1) Bestäm $\lim_{x \to \infty} \dfrac{7x^3 + 11x}{3x^3 + \sqrt{x}}$

0/0/1

1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3+11x}{3x^3+\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{7+\frac{11}{x^2}}{3+\frac{1}{x^{5/2}}} = \underline{\frac{7}{3}}$$

---

2) Beräkna följande gränsvärde. Det ska framgå från dina beräkningar hur du har tänkt.

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{4 + 3x}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

0/0/1

2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4+3x}{\sqrt{4x^2-3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \frac{0+3}{\sqrt{4-0}} = \underline{\frac{3}{2}}$$

---

4) Bestäm a så att gränsvärdet blir ändligt (dvs så att gränsvärdet blir ett tal)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + ax + 6}{x^2 - 4}$$

0/0/2

4. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+b)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow$$

$$x^2+ax+6 = (x-2)(x+b)$$

$$x^2+ax+6 = x^2-(2-b)x-2b \Rightarrow$$

$$b=-3 \quad , \quad \underline{a=-(2-(-3))=-5}$$

Med $a=-5$ insatt i gränsvärdet $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

5) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$$

0/0/2

5. $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x^2+1)(x-1) = (1+1)\cdot(-1-1) = \underline{-4}$$

---

6) Bestäm de reella talen a och b så att

$$\lim_{x \to 2} \frac{ax + b}{x^2 - 4} = 1.$$

0/0/2

6. $$\lim_{x \to 2} \frac{ax+b}{x^2-4} = 1$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{a(x+\frac{b}{a})}{(x+2)(x-2)} = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a} = x - 2 \\ \underline{a = 4} \end{cases} \Rightarrow \quad x + \frac{b}{4} = x - 2$$

$$\underline{b = -8}$$

7) Bestäm gränsvärdet algebraiskt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n}$.

0/0/2

7. $\sqrt[n]{2^n+4^n} = \sqrt[n]{2^n + 2^n \cdot 2^n} = \sqrt[n]{2^n(1+2^n)} = 2(1+2^n)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+4^n} = 2 \cdot 2^{n \cdot \frac{1}{n}} = 2 \cdot 2 = \underline{4}$ (1:an försumbar för stora n)

---

9) Bestäm a så att gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 + ax + 12}{x^2 - 16}$ existerar.

0/0/2

9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+ax+12}{(x+4)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x+p)(x-4)}{(x+4)(x-4)} \Rightarrow$

$(x+p)(x-4) = x^2+ax+12$

$x^2+(p-4)x-4p = x^2+ax+12 \Rightarrow$

$p = -3 \Rightarrow a = p-4 = -3-4 = \underline{-7}$

---

10) Bestäm värdet på

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 27}$$

0/1/2

10. $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{3(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{3(x+3)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{3(x+3)} = \frac{3+2}{3 \cdot 6} = \underline{\frac{5}{18}}$$

---

11) Beräkna $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

0/0/3

11. $$\lim_{h \to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \underline{\frac{1}{4}}$$
