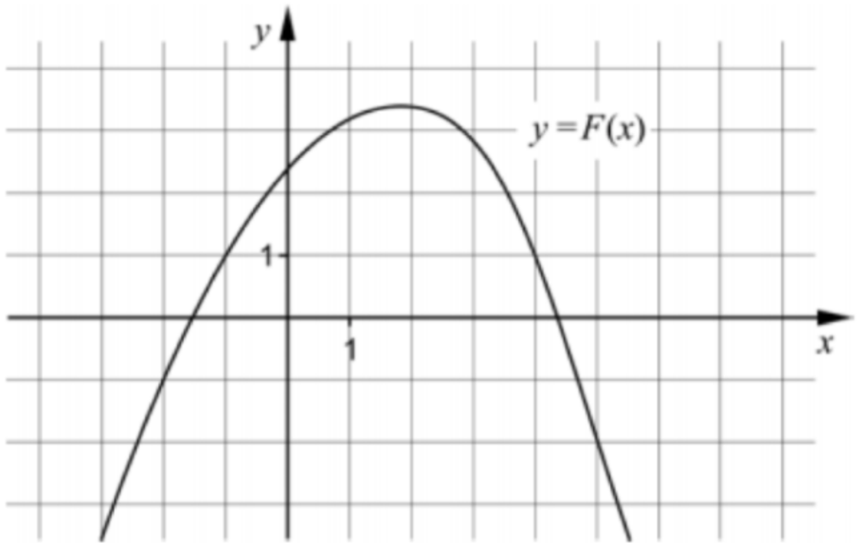
1) F är en primitiv funktion till funktionen f

I figuren visas grafen till funktionen F. Bestäm $\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}\,x$



0/0/1

1. $$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = F(5) - F(-2) = -2 - (-1) = \underline{-1}$$

2) Låt $f(x) = 4\ln x + e^{\sqrt{x}}$. Beräkna integralen $\int_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}\,x$. Svara exakt.

0/0/1

2. $$\int_{1}^{4} f'(x)\,dx = f(4) - f(1) = 4\ln 4 + e^{\sqrt{4}} - 4\ln 1 - e^{\sqrt{1}} =$$

$$= \underline{4\ln 4 + e^{2} - e}$$

3) $\int_a^b (3x^2 - 2x + 1)\ \mathrm{d}x = b - a$

Givet $a = \frac{b}{2}$ och $a \neq 0$, bestäm a och b.

0/1/1

3.
$$\int_a^{2a} (3x^2 - 2x + 1)\,dx = 2a - a$$

$$\left[x^3 - x^2 + x\right]_a^{2a} = a$$

$$8a^3 - 4a^2 + 2a - a^3 + a^2 - a = a$$

$$7a^3 - 3a^2 = 0$$

$$a^2(7a - 3) = 0 \quad , a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = \frac{3}{7} \,,\, b = 2a = \frac{6}{7}}$$

4) Bestäm den primitiva funktionen till $f(x) = \left(e^{0,5x} - e^{-0,5x}\right)^2$ som uppfyller villkoret $F(\ln 2) = 0,5 - \ln 4$.

0/1/1

4.

$$f(x) = e^{x} - 2 + e^{-x}$$

$$F(x) = e^{x} - 2x - e^{-x} + C$$

$$F(\ln 2) = 0.5 - \ln 4 \Rightarrow 2 - \ln 4 - 0.5 + C = 0.5 - \ln 4 \Rightarrow$$

$$C = -1$$

$$\underline{F(x) = e^{x} - 2x - e^{-x} - 1}$$

---

5) Bestäm konstanten a så att $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$ om $f(x) = \frac{(2x)^{1/2}}{x}$

0/0/2

5.

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot x^{-1/2} \Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

$$4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \underline{a = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}}$$

6) Bestäm talet a i $f(x) = x^2 + ax + 3$ så att $\int_0^3 f(x)\,dx = f(0)$

Svara i exakt form.

0/0/2

6.

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 3x\right]_0^3 = 3$$

$$9 + \frac{9a}{2} + 9 = 3 \Rightarrow a = \frac{2(3-18)}{9} = -\frac{10}{3}$$

---

7) Bestäm talet p så att integralen $\int_0^1 \left(x^2 - px\right)^2 \mathrm{d}x$ blir så liten som möjligt.

0/1/2

7.

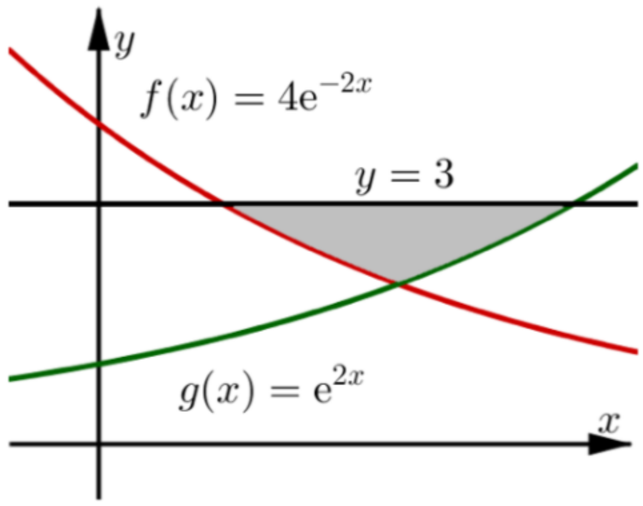
$$\int_0^1 (x^2-px)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2px^3 + p^2x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{px^4}{2} + \frac{p^2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{3}$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{5} - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{3}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{2p}{3} = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

---

8) Nedan visas graferna till funktionerna $f(x) = 4e^{-2x}$, $y = 3$ samt $g(x) = e^{2x}$.



Teckna ett integraluttryck för arean av det skuggade området. Du behöver inte beräkna någon del av uttrycket, bara välja gränser och integrander korrekt.

0/0/3

8.

$$4e^{-2x_0} = 3 \Rightarrow -2x_0 = \ln\frac{3}{4}$$

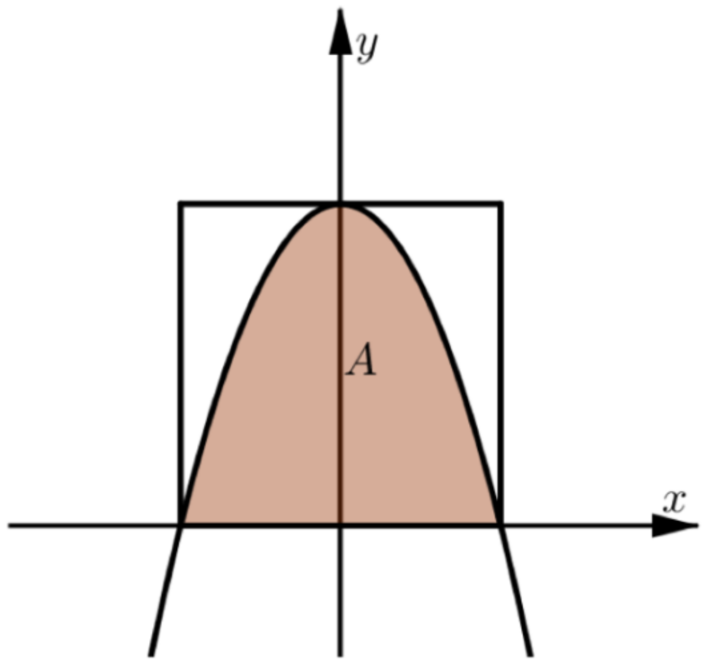
$$\Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

$$4e^{-2x_1} = e^{2x_1} \Rightarrow e^{-4x_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ln 4$$

$$e^{2x_2} = 3 = x_2 = \frac{1}{2}\cdot\ln 3$$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} (4e^{-2x} - e^{2x})\,dx + \int_{x_1}^{x_2} (3 - e^{2x})\,dx$$

9) Grafen till funktionen $f(x) = a - x^2$, där $a > 0$, innesluter tillsammans med x-axeln en begränsad area A. En rektangel har sina nedre hörn där $f(x) = 0$ och dess övre sida tangerar grafen till $f(x)$ i dess maxpunkt.



Bestäm algebraiskt förhållandet mellan arean A och rektangelarean.

0/0/3

9. Nollställen: $a - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Maxvärdet: a

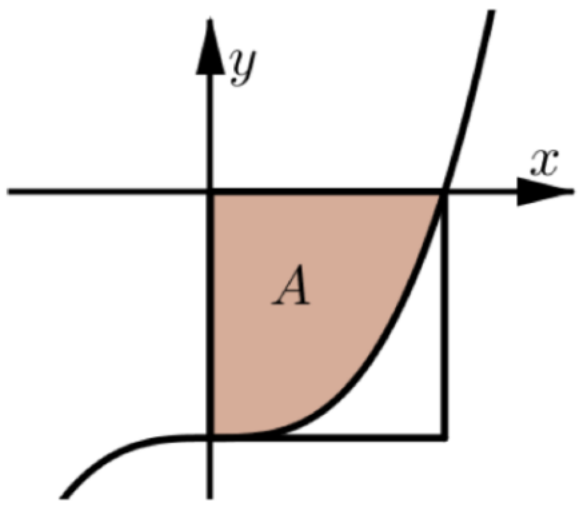
Rektangelns area $A_{rekt} = a \cdot 2\sqrt{a}$

Funktionens area $A = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = 2\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} =$

$= 2a\sqrt{a} - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$

$\frac{A}{A_{rekt}} = \frac{\frac{4a\sqrt{a}}{3}}{a2\sqrt{a}} = \frac{2}{3}$

10) Grafen till funktionen $f(x) = x^3 - a$, där $a > 0$, innesluter tillsammans med x-axeln en begränsad area A. En rektangel bildas så som figuren visar.



Bestäm algebraiskt förhållandet mellan arean A och rektangelarean.

0/0/3

10. Nollställe: $x^3 - a = 0 \Rightarrow x = a^{1/3}$

Minvärdet: $-a$

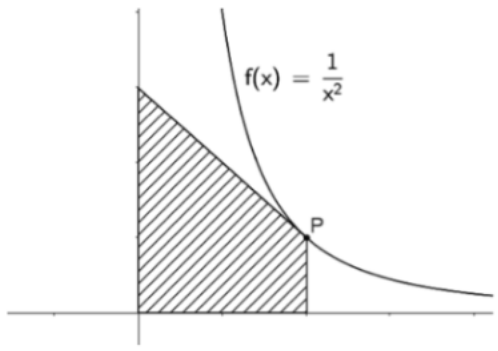
Rektangelns area $A_{rekt} = a^{1/3} \cdot a = a^{4/3}$

Funktionens area $A = \int_{a^{1/3}}^{0} (x^3 - a)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - ax\right]_{a^{1/3}}^{0} =$

$= -\frac{a^{4/3}}{4} + a^{4/3} = \frac{3a^{4/3}}{4}$

$$\frac{A}{A_{rekt}} = \frac{\frac{3a^{4/3}}{4}}{a^{4/3}} = \frac{3}{4}$$

11) Figuren visar kurvan för $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$



I en punkt $P = (1, 1)$ som ligger på kurvan är en tangent dragen. Tangenten bildar tillsammans med de positiva koordinataxlarna och punkten P en parallelltapets.

a) Bestäm arean av det markerade området.

b) Bestäm punkten P:s x-koordinat så att arean blir 1 a.e

0/2/3

11.

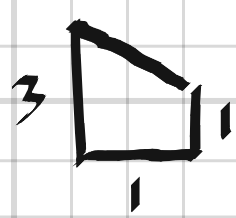
$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

a) Tangentens ekvation: $y = kx + m$

$$y - y(1) = f'(1)(x-1)$$

$$y - 1 = -2(x-1)$$

$y = -2x + 3 \Rightarrow$



$A = 1 \cdot \frac{1+3}{2} = \underline{2 \text{ a.e.}}$

b) Tangentens ekvation : $h = kx + m$

$$h - h(x_p) = -\frac{2}{x_p^3}(x - x_p)$$

$$h - \frac{1}{x_p^2} = -\frac{2}{x_p^3}x + \frac{2}{x_p^2}$$

$$h = -\frac{2}{x_p^3}x + \frac{3}{x_p^2}$$

Arean $A(x_p) = x_p \cdot \dfrac{h(x_p) + m}{2} = 1 \implies$

$$x_p \cdot \frac{\frac{1}{x_p^2} + \frac{3}{x_p^2}}{2} = 1 \implies \underline{x_p = 2}$$