förhåller sig till betygskriteriernas delar och vilket betyg som helheten indikerar. För att få en bild av den sammantagna nivån på elevens kunskaper är tyngdpunkterna i ämnet vägledande. Läs mer om sammantagen bedömning vid betygssättning i Kommentarer till Skolverkets allmänna råd om betyg och prövning.

Betygskriterierna i ämnesplanen i matematik finns i två olika varianter. Den ena används i matematik 1a, 1b, 1c, 2a, 2b och 2c. Den andra används i matematik 3b, 3c, 4, 5 och specialisering. De två varianterna är mycket lika, och de senare kursernas betygskriterier omfattar de tidigare kursernas betygskriterier med några tillägg.

Anledningen till att betygskriterierna är så lika över samtliga kurser är att progressionen i ämnet framför allt bärs av det centrala innehållet.

Övergripande kommentarer till betygskriterierna

En bredd av det centrala innehållet

Betygskriterierna markerar på tre ställen att eleven hanterar en bredd av det centrala innehållet i kursen.

Problemlösning i kursens olika områden

Betygskriterierna nämner att eleven löser matematiska problem *inom kursens olika områden*. Med ett område avses ett större sjok av innehåll som läraren valt att undervisa som en helhet, vilket exempelvis skulle kunna vara sannolikheter (matematik 1a, 1b och 1c) eller andragradsfunktioner och -ekvationer (matematik 2b och 2c). Det är alltså inte liktydigt med de kunskapsområden som är rubriker i det centrala innehållet. Formuleringen tillåter att elevens förmåga att lösa problem sviktar inom mindre delar av det centrala innehållet – formuleringen gäller områden, inte varje punkt i det centrala innehållet.

Bredd i begrepp och procedurer

Betygskriterierna nämner även att eleven använder och beskriver *ett omfattande antal* begrepp. Detta betyder att elever inte måste kunna använda och beskriva samtliga begrepp i kursen för att betygskriterierna för betygen A och C ska vara uppfyllda, men det ska inte heller finnas betydande luckor.

För betyget E är beskrivningen begränsad till att eleven ska kunna använda och beskriva *grundläggande* begrepp. Det betyder att det finns större utrymme för begrepp som eleven inte beskriver och använder, men fortfarande avses en viss bredd eftersom de grundläggande begreppen ska omfattas. (Se rubrik nedan angående ordet *grundläggande*.)

Även för procedurer nämns att eleven hanterar *ett omfattande antal* respektive *grundläggande* procedurer. Betydelsen av detta överensstämmer med formuleringen som rör begrepp.

Värdeordet *grundläggande*

Värdeordet *grundläggande* används för att beskriva de begrepp och procedurer eleven ska använda och beskriva, respektive hantera, för betyget E.

Avsikten med formuleringen är att läraren vid bedömning av vad som är grundläggande utgår från

- vilka delar av det centrala innehållet som har mest betydelse i vardagsliv samt i kommande yrkesliv eller högskolestudier,
- vilka delar av det centrala innehållet som är särskilt viktiga för fortsatt utveckling av elevens matematiska kunnande,
- vilka delar av det centrala innehållet som är viktigast för att ge förutsättningar att läsa eventuella fortsatta matematikkurser på gymnasial nivå, och

- vilka delar av det centrala innehållet som getts särskild tyngd i undervisningen.

Det är läraren som avgör vad av kursens innehåll som anses vara grundläggande. Detta beror bland annat på att normerande listor med vad som klassas som grundläggande skulle få en för stark effekt på undervisningen – inte minst vad gäller sådant som *inte* nämns i listorna. Sådana listor skulle också skapa skarpare tröskeleffekter för betyget E än vad som är önskvärt. Det finns också skäl för att olika innehåll betraktas som grundläggande även inom samma kurs, exempelvis baserat på vilka program elever läser eller vilka mål eleven har med studier på kommunal vuxenutbildning.

Det kan vara berikande, och öka likvärdigheten i bedömning, med kollegiala diskussioner om vad som anses grundläggande.

Ordet *grundläggande* används på delvis andra sätt i betygskriterier för vissa andra ämnen. Ordet förekommer exempelvis i betygskriterierna för matematik i grundskolan, och har då delvis annan innebörd.

Förmåga att använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp

Eleven beskriver ***grundläggande/ett omfattande antal/ett omfattande antal*** *begrepp och samband mellan begrepp samt använder dem med … säkerhet.*

För betygen C och A finns nämns att eleven hanterar *ett omfattande antal* begrepp. Termen är vald för att dels signalera att eleven ska hantera begrepp från så gott som hela det centrala innehållet, dels för att tillåta svagare prestationer rörande ett fåtal begrepp.

Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg

Eleven hanterar ***grundläggande/ett omfattande antal/ett omfattande antal*** *procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär med* ***tillfredsställande/god/mycket god*** *säkerhet, både utan och med digitala verktyg. [Eleven hanterar avancerade uttryck med* ***god/mycket god*** *säkerhet.]*[2]

I betygskriterierna fokuseras säkerheten i hur procedurer hanteras – inte resultatet. I många lägen kommer resultatet (såsom ett uträknat svar) vara det som i praktiken kan bedömas, men i vissa lägen är det möjligt – och meningsfullt – att bedöma själva hanteringen av proceduren, och inte bara resultatet av den.

Betygen C och A beskriver att hantera en bredd av procedurer enligt samma principer som beskrivs för begrepp.

[2] Formuleringen finns endast med för betygen C och A i matematik 3b, 3c och senare kurser.

I matematik 3-kurserna och senare tillkommer formuleringar om att eleven *hanterar avancerade uttryck med* ***god/mycket god*** *säkerhet* för betygen C och A.

Utan och med digitala verktyg

I procedurmålet står *utan och med verktyg,* medan det i betygskriterierna står *utan och med digitala verktyg*. Skillnaden motiveras med att de digitala verktygen spelar en särskild roll i matematiskt hantverk och dessutom är de i särklass vanligaste verktygen.

I motsvarande delar i grundskolans betygskriterier saknas formuleringar om verktyg. Denna skillnad är medveten, och grundar sig i att verktygen spelar en viktigare roll på gymnasial nivå men också att grundskolans betygskriterier omfattar att välja metoder.

Förmåga att analysera och lösa problem med hjälp av matematik

Med *problem* avses inom matematikdidaktik vanligtvis uppgifter eller problemsituationer där det inte finns någon färdig lösningsmetod. I betygskriterierna avser problemuppgift i stället en uppgift eller situation – skriftlig eller annan – där man kan *förvänta sig* att färdiga lösningsmetoder saknas för många elever.[3] Detta medför att det som framstår som ett problem för en elev inte behöver vara det för en annan, och att man snarare kan förvänta sig att en elev med kunskaper motsvarande betyget A inte upplever problemuppgifter motsvarande betyget E som just problem – utan ser dem som uppgifter där lösningsmetoder är uppenbara.

Eleven löser ***enkla/relativt komplexa/komplexa*** *problem inom kursens olika områden. Eleven bedömer resultatens rimlighet.*

Progressionen i denna del av betygskriterierna bärs av hur komplexa problem eleven kan lösa. Komplexiteten i matematiska problemen är svår att beskriva i få ord och på ett sätt som fungerar bra i betygskriterier, vilket är bakgrunden till den korta och övergripande formuleringen i betygskriterierna. Avsikten med formuleringen är att den ska kunna rymma en stegrande komplexitet som kan avspeglas på en rad olika sätt, till exempel:

- mer avancerade tolkningar, fler tolkningar eller tolkningar i fler steg,
- mer avancerade beräkningar, mer omfattande beräkningar eller beräkningar i fler steg,
- att problemet berör fler eller mer avancerade begrepp,
- kontexter som är mer obekanta för eleven,

[3] Denna skillnad mot ordets användning i matematikdidaktik grundar sig i att det på flera sätt vore problematiskt att ha betygskriterier som utgår från hur långt utanför sitt rutinkunnande elever kan röra sig.

- högre abstraktionsnivå, eller samband och strukturer i problemet som är mer oväntade eller svårupptäckta för eleven,
- att problemets innehåll eller lösningsmetoder spänner över olika delar av kursinnehåll, eller
- mindre ledning i hur problemet kan analyseras eller lösas.

De delar av betygskriterierna som rör problemlösningsmålet säger därutöver att eleven ska lösa problem *inom kursens olika områden*. Detta markerar att eleven visar en bredd av kunskaper i det centrala innehållet. Formuleringen är vald för att ändå tillåta att elevens förmåga att lösa problem sviktar inom mindre delar av det centrala innehållet – formuleringen gäller områden, inte varje punkt i det centrala innehållet. Termen *område* avser större undervisningsområden som läraren valt att dela in undervisningen i, och den är inte liktydig med de kunskapsområden som det centrala innehållet är indelat i.

Denna del av betygskriterierna avslutas med att eleven *bedömer resultatens rimlighet*. Med det avses att eleven i regel upptäcker orimligheter, även om enstaka undantag kan förekomma.

Förmåga att tillämpa, formulera och utvärdera matematiska modeller

Matematiska modeller nämns i betygskriterierna för årskurs 9 i grundskolan, och modellering finns på gymnasial nivå som ett eget mål och med egna formuleringar i betygskriterierna. Även om modellering har starka beröringspunkter med problemlösning kan modellering också handla om standarduppgifter och ibland även något tredje utöver dessa – exempelvis resonerande om modeller.

Eleven tillämpar och formulerar matematiska modeller i ***enkla/relativt komplexa/komplexa*** *uppgifter [samt utvärderar matematiska modellers egenskaper och begränsningar]*[4].

Betygskriterierna nämner formulering, tillämpning och utvärdering av modeller i *enkla/relativt komplexa/komplexa uppgifter*, snarare än av enkla/avancerade modeller. Anledningen till detta är att tillämpning av mycket avancerade modeller kan vara enkelt (exempelvis med datorstöd), och även formulering av enkla matematiska modeller kan vara svårt om sammanhangen är komplexa. På liknande sätt fokuseras just *uppgiftens* komplexitet, inte exempelvis komplexiteten i en situation eller ett sammanhang. Detta beror på att situationens komplexitet inte nödvändigtvis har koppling till hur enkelt det är att formulera eller tillämpa modeller.

[4] Formuleringen finns endast med för betygen C och A i matematik 3b, 3c och senare kurser.

I matematik 3-kurserna och senare tillkommer formuleringar om att eleven *utvärderar matematiska modellers egenskaper och begränsningar*. De modeller som utvärderas måste inte vara samma som de som tillämpas eller formuleras.

Förmåga att föra och följa matematiska resonemang

Eleven för ***delvis/relativt väl/väl*** *underbyggda matematiska resonemang [****genomför enkla/- bevis****][5] och följer* ***enkla/relativt avancerade/avancerade*** *matematiska resonemang.*

De delar av betygskriterierna som rör resonemang består av två delar – att *föra* resonemang och att *följa* resonemang. Att *föra* resonemang kan vara svårt att skilja från att kommunicera matematik (se nästa rubrik). Det är naturligt att delar av betygskriterierna går ihop, men en skiljelinje går mellan att använda sund logik (resonerandet) och att presentera resonemangen så att logiken blir tydlig (kommunicerandet).

Progressionen i att föra resonemang går från *delvis* till *väl underbyggda* resonemang. Den lägre änden av skalan utmärks av att resonemang inte täcker hela kedjan fram till en slutsats, eller att de innehåller vissa logiska luckor eller felaktigheter, medan den högre änden utmärks av resonemang som överlag är välgrundade, hållbara och tillräckliga. I viss mån spelar också resonemangens komplexitet in – väl underbyggda men triviala resonemang är ensamma inte ett underlag för betyget A.

Progressionen i att följa resonemang går från *enkla* till *avancerade* resonemang. Detta innebär bland annat att elever ska kunna ta till sig matematiska texter på en nivå som är rimlig för kursen. Mer avancerade resonemang kan till exempel utmärkas av mer komplext innehåll, mer formellt eller fåordigt resonemang, resonemang som är omfattande eller långa, eller som har större avstånd mellan stegen i resonemangen. Förmåga att följa resonemang kan exempelvis visa sig i elevens förmåga att bedöma giltigheten i resonemangen, eller förmåga att omsätta dem – såsom att använda matematiska satser som presenterats.

I matematik 3-kurserna och senare tillkommer att eleven *genomför enkla bevis/bevis* för betygen C och A. Bevisföring, härledning och troliggörande är en del av matematiskt resonerande, och kan följaktligen vara en del av sådant som bedöms redan i matematik 1- och 2-kurserna – men är en nödvändig del av bedömningen för matematik 3 och senare.

[5] Formuleringen finns endast med för betygen C och A i matematik 3b, 3c och senare kurser.

Förmåga att kommunicera matematik muntligt, skriftligt och i handling

*Eleven uttrycker sig med matematiska symboler och andra representationer på ett **i huvudsak fungerande/till stor del tydligt och korrekt/tydligt och korrekt** sätt.*

Kvaliteten i den här delen av betygskriterierna beskrivs av i vilken mån eleven kommunicerar *tydligt och korrekt*. Formuleringen avser en helhetsbild av elevens matematiska kommunikation, och inte att varje enskild beståndsdel ska bedömas. Detta betyder också att elevens kommunikation i alla delar och vid alla tillfällen inte måste uppfylla skrivningar i betygskriterierna – det är helhetsbilden av elevens kommunikation som står i fokus.

Den lägre änden av skalan utmärks av att det avsedda budskapet når fram, även om det kan kräva att mottagaren på förhand är insatt i sammanhangen och det kan finnas brister i hur terminologi och andra representationsformer. Med stigande kvalitet är kommunikationen allt mer självbärande, korrekt och koncis.

Formuleringen i betygskriterierna innebär att det både är elevens användning av matematiska symboler och den bredare kommunikationen som ska bedömas. Att matematiska symboler nämns explicit motiveras med att matematiken har ett skriftspråk som är särskilt viktigt för att man ska kunna uttrycka sig i ämnet och ta det till sig.

Det är värt att markera att *matematiska representationer* inte endast avser skriftlig kommunikation, utan de kan även handla om exempelvis talat språk, bilder eller gester – eller i ett mer allmänt kommunicerande av matematik i handling, så som att praktiskt visa hur en rät vinkel mäts upp och verifieras i en konstruktion. I motsvarande del i grundskolans betygskriterier används *uttrycksformer* i stället för representationer. Det finns ingen avsedd skillnad mellan dessa termer.