1. Vilken är den fjärde termen i den geometriska summan $2+2\cdot3+2\cdot3^2+\ldots$?

$2\cdot3^3$ (1/0/0)

---

2. För vilket värde på x är uttrycket $\frac{3x-21}{6-x}$ *inte* definierat?

$x=6$ (1/0/0)

---

3. Vilket av alternativen A-E visar ett polynom?

A. $\frac{4}{x^3}+4x^3$

B. $x^2+x^{2,5}$

C. $\left(2+\frac{1}{x}\right)^3$

D. $4x^3+2x^2$

E. $\frac{5x}{12x-x^2}$

D (1/0/0)

---

4. Hur många reella lösningar har ekvationen nedan?
$(x-1)(x^2-4)=0$

3 (1/0/0)

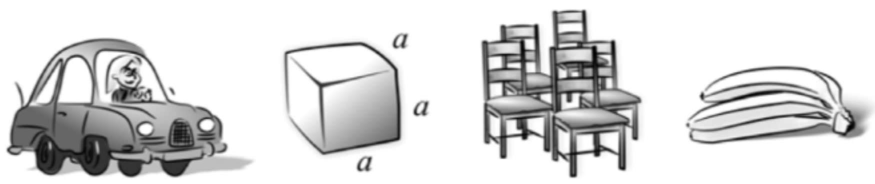
5. Derivera

a) $f(x) = 3x^4 + 6x + 10$ $12x^3 + 6$ (1/0/0)

b) $f(x) = e^x + ex$ $e^x + e$ (0/1/0)

c) $f(x) = \frac{2}{3x} + \frac{3x}{2}$ $-\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{2}$ (0/1/0)

6. Nedan ges några olika situationer som kan beskrivas med en funktion.
Vilket av alternativen A-D beskrivs bäst med en diskret funktion?



A. Bensinförbrukningen hos en bil beror av hur långt bilen körs.

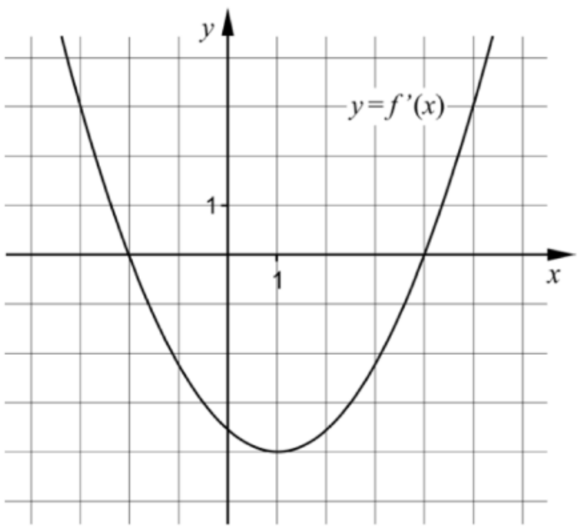
B. Volymen av en kub beror av sidans längd.

C. Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.

D. Kostnaden för bananer beror av vikten på bananerna.

C (0/1/0)

7. Figuren nedan visar grafen till derivatan f' för en tredjegradsfunktion f.



a) För vilket värde på x har grafen till f en minimipunkt?

$x = 4$ (0/1/0)

b) För vilka värden på x är f avtagande? $-2 \leq x \leq 4$ (0/2/0)

8. Ange *alla* funktioner som har egenskapen att $f(x) = f'(x)$ där $f(x) \neq 0$

$k \cdot e^x$ (0/1/1)

9. Bestäm

a) $\lim_{x \to 0} (e^x + 7)$ 8 (1/0/0)

11. Beräkna $\int_1^2 6x^2 \, dx$ algebraiskt. (2/0/0)

11.

$$\int_1^2 6x^2 dx = \left[2x^3\right]_1^2 = 2 \cdot (8-1) = 14$$

12. För funktionen f gäller att $f(x)=x^3-3x^2$
Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/0/0)

12.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 2$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ maximum

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ minimum

$f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$

Svar: Minpunkt i $(2,-4)$
Maxpunkt i $(0,0)$

13. För funktionerna f och g gäller att $f(x)=5x^2+3x$ och $g(x)=x^2+8x$

a) Bestäm det värde på x där grafen till f har lutningen 18 (2/0/0)

b) Grafen till g har en tangent i den punkt där $x=6$
Bestäm koordinaterna för tangentens skärningspunkt med x-axeln. (0/3/0)

13. a) $f'(x)=10x+3$

$f'(x)=18 \Rightarrow 10x+3=18 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

b) $g'(x)=2x+8$

$g'(6)=2\cdot 6+8=20$

Tangentens ekvation

$h-h(6)=k(x-6)$, $k=g'(6)=20$,

$h(6)=g(6)=6^2+8\cdot 6=84$

$h-84=20(x-6)$

$h(x)=20x-36$

$h(x)=0 \Rightarrow x=\frac{36}{20}=\frac{9}{5}$

Svar: Skärningspunkten är $\left(\frac{9}{5},0\right)$

14. Förenkla så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{2x-6}$ (1/0/0)

b) $\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2-32}$ (0/2/0)

14. a) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{2x-6} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{2(x-3)} = \underline{\dfrac{x+2}{2}}$

b) $\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2-32} = \dfrac{(x+4)(x+4)}{2(x^2-16)} = \dfrac{(x+4)(x+4)}{2(x+4)(x-4)} = \dfrac{x+4}{2(x-4)}$

$= \underline{\dfrac{x+4}{2x-8}}$

---

1. För polynomfunktionen f gäller att $f(x) = 3x^4 + 7x^2 + 3$

a) Vilken grad har funktionen f? 4 (1/0/0)

b) Bestäm $f'(x)$. $12x^3+14x$ (1/0/0)

---

2. Ange två olika primitiva funktioner till $f(x) = 7x + 4$

$3{,}5x^2+4x$ och $3{,}5x^2+4x+1$ (2/0/0)

---

3. Under de första sekunderna efter start kan sträckan som en bil färdas beskrivas med $s(t) = 3t + t^2$ där s är sträckan i meter och t är tiden i sekunder.

Bestäm bilens hastighet v som funktion av tiden t.

$v(t) =$ $3+2t$ (1/0/0)

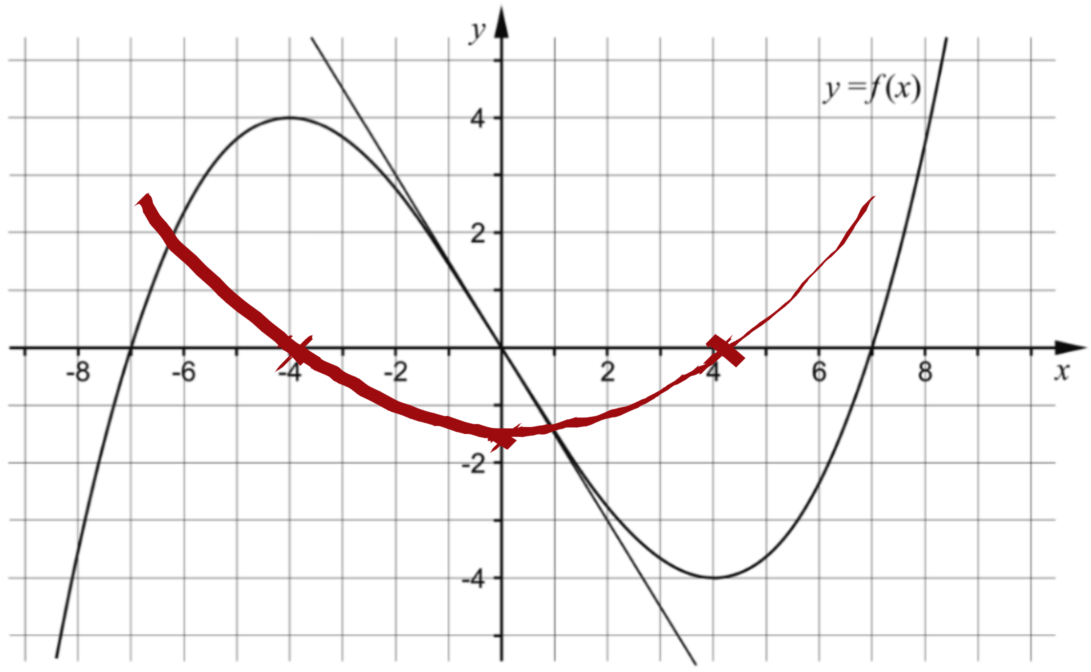
4. Lös ekvationen $(x+2)(x-3)(x+4) = 0$ $x_1=-2,\ x=3,\ x=-4$ (1/0/0)

5. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $16 + (x^3 + 4)(x^3 - 4)$ x^6 (1/0/0)

b) $\dfrac{x}{(x+4)^9} + \dfrac{4}{(x+4)^9}$ $\dfrac{1}{(x+4)^8}$ (0/1/0)

6. Figuren nedan visar grafen till en tredjegradsfunktion f och en tangent som tangerar grafen i origo.



a) Bestäm derivatans nollställen. $x = \pm 4$ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(0)$. $-3/2$ (1/0/0)

c) Skissa grafen till funktionens derivata i koordinatsystemet ovan. (0/1/1)

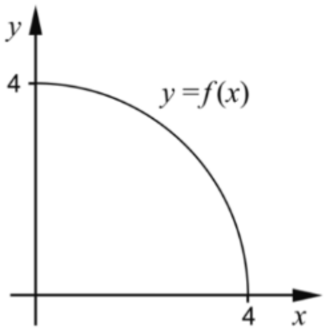
---

7. Den geometriska summan $2-2\cdot 1{,}5+2\cdot 1{,}5^2-2\cdot 1{,}5^3+\ldots-2\cdot 1{,}5^{19}$ är lika med ett av alternativen A-H. Vilket?

A. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{18}-1}{-1{,}5-1}$	B. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{19}-1}{-1{,}5-1}$	C. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{20}-1}{-1{,}5-1}$	D. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{21}-1}{-1{,}5-1}$
E. $2\cdot\frac{1{,}5^{18}-1}{1{,}5-1}$	F. $2\cdot\frac{1{,}5^{19}-1}{1{,}5-1}$	G. $2\cdot\frac{1{,}5^{20}-1}{1{,}5-1}$	H. $2\cdot\frac{1{,}5^{21}-1}{1{,}5-1}$

$a_n \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$, $n=20$ C (0/1/0)

8. Grafen till funktionen f bildar en kvartscirkel i första kvadranten.

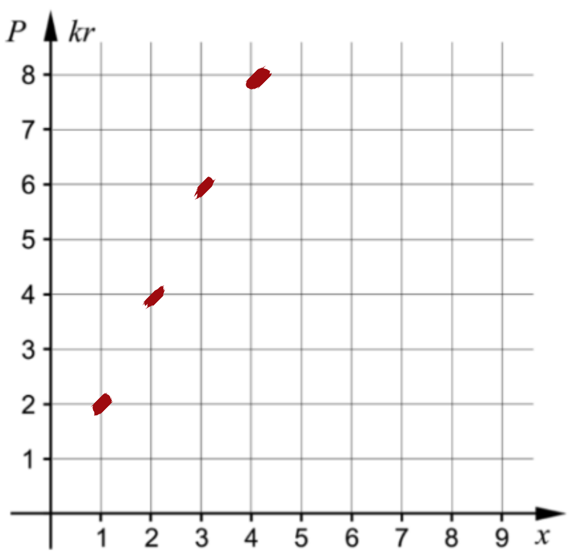


$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4^2}{4}$$

Bestäm $\int_0^4 f(x)\,dx$. Svara exakt. 4π (0/1/0)

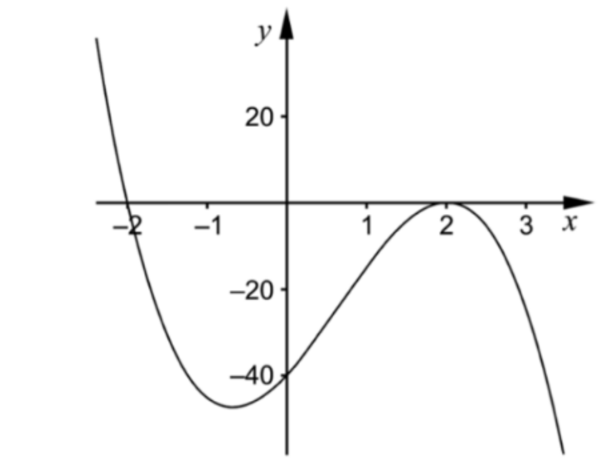
---

9. I Hagaskolans cafeteria kostar bananer 2 kr per styck. Priset P kr är en funktion av antalet bananer x. Rita in grafen till funktionen i intervallet $1 \le x \le 4$ i koordinatsystemet nedan.

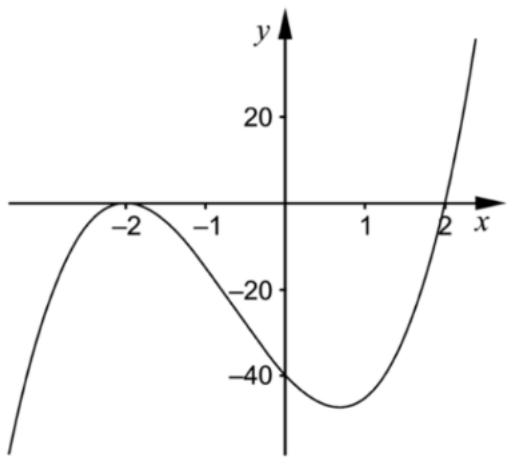


(0/1/0)

11. Figurerna A och B nedan visar graferna till två tredjegradsfunktioner.



Figur A



Figur B

a) Vilken av figurerna visar grafen till en tredjegradsfunktion f där $f'(2)=0$? Motivera ditt svar. (1/0/0)

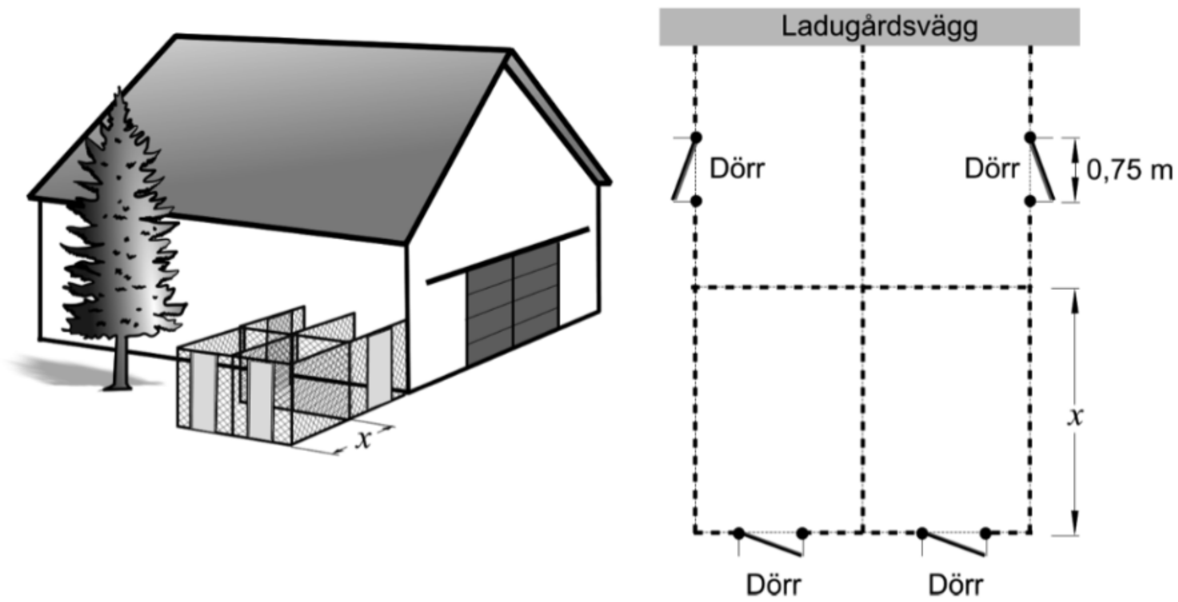
b) Vilken av figurerna visar grafen till $f(x)=5(x-2)(x+2)^2$? Motivera ditt svar. (0/1/0)

11 a) A

b) B, Grafen har en dubbelrot i $x=-2$

12. Karin ska bygga fyra rektangulära rastgårdar till sina hundar. Alla fyra rastgårdar ska ha samma mått och inhägnas med stängsel.

Karin har 45 m stängsel och fyra dörrar som hon ska använda till rastgårdarna. Två av rastgårdarna byggs mot en ladugårdsvägg. Därför behövs inte stängsel på den sida som utgörs av ladugårdsväggen. Dörrarna är 0,75 m breda, lika höga som stängslet och ska placeras enligt figuren.



Arean för var och en av rastgårdarna ges av funktionen $A(x) = 12x - 1{,}5x^2$ där A är arean i m^2 och x är längden av rastgårdens ena sida i m, se figur.

a) Bestäm med hjälp av derivata det värde på x som ger varje rastgård så stor area som möjligt. (2/0/0)

12. a) $A'(x) = 12 - 3x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 4}$

---

13. Lös ekvationen $\frac{6}{x-3} - \frac{18}{x(x-3)} = 2$ (0/3/0)

13. $6x - 18 = 2x(x-3)$

$6x - 18 = 2x^2 - 6x$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$\underline{x_{1,2} = 3}$

14. Beräkna $\int_0^4 e^{\frac{x}{2}}\,dx$. Svara exakt. (0/2/0)

14. $\int_0^4 e^{\frac{x}{2}}\,dx = \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^4 = \underline{2(e^2 - 1)}$

1. Bestäm *alla* primitiva funktioner till $f(x) = x^2$ $\frac{x^3}{3} + C$ (1/0/0)

2. Förenkla så långt som möjligt

a) $\frac{3x+24}{2x+16}$ $3/2$ (1/0/0)

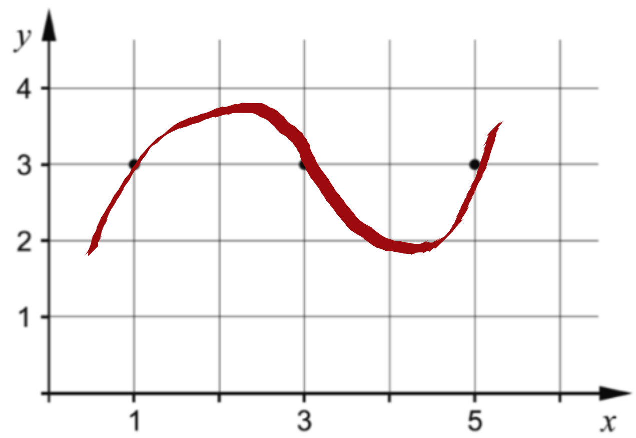
b) $x(x^8+2)+2x^9-2x$ $3x^9$ (1/0/0)

3. Hur många termer har den geometriska summan nedan?

$2+2\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}1^2+2\cdot 0{,}1^3+\ldots+2\cdot 0{,}1^{17}$ 18 (1/0/0)

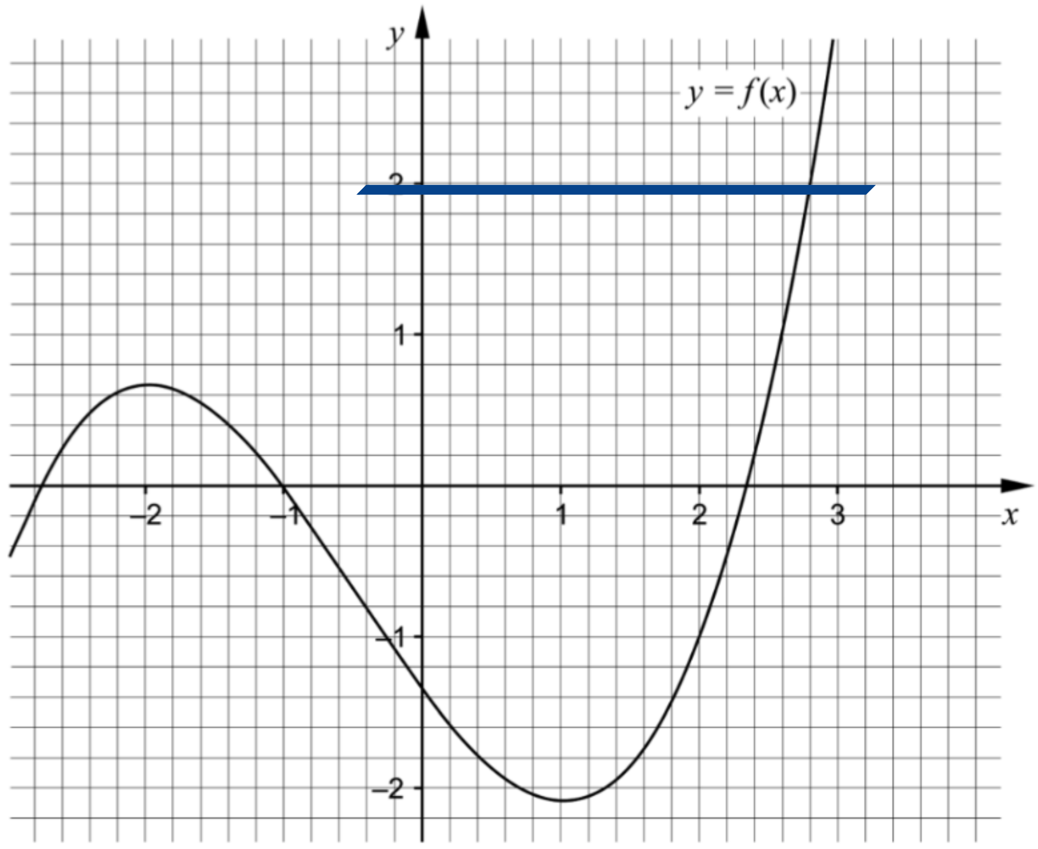
4. Funktionen f är kontinuerlig. Rita i koordinatsystemet nedan en skiss som visar hur grafen till f kan se ut om det gäller att:

- Grafen går genom de markerade punkterna $(1, 3)$, $(3, 3)$ och $(5, 3)$
- $f'(1) > 0$
- $f'(3) < 0$
- $f'(5) > 0$



(1/0/0)

5. I figuren visas grafen till tredjegradsfunktionen f.
Lös ekvationen $f(x) = 2$ grafiskt. $x = 2{,}8$ (1/0/0)



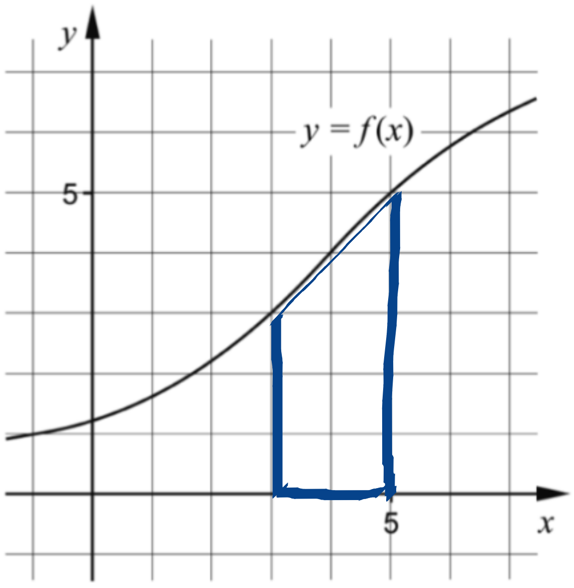
6. Bestäm $f'(x)$

a) $f(x) = 3x^4 - 7x + 5$ $12x^3 - 7$ (1/0/0)

b) $f(x) = x^k + k$ kx^{k-1} (0/1/0)

c) $f(x) = \dfrac{x + 5x^2}{x}$ 5 (0/1/0)

7. Figuren visar grafen till funktionen f. Bestäm ett närmevärde till $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$



8 _______________ (0/1/0)

8. Funktionen f beskriver hur en växande vattenmelons vikt y beror av tiden t, det vill säga $y = f(t)$. Vikten y anges i hg (hektogram) och tiden t i veckor.

Vad får du veta genom att bestämma $f'(3)$?
Välj ett av alternativen A-E. E _______________ (0/1/0)

A. Den vikt i hg som vattenmelonen har vid tiden 3 veckor.

B. Vattenmelonens viktökning i hg under 3 veckor.

C. Vattenmelonens genomsnittliga viktökning i hg/vecka under 3 veckor.

D. Den tid det tar för vattenmelonens vikt att öka till 3 hg.

E. Vattenmelonens viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.

9. a) Ge ett exempel på en polynomfunktion f av fjärde graden för vilken det gäller att $f(1) = 4$

$x^4 + 3$ (0/1/0)

b) Det finns flera rationella uttryck som uppfyller följande villkor:

- Uttrycket får värdet 0 då $x = -1$
- Uttrycket är inte definierat för $x = 3$
- Uttrycket är inte definierat för $x = -4$

Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som uppfyller alla tre villkor.

$\frac{x+1}{(x-3)(x+4)}$ (0/1/1)

10. I en sjö planterar man in fiskar av en art som inte funnits där tidigare. Fiskpopulationen kan beskrivas med sambandet

$N(t) = \frac{15000}{3 + 2e^{-0,5 \cdot t}}$ där N är antalet fiskar och t är tiden i år efter inplanteringen.

a) Hur många fiskar planterades in i sjön från början?

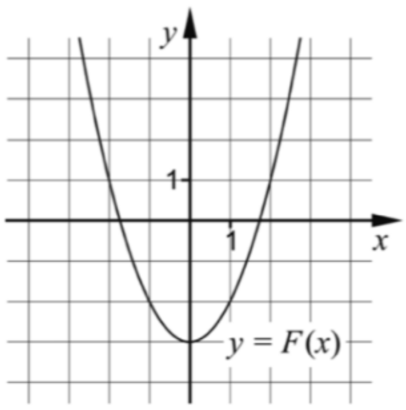
3000 (0/1/0)

b) På grund av olika miljöfaktorer kan antalet fiskar inte bli hur stort som helst. Bestäm den övre gränsen för antalet fiskar med hjälp av sambandet.

$2e^{-0,5t} \to 0,\ t \to \infty$

5000 (0/0/1)

11. Funktionen f har en primitiv funktion F. Grafen till F visas i figuren nedan.



$F(x) = \frac{x^2}{4} - 3$

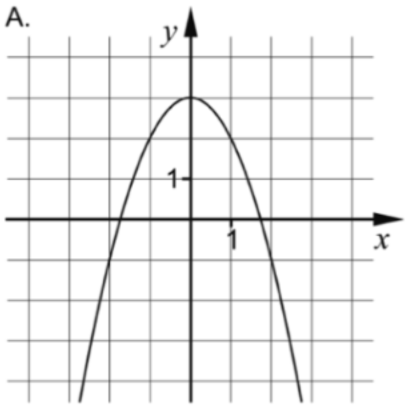
$f = \frac{x}{2}$

$F = \frac{x^2}{4} + C$

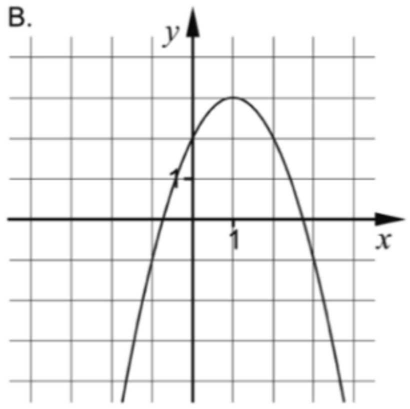
a) Vilken av graferna A-F visar en annan primitiv funktion till f ?

D (0/1/0)

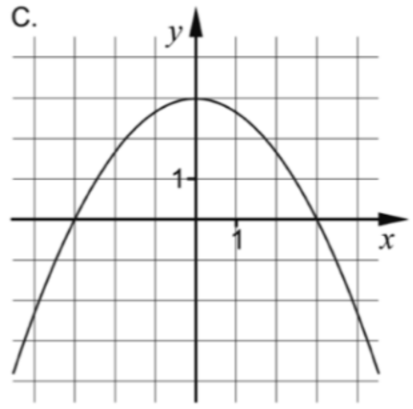
A.



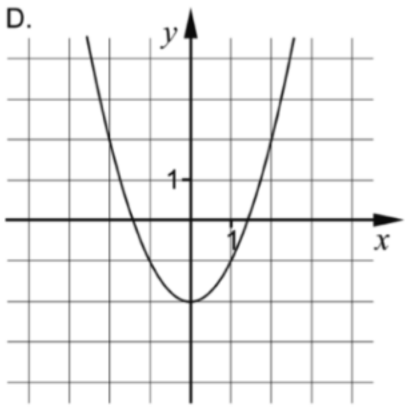
B.



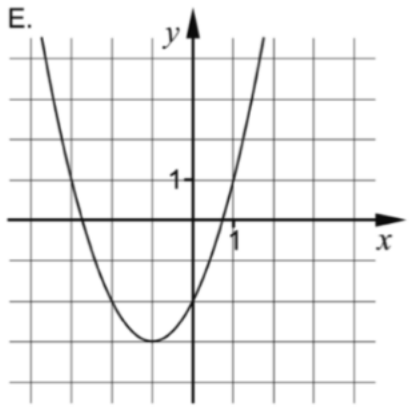
C.



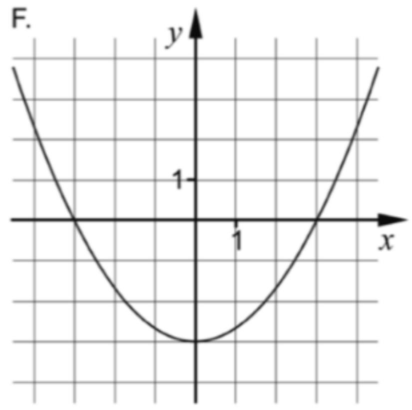
D.



E.



F.



12. Beräkna $\int_1^2 3x^2\,dx$ algebraiskt. (2/0/0)

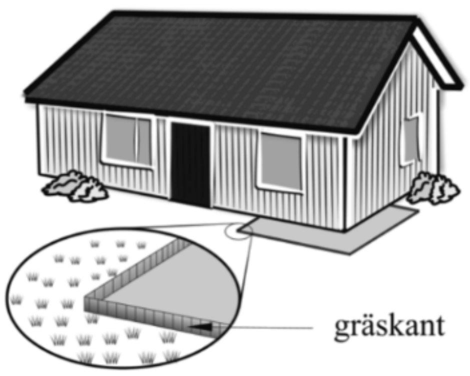
12. $$\int_1^2 3x^2 dx = \left[x^3\right]_1^2 = 8-1 = \underline{7}$$

14. Beräkna $\dfrac{(x+8)^6-(x+8)^5}{(x+8)^5}$ då $x=2{,}7$

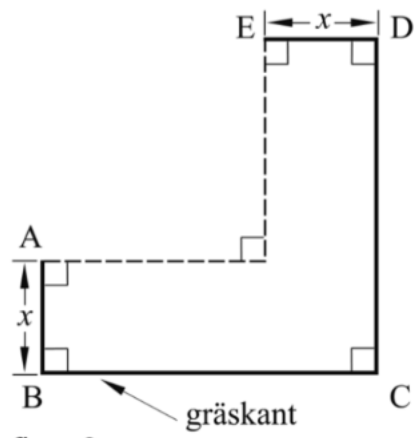
Svara exakt. (0/2/0)

14. $$\frac{(x+8)^5(x+8-1)}{(x+8)^5} = x+7 = \underline{9{,}7}$$

13. En trädgårdsmästare ska göra en blomrabatt runt hörnet på ett hus. Längs sidorna som inte angränsar mot huset kommer hon att sätta gräskant, se figur 1. Hon vill utforma rabatten så att sidorna BC och CD är lika långa, se figur 2.



figur 1



figur 2

I trädgårdsmästarens förråd finns en rulle med 6 m gräskant och hon tänker använda hela rullen. Arean för blomrabatten blir då

$A(x) = 6x - 3x^2$

där x är blomrabattens bredd i meter, se figur 2.

a) Trädgårdsmästaren vill att blomrabatten ska ha så stor area som möjligt. Beräkna med hjälp av derivata bredden x så att arean blir maximal. (2/0/0)

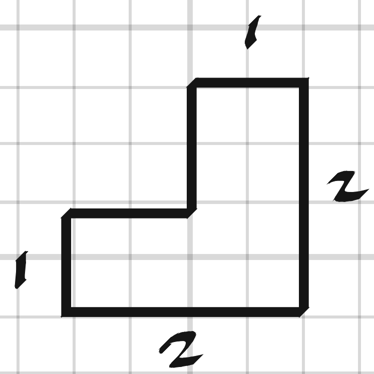
b) Vilka värden kan arean A anta i detta sammanhang? (1/2/0)

c) Visa att arean för blomrabatten i figur 2 kan beskrivas av $A(x) = 6x - 3x^2$ om trädgårdsmästaren använder 6 m gräskant. (0/1/2)

13. a) $A'(x) = 6 - 6x = 6(1-x)$

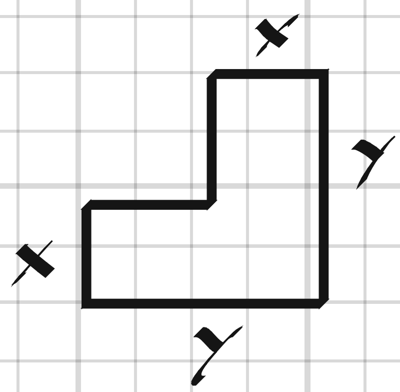
$A'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 1 \text{ m}}$

b) $A_{max} = A(1) = 6 - 3 = 3 \text{ m}^2$



$\underline{0 < A \leq 3} \text{ m}^2$

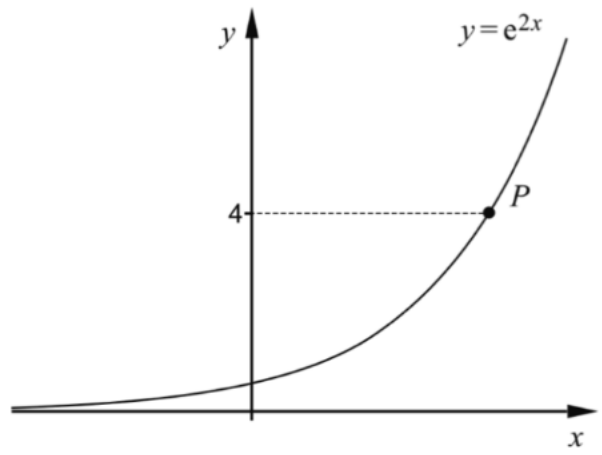
c) $2x + 2y = 6 \Rightarrow y = 3 - x$



$A = xy + x \cdot (y - x) = 2xy - x^2$

$A(x) = 2x(3-x) - x^2 = 6x - 2x^2 - x^2 = 6x - 3x^2$

15. Kurvan $y = e^{2x}$ är ritad i figuren nedan. Punkten P har y-koordinaten 4



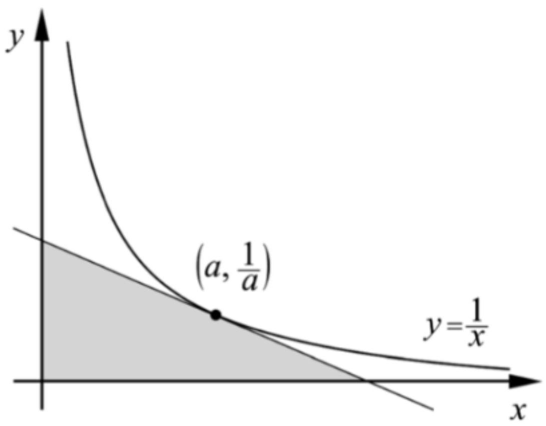
Bestäm kurvans lutning i punkten P.
Svara exakt och på så enkel form som möjligt. (0/3/0)

15. $y(x) = 4 \Rightarrow e^{2x} = 4 \Rightarrow x = \frac{\ln 4}{2}$

$y'(x) = 2e^{2x}$

$k = y'\left(\frac{\ln 4}{2}\right) = 2 \cdot e^{\ln 4} = 2 \cdot 4 = \underline{8}$

16. Bevisa att den triangel som innesluts av de positiva koordinataxlarna och en tangent till kurvan $y = \frac{1}{x}$ har arean 2 areaenheter *oavsett* var tangenten tangerar kurvan.



Utgå från att tangeringspunkten har koordinaterna $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ (0/1/3)

16. $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$

<u>Tangentens ekvation:</u>

$g - g(a) = k(x-a)$, $g(a) = y(a) = \frac{1}{a}$, $k = y'(a) = -\frac{1}{a^2}$

$g - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)$

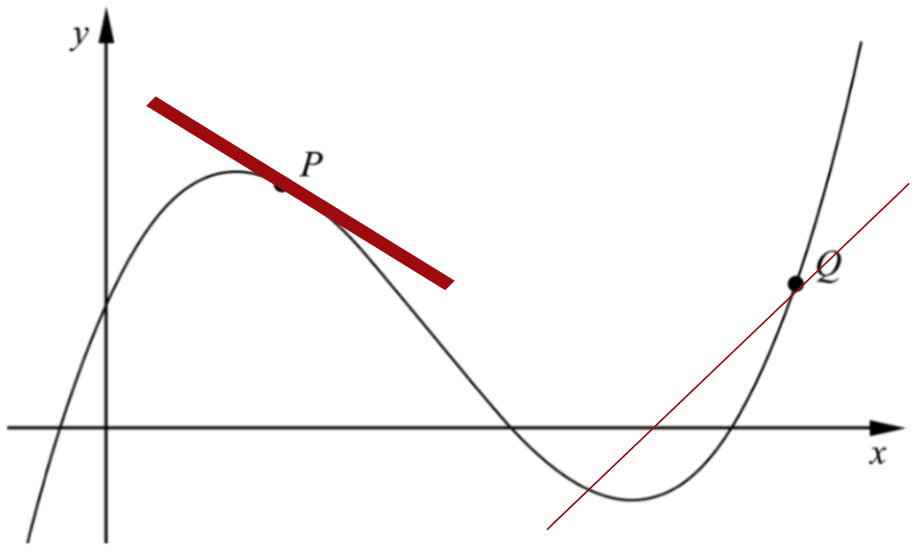
$g = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

$g(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} \cdot x + \frac{2}{a} = 0$; $-\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a} - 2\right) = 0 \Rightarrow x = 2a$

$A = \int_0^{2a} g(x)\,dx = \int_0^{2a} \left(\frac{2}{a} - \frac{x}{a^2}\right)dx = \left[\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\right]_0^{2a} = 4 - 2 = 2$

1. För funktionen f gäller att $f(x) = 3x^4 - 12x$
Bestäm $f'(x)$ $12x^3 - 12$ (1/0/0)

2. I figuren visas grafen till en tredjegradsfunktion.

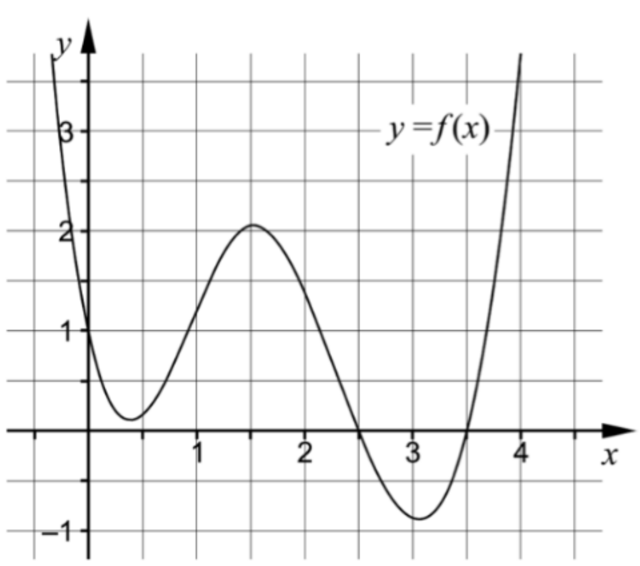


Rita i figuren

a) en tangent till kurvan i punkten P. (1/0/0)

b) en sekant som går genom punkten Q. (1/0/0)

3. I figuren visas huvuddragen av grafen till en funktion f.



Lös ekvationen $f(x) = 0$ $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 3{,}5$ (1/0/0)

4. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^5}$ $(x+3)^5$ (1/0/0)

b) $\dfrac{a}{\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}}$ a^2 (0/1/0)

5. Värdet hos en bil minskar exponentiellt enligt sambandet $V(t) = 100\,000\ \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ där V är värdet i kronor och t är tiden i år efter inköpet.

Vilket av alternativen A-H nedan anger förändringshastigheten för bilens värde 5 år efter inköpet?

A. $-100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

B. $-100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

C. $100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

D. $100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

E. $-20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

F. $-20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

G. $20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

H. $20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

F (0/1/0)

6. Lös ekvationen $x^3 - 2x^2 = 3x$ $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$ (0/1/0)

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = x(x+1)(x-3)$$

7. För en funktion f gäller att $y = f(x)$. Grafen till funktionen har en tangent i den punkt där $x = 5$. Tangentens ekvation är $3x + 2y - 10 = 0$

$y = -\frac{3}{2}x + 5$

a) Bestäm $f'(5)$ $-3/2$ (0/1/0)

b) Bestäm $f(5)$ $-5/2$ (0/1/0)

8. Mobiltelefonabonnemanget RingUpp har en fast månadsavgift på 49 kr och en öppningsavgift på 69 öre per samtal. Inga andra avgifter tillkommer.

Antag att du ringer x samtal under en viss månad.
Den totala kostnaden i kr under denna månad är då $0{,}69x + 49$

a) Skriv ett uttryck för kostnaden per samtal under månaden.

$0{,}69 + \frac{49}{x}$ (0/1/0)

b) Kostnaden per samtal under en månad närmar sig en undre gräns då antalet samtal ökar. Ange denna gräns. Svara i kronor.

0,69 (0/0/1)

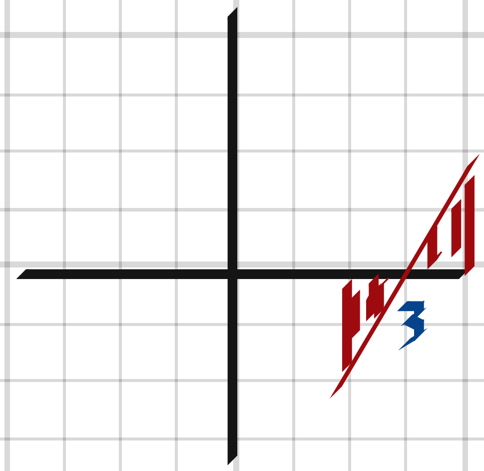
---

9. Grafen till funktionen f är en rät linje. Funktionen f har nollstället $x = 3$

Det finns flera värden på konstanterna a och b så att $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ där $a < b$

Ge ett exempel på möjliga värden på a och b som uppfyller villkoren ovan.

$a =$ 2 $b =$ 4 (0/1/0)

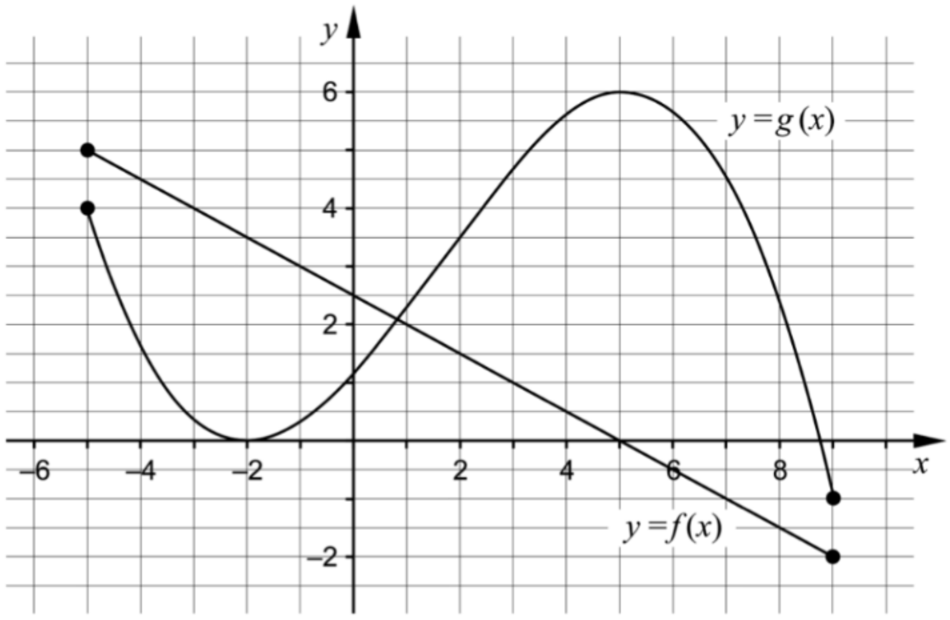


---

10. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{2 + \frac{4}{x}} = 5$

$a = 10$ (0/1/0)

11. Figuren visar graferna till funktionerna f och g som är definierade i intervallet $-5 \leq x \leq 9$
Funktionen h bildas som summan av f och g, det vill säga
$h(x) = f(x) + g(x)$.



Använd graferna för att lösa följande uppgifter.

a) Bestäm $h(2)$ 5   (0/1/0)

b) Bestäm största värdet för funktionen h i intervallet $-5 \leq x \leq 9$ 9   (0/0/1)

c) Bestäm $h'(5)$ $= f'(5) + g'(5)$ $-0{,}5$ (0/0/1)

$= -0{,}5 + 0$

---

12. Vid en undersökning har man registrerat när samtal tas emot i en telefonväxel. Det visar sig att förändringshastigheten av antalet samtal följer den förenklade modellen
$A'(t) = 200 - 2t$
där A' är antalet samtal/minut och t är tiden i minuter efter att telefonväxeln öppnat.

a) Beräkna $\int_0^{10} (200 - 2t)\,dt$ algebraiskt. (2/0/0)

b) Beskriv med ord vad integralens värde betyder i detta sammanhang. (1/1/0)

12. a) $\int_0^{10} (200-2t)\,dt = \left[200t - t^2\right]_0^{10} = 2000 - 100 = 1900$

b) Antalet samtal under de första 10 minuterna.

13. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 12x$
Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, en minimi- eller en terrasspunkt. (3/1/0)

13. $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow$ maximum ; $f(-2) = -8 + 24 = 16$

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ minimum ; $f(2) = 8 - 24 = -16$

Svar: Maxpunkt i $(-2, 16)$

Minpunkt i $(2, -16)$

14. Lös ekvationen $\frac{1}{x(1-x)} = 1 + \frac{1}{1-x}$ (0/3/0)

14. $1 = x(1-x) + x$, $x \neq 0, x \neq 1$

$1 = x - x^2 + x$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

Svar: Ekvationen saknar lösning

15. Bestäm en andragradsfunktion f som uppfyller villkoret att $f'(3) = 2$ (0/2/0)

15.

$f(x) = \underline{x^2 - 4x}$