1) Funktionen $g(x)$ har ett nollställe för $x = 5$.

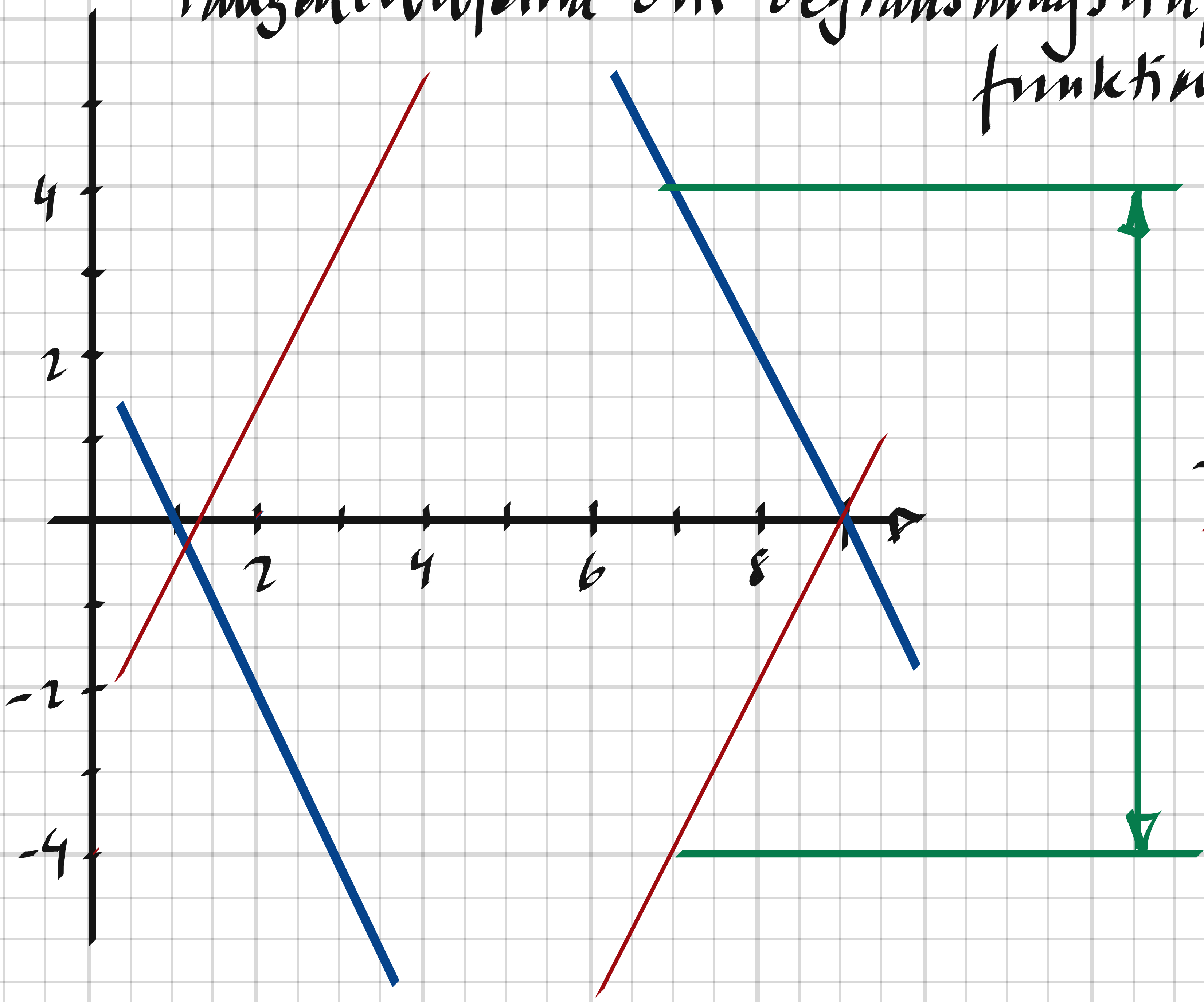
För $2 \le x \le 8$ gäller att $-2 \le g'(x) \le 2$

Vilka värden kan $g(7)$ anta?

0/1/1

1.

Tangentlinjerna blir begränsningslinjer för funktionen g(x)



$-4 \le g(7) \le 4$

2) Derivera $y = \dfrac{2x^{a+2}}{a+2}$, där a är en konstant

0/0/1

2,

$$y'(x) = \frac{2(a+2)\cdot x^{a+1}}{a+2} = \underline{2x^{a+1}}$$

3) Lös ekvationen $e^{2+x} = 7 - e^x$ med algebraisk metod. Svara exakt.

0/0/2

3,

$$e^{2+x} + e^x = 7$$

$$e^x(e^2+1) = 7$$

$$e^x = \frac{7}{e^2+1}$$

$$\underline{x = \ln \frac{7}{e^2+1}}$$

4) Visa att ekvationen $e^{ex} = \sqrt{a}$ har en lösning som kan skrivas $x = k \cdot \ln a$, där k är en konstant. Bestäm också värdet på konstanten k. Svara exakt.

0/0/2

4,

$$\ln e^{ex} = \ln \sqrt{a}$$

$$ex = \ln \sqrt{a}$$

$$ex = \ln a^{1/2}$$

$$ex = \frac{1}{2} \cdot \ln a$$

$$x = \frac{1}{2e} \cdot \ln a \Rightarrow k = \frac{1}{2e}$$

\#

$$\begin{array}{r} 12 \\ 8+ \\ \hline 96 \end{array}$$

---

5) Bestäm $f'(2)$ om $f(x) = \frac{1}{x^{-3}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}}{x^2} - \pi x$. Svara i exakt form.

0/0/2

5,

$$f(x) = x^3 + \sqrt{2}\, x^{-3/2} - \pi x$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot x^{-5/2} - \pi = 3x^2 - \frac{3}{2x^2} - \pi$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - \frac{3}{2 \cdot 2^2} - \pi = 12 - \frac{3}{8} - \pi = \frac{93}{8} - \pi$$

6) För funktionen $h(x)$ gäller följande:

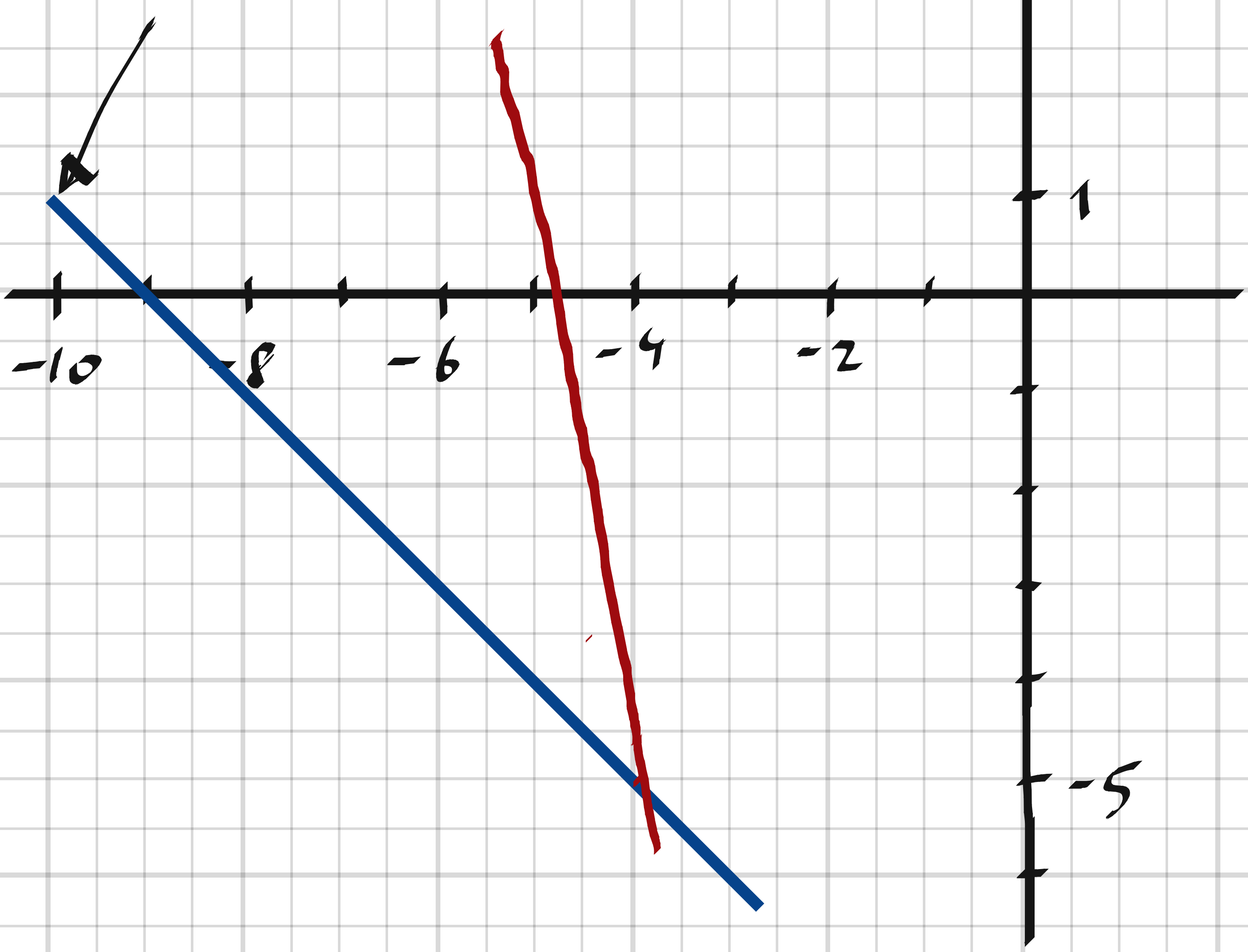
- $h(-4) = -5$
- i intervallet $-10 \leq x \leq -4$ gäller att $-7 \leq h'(x) \leq -1$

Bestäm minsta möjliga värde för $h(-10)$.

0/0/2

6.

minsta värde $= h(-10) = 1$



7) Bestäm tangentens ekvation då $x = 4$ för funktionen $y = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

0/0/2

7.

$$y(x) = x^{-3/2}$$

$$y'(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^{-5/2} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$k = y'(4) = -\frac{3}{2 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{4}} = -\frac{3}{64}$$

Tangentens ekv. $f(x)$:

$$f(x) = kx + m$$

$$y(4) = f(4) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8} = -\frac{3}{64} \cdot 4 + m \Rightarrow m = \frac{5}{16}$$

$$f(x) = -\frac{3}{64}x + \frac{5}{16}$$

8) Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(2) = 9$ då
$f(x) = x - x^2 + x^3$

0/1/2

8.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) - f(x) = x + h - (x+h)^2 + (x+h)^3 - x + x^2 - x^3 =$$

$$= \cancel{x} + h - \cancel{x^2} - 2xh - h^2 + \cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x} + \cancel{x^2} - \cancel{x^3} =$$

$$= h(1 - 2x - h + 3x^2 + 3xh + h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1 - 2x - h + 3x^2 + 3xh + h^2 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 1 - 2x + 3x^2$$

$$f'(2) = 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 1 - 4 + 12 = 9$$

#

9) Vi drar en tangent till kurvan $y = x^2$ där $x = 1$.

Vi drar ytterligare en tangent till samma kurva, så att de båda tangenterna är rätvinkliga mot varandra.

Bestäm tangenternas skärningspunkt.

0/1/2

9. $y = x^2$; $y' = 2x$

Tangent 1: $f(x) = k_1 x + m_1$

$k_1 = y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$y(1) = f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$

$1 = 2 \cdot 1 + m_1 \Rightarrow m_1 = -1$

$f(x) = 2x - 1$

Tangent 2: $g(x) = k_2 x + m_2$

Vinkelrät med tangent 1 $\Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$

$y'(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$y(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{16} = -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{4}) + m_2 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{16}$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$$

Tangenternas skärningspunkt:

$$f(x) = g(x)$$

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{15}{16}$$

$$x = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \quad ; \quad f\left(\frac{3}{8}\right) = 2 \cdot \frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right)$$

10) Funktionen $y = -ax^3 - bx$ har ett extremvärde då $x = -1$ med värdet 2.

a) Bestäm a och b algebraiskt.

b) Avgör algebraiskt om extrempunkten är ett max eller min-värde.

0/1/2

10.

$$y'(x) = -3ax^2 - b$$

$$\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3a + a = 0 + 2$$

a) $\underline{a = -1}$; $\underline{b = 2 - a = 2 - (-1) = 3}$

b) $y''(x) = -6ax = -6 \cdot (-1)x = 6x$

$y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ <u>maximum</u>

11) Lös ekvationen $x^{\ln x} = e^8 \cdot x^2$ algebraiskt.

0/0/3

11.

$$x^{\ln x} = e^8 \cdot x^2$$

$$\ln(x^{\ln x}) = \ln(e^8 \cdot x^2)$$

$$(\ln x)^2 = \ln e^8 + \ln x^2$$

$$(\ln x)^2 = 8 + 2 \cdot \ln x$$

$$\ln x = 1 \pm \sqrt{1+8}$$

$$\ln x_1 = -2$$

$$\ln x_2 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \\ x_2 = e^4 \end{cases}$$

12) Givet en andragradsfunktion $f(x)$ samt två godtyckliga reella tal p och q, visa att det allmänt gäller att:
Ändringskvoten för $f(x)$ i intervallet $q \leq x \leq p$ har samma värde som $f'\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

0/0/3

12. $f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad f'(x) = 2ax + b$

$$\text{Ändringskvoten} = \frac{f(p) - f(q)}{p-q} =$$

$$= \frac{ap^2 + bp + c - aq^2 - bq - c}{p-q} = \frac{a(p^2-q^2) + b(p-q)}{p-q} =$$

$$= \frac{a(p+q)(p-q) + b(p-q)}{p-q} = \underline{a(p+q) + b}$$

$$f'\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2a \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right) + b = \underline{a(p+q) + b} \quad \#$$

13) Bestäm $f'(2)$ då $f(x) = \dfrac{A}{x^2}$ med hjälp av derivatans definition.

0/0/3

13.

$$f'(x) = A \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} =$$

$$= A \cdot \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h x^2 (x+h)^2} = A \cdot \lim_{h \to 0} \frac{-2xh + h^2}{h x^2 (x+h)^2} =$$

$$= A \cdot \lim_{h \to 0} \frac{-2x + h}{(x+h)^2} = A \cdot \frac{-2x}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{2A}{x}}}$$

14) Till grafen $y = x^2$ finns två tangenter som även går genom punkten $(1, -3)$.

Bestäm tangenternas ekvation.

0/0/3

14.

$y'(x) = 2x$

Tangent 1: $f(x) = k_1 x + m_1$

Tangent 2: $g(x) = k_2 x + m_2$

I tangeringspunkterna:

$k = 2x \Rightarrow x = \frac{k}{2}$, $y = \left(\frac{k}{2}\right)^2$

$\frac{k^2}{4} = k \cdot \frac{k}{2} + m \Rightarrow m = -\frac{k^2}{4}$

I skärningspunkten: $f(1) = g(1) = -3$

$-3 = k \cdot 1 - \frac{k^2}{4}$

$k^2 - 4k - 12 = 0$

$(k+2)(k-6) = 0$

$k_1 = -2 \; , \; k_2 = 6 \qquad \Rightarrow$

$$m_1 = -\frac{k_1^2}{4} = -\frac{(-2)^2}{4} = -1$$

$$m_2 = -\frac{k_2^2}{4} = -\frac{6^2}{4} = -9$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x - 1 \\ g(x) = 6x - 9 \end{cases}$$

15) Givet $f(x) = ax - e^{\frac{x}{a}}$ där a är en positiv konstant. Bestäm funktionens maximivärde uttryckt i a

0/0/3

15.

$$f(x) = ax - e^{\frac{x}{a}}$$

$$f'(x) = a - \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{a^2}e^{\frac{x}{a}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{a}} = a^2 \Rightarrow$$

$$x = a \cdot \ln a^2 = 2a\ln a$$

$$f''(2a\ln a) = -\frac{1}{a^2} \cdot e^{2\ln a} = -\frac{1}{a^2} \cdot a^2 = -1 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$\text{Maxvärdet} = f(2a\ln a) = 2a^2\ln a - e^{2\ln a} = \underline{a^2(2\ln a - 1)}$$

16) Bestäm $f'(x)$ med derivatans definition om $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

0/0/3

16.

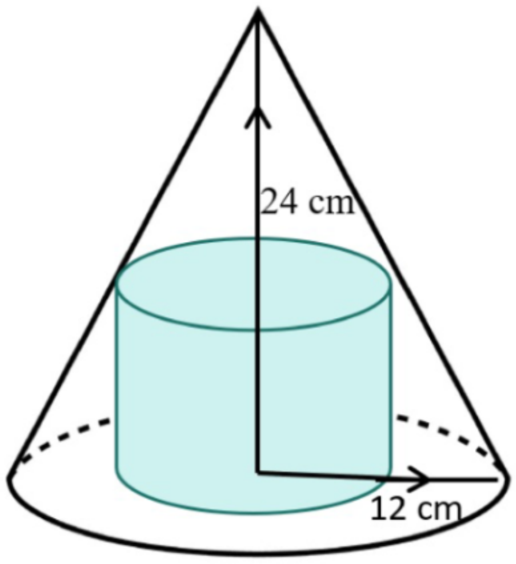
$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2+1} - \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2+1-(x+h)^2-1}{((x+h)^2+1)\,(x^2+1)} = \frac{-2xh-h^2}{((x+h)^2+1)\,(x^2+1)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-2x-h}{((x+h)^2+1)\,(x^2+1)}$$

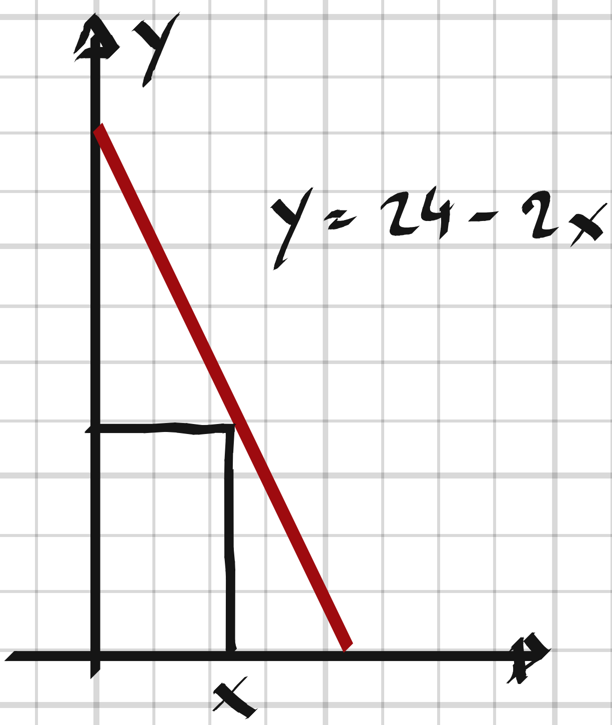
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{((x+h)^2+1)\,(x^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

17) Bestäm exakt den maximala volymen av en cylinder inskriven i en kon enligt bilden nedan. Konen har radien 12 cm och höjden 24 cm.



0/1/3

17.



$$V_{cyl} = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2(24-2x) = \pi(24x^2 - 2x^3)$$

$$V'_{cyl} = \pi(48x - 6x^2) = 6\pi x(8-x)$$

$$V'_{cyl} = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$V''_{cyl} = \pi(48-12x) \Rightarrow V''_{cyl}(8) < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$V^{max}_{cyl} = V_{cyl}(8) = 64\pi(24-16) = \underline{512\pi \text{ cm}^3}$$