EXAMENSARBETE INOM
KOMPLETTERANDE PEDAGOGISK UTBILDNING,
AVANCERAD NIVÅ, 15 HP
STOCKHOLM, SVERIGE 2017

Saknas den historiska dimensionen?

- Om matematikens kulturhistoria ur ett didaktiskt perspektiv

Jörgen Nilsson

KTH
SKOLAN FÖR TEKNIKVETENSKAPLIG
KOMMUNIKATION OCH LÄRANDE

Saknas den historiska dimensionen?

- Om matematikens kulturhistoria ur ett didaktiskt perspektiv

Jörgen Nilsson

Is the historical dimension missing?

- About the history of mathematics from a didactic perspective

EXAMENSARBETE INOM TEKNIK OCH LÄRANDE PÅ PROGRAMMET KOMPLETTERNADE PEDAGOGISK UTBILDNING

Handledare: Sandra Tibbelin, KTH.
Examinator: Per Norström, KTH.

Sammanfattning

Arbetet handlar om matematikens kulturhistoria ur ett didaktiskt perspektiv i gymnasieskolans undervisning. Syftet är dels att undersöka hur lärare och elever ser på matematikens historia och dess inkluderande i matematikundervisningen, dels om det finns en diskrepans mellan olika läroboksförfattare hur man tolkar Skolverkets intention om att ge eleverna möjlighet att relatera matematiken till ett historiskt sammanhang. Baserat på några didaktikforskares olika synvinklar behandlas också frågor kring varför vi bör inkludera matematikens historia, vilka alternativa metoder som kan användas samt vilka eventuella hinder som kan finnas för detta. Dessutom ställs matematikhistorisk undervisning i relation till både teoretiska lärandeperspektiv och jämställdhet mellan män och kvinnor.

Metoderna som använts i arbetet utgörs, dels av en kvalitativ enkätundersökning baserad på frågeformulär ställda till några lärare och elever, dels av en litteraturjämförelse mellan fyra av de vanligaste förekommande läroboksserierna i matematik på den svenska läromedelsmarknaden. Litteraturstudien baseras på både en kvantitativ och en hermeneutisk ansats där såväl mängden av historiskt innehåll liksom texternas innebörd studeras och uttolkas baserat på det sätt på vilket de framställts.

Resultatet av studien visar att undervisning i matematikens historia prioriteras relativt olika bland lärarna och den ges i huvudsak låg prioritet då den ställs mot matematikundervisningens andra delar som aritmetik, algebra, geometri med flera. Vidare visar sig intresset vara begränsat hos merparten av eleverna. Ett något större intresse noteras däremot hos lärarna, som dock i relativt hög andel själva saknar utbildning i matematikens historia. Studien visar också att det finns betydande skillnader i hur läromedelsförfattarna ser på elevernas behov av matematikhistoriskt innehåll, inte minst mellan matematikkursernas a-, b- och c-spår. Även sättet på vilket det matematikhistoriska innehållet presenteras skiljer sig avsevärt mellan de studerade läroboksserierna.

Nyckelord: matematikhistoria, matematikdidaktik, litteraturstudie

Abstract

This work is about the history of mathematics from a didactic perspective in the upper secondary school's education. The purpose is partly to investigate how teachers and students look at the history of mathematics' incorporation in mathematics teaching and partly if there is a discrepancy between different school book writers how to interpret the Swedish National Agency for Education's intention to give students the opportunity to relate mathematics in a historical context. Based on the different viewpoints of some didactics researchers, issues about why we should include the history of mathematics, which alternative methods that can be used, and any possible barriers to doing so, are discussed. In addition, teaching the history of mathematics is viewed in relation to both theoretical learning perspectives and gender equality.

The methods used in the work consist, partly of a qualitative survey based on questionnaires addressed to some teachers and students, and partly from a literature comparison between four of the most commonly used school book series in mathematics on the Swedish literature market. The literature study is based on both a quantitative and a hermeneutic approach where both the amount of historical content and the meaning of the texts are studied and interpreted based on the way in which they were presented.

The result of the study shows that teaching history of mathematics is prioritized relatively different among the teachers, and it is given essentially low priority when it competes against subjects like arithmetics, algebra, geometry, and others. Furthermore, the interest is shown to be limited by most of the students. On the other hand, a somewhat greater interest is noted among the teachers, although in relatively high proportion they themselves lack education in the history of mathematics. The study also shows that there are significant differences in how the school book writers look at the students' need for mathematics-historical content, not least between the a-, b- and c-tracks of the mathematics courses. Even the way in which the mathematics-historical content is presented differs substantially between the studied textbook series.

Keywords: history of matematics, mathematics didactics, literature study

Förord

Själv fick jag aldrig någon undervisning i matematikens kulturhistoria under min tid på gymnasiet. Det var först genom en högskolekurs i ämnet som jag insåg vilken betydelse historian kan ha för ett relativt abstrakt skolämne som matematik. Hur den kan väcka intresse, nyfikenhet och dessutom bidra till ökad förståelse. Jag hoppas således att detta arbete i någon mån ska medverka till fortsatt diskussion kring den historiska dimensionen i gymnasieskolans matematikundervisning.

Med detta examensarbete avslutar jag min ämneslärarutbildning på Kungliga Tekniska högskolan i Stockholm. Utbildningen har gett mig många nya insikter och jag vill här passa på att tacka alla duktiga lärare på KTH och SU som förutom att de förmedlat sina kunskaper också gjort detta år till en trevlig och utvecklande period i livet.

Slutligen vill jag även tacka min handledare Sandra Tibbelin för alla värdefulla tips och råd under arbetets gång.

Jörgen Nilsson

Helsingborg
september 2017

Innehåll

1 Inledning

De flesta didaktikforskare tycks vara eniga om att undervisningen i matematik gynnas genom en anknytning till dess historia. Några av dem namnges i Sektion *2 Tidigare forskning*. Det har också sedan länge varit Skolverkets intention att införliva matematikens kulturhistoria i den svenska gymnasieskolans matematikundervisning.

Redan i läroplanen för de fria skolformerna Lpf94 (Skolverket, 1994), kunde man utläsa: ”Undervisningen ska ge ett historiskt perspektiv, som bland annat låter eleverna utveckla beredskapen inför framtiden, förståelsen för kunskapers relativitet och förmågan till dynamiskt tänkande”.

I Skolverkets nuvarande läroplan Lgy2011 (Skolverket, 2011a) speglas intentionen redan i ämnesplanens inledning med texten ”Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer”. Skolverket anger vidare att matematikundervisningen inom gymnasieskolans nationella program ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmågan att ”relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang”. I alla matematikkursers centrala innehåll finns dessutom stipulerat att kursen ska behandla ”matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria”. Bland kunskapskraven för betyget E finns angivet ”Genom att ge exempel relaterar eleven något i kursens innehåll till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra enkla resonemang om exemplens relevans.”

Användningen av matematikhistoria motiveras ytterligare i en kommentar till läroplanen:

> Tanken med det kulturhistoriska innehållet är att göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande, och att eleverna via matematiska problem får ta del av människorna, den tidsepok och den kultur som upptäckte de matematiska samband och begrepp som behandlas i kursen. (Skolverket, 2011c)

Hur efterlevs då Skolverkets intention? Tolkar lärare och läroboksförfattare styrdokumenten olika avseende omfattning och prioritet? Har lärare och elever olika åsikter om inkluderandet av matematikens historia i undervisningen och på vilket sätt den bör utformas? Dessa är några av de frågeställningar som diskuteras i detta arbete.

1.1 Vad innebär matematikens historia?

Matematikens historia är historien om hur människan genom tiderna och i olika regioner utvecklat olika matematiska teorier. Den är oerhört omfattande och kan studeras utifrån en mängd olika perspektiv. Ett tidshistoriskt perspektiv där matematikens innehåll studeras som en progressiv utveckling från gamla tiders olika talsystem och uppställningar av naturliga tal fram till dagens komplexa och ofta datorstödda algoritmer. Alternativt ur ett geografiskt perspektiv där olika regioners och kulturers matematiska framsteg studeras samt hur dess kunskaper spridits över världen. Den kan också studeras utifrån kända vetenskapsmän och matematiker, om deras landvinningar men också om deras liv och den tidsanda i vilken de verkade.

Oavsett vilket perspektiv man utgår ifrån kan matematikens historia ledas flera årtusenden tillbaka. Det som av en del forskare anses vara det äldsta matematikfyndet är en sten med inristade geometriska mönster. Denna sten hittades i Blombosgrottan vid Sydafrikas sydkust och bedöms vara 77000 år gammal (Allen, 2000).

Figur 1 Sten funnen i Blombosgrottan, Sydafrika med inristade geometriska mönster som antas ha matematisk innebörd. Bilden är hämtad från websidan Art Prehistory (Henanan, 2002).

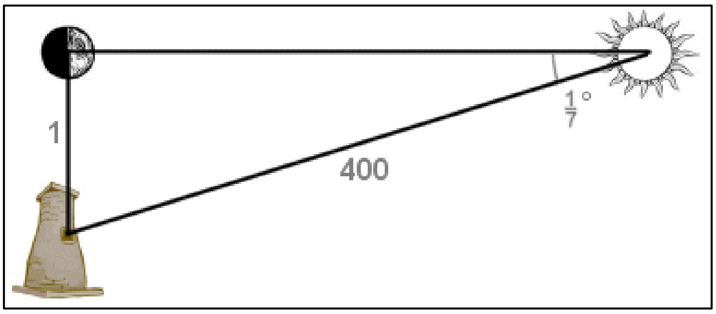
Egyptierna och babylonierna använde redan för mer än 4000 år sedan matematik för att lösa praktiska problem, främst inom handel, för att mäta jordarealer och som stöd vid upprättandet av byggnadsverk. De kunde bland annat beräkna relationerna mellan sidorna i likformiga trianglar och det finns klara belägg för att de även kände till relationen mellan cirkelns omkrets och diameter, det vill säga det tal vi idag benämner pi. Enligt Rhindpapyrusen[1], kunde egyptierna fastställa pi till $256/81 \approx 3.16$ (Dyer, 2008). Även i Kina och Centralamerikas mayakultur ses tidiga spår av matematiskt kunnande. Tyvärr gick mycket av Kinas historia förlorad vid den grymme kejsaren Qin Shi Huangdis omfattande bokbål under 200-talet f. Kr. (Thorbjörnsson, 2017) . Mayafolket har kanske mest gjort sig kända för deras stora intresse inom astronomi och tidräkning genom deras detaljerade tidskalendrar (The Calendar System, 2017).

Trots att vi dag genom olika fynd känner till en hel del om äldre tiders matematik är det dock främst det antika Grekland som gett oss de första verkligt omfångsrika och väldokumenterade matematikkunskaperna och då kanske speciellt inom området geometri. Grekerna, som influerats av egyptierna och babylonierna, såg inte bara på matematiken som ett praktiskt hjälpmedel utan som en konstart i sig. Alexandria som grundades av Alexander den Store omkring 332 f.Kr, kom att bli Greklands och västerlandets mest betydelsefulla vetenskapliga centrum (Brander, 2010). Här huserade bland många andra Euklides (ca 325-265 f.Kr) där han författade sitt berömda verk *Elementa*. Verket kom att bli de mest betydelsefulla matematiska böckerna i över 2000 år, genom sin grundliga och systematiska behandling av både två- och tredimensionell geometri, kulminerande i de fem Platonska kropparna (Euklides' Elementa, u.d.). Det stora biblioteket i Alexandria grundades kring 280 f.Kr. och var under antiken det största i världen. Vad som egentligen hände med biblioteket är omtvistat men enligt den romerske författaren Plutarchos (ca 46-120 e.Kr.) brann biblioteket ned år 47 f.Kr. (Brander, 2010). Eftervärlden gick därmed miste om en enorm kunskaps- och kulturskatt.

Efter den grekiska storhetstiden spreds en del av kunskaperna till framförallt mellanöstern och Indien där de utvecklades vidare under medeltiden. Indierna var mycket intresserade av astronomi och kunde bestämma relationen av avståndet mellan solen och månen till jorden med förbluffande

[1] Rhindpapyrusen är en 33 cm bred och drygt 5 meter lång papyrusrulle, namngiven efter den skotske antikvarien Alexander Henry Rhind och förvaras på British Museum i London förutom några små fragment som finns på Brooklyn Museum i New York (African Heritage, 2016).

hög precision. Vid halv fullmåne står solen direkt mot månen och bildar en rät vinkel mot jorden. Man kunde då mäta vinkeln vid solen till (1/7) grad, motsvarande 400:1 (Mastin, 2016). Man kom alltså fram till att solen ligger 400 gånger längre från jorden än månen. Den mer exakta relationen har senare visat sig vara 389, vilket alltså motsvarar en relativ avvikelse på endast 3%.



Figur 2 Avståndsförhållandet mellan solen, månen och jorden. Bilden hämtad från websidan The Story of Mathematics (Mastin, 2016).

Under medeltiden hade den kristna kyrkan en central roll i Europa. Jorden ansågs vara platt och stod i himlavalvets centrum. Matematisk och naturvetenskaplig forskning var inte något som kyrkan såg som vidare betydelsefullt och som i vissa delar ansågs stå i direkt motsats till den sanna kristna läran. Under andra halvan av 1400-talet började emellertid en ny världsbild få fäste. När nya vetenskapliga landvinningar och upptäckter gjordes kunde kyrkan inte längre stå emot. Vid 1500-talets början var det allmänt känt att jorden var rund och kretsade kring solen. Sjöfarten tog fart och stora påkostade upptäcktsresor inleddes. De europeiska stormakterna erövrade stora landområden runt om i världen, så kallade kolonier, som försåg européerna med råvaror. Denna tid benämns som renässansen, vilket betyder *pånyttfödelse*. Under renässansen återuppväcktes också intresset för grekisk konst, litteratur och således även matematik. Man ansåg sig ha återupptäckt antikens storhet efter att gamla översättningar från antika grekiska skrifter nått allmänheten. (SO-rummet, 2016) Ett stort antal vetenskapsmän tog upp de antika grekernas, arabernas och indiernas arbeten och den matematiska utvecklingen tog ordentlig fart i Europa de kommande århundradena.

Ända fram till 1600-talet använde man sig i huvudsak av retorisk algebra, det vill säga man beskrev den matematiska betraktelsen eller algoritmen som ett resonemang med löpande text utan symboler. En viss form av symbolik användes redan av Diofantos på 200-talet, men en av de första som introducerade symbolsk algebra, på liknande det sätt vi använder idag, var den franske matematikern Francois Viete (1540-1603) (O'Connor et al, 2017a). Den symbolska algebran som vi idag tar för given, kan göra det svårt för oss i nutid att verkligen förstå och sätta oss in i hur man i äldre tider, innan detta paradigmskifte, tänkte och resonerade kring matematiska problem. Lägg därtill att man inom flera högtstående kulturer använde sig av en talbas skild från tio. Från 1500-talet fram till 1800-talet var den matematiska utvecklingen intensiv och blev alltmer specialiserad inom olika områden som algebra, trigonometri, differentialkalkyl, komplexa tal, statistik och sannolikhetslära. En av de allra största giganterna var den schweiziske matematikern Leonard Euler (1707-1783). Genom sin berömda Eulers formel presenterade han ett samband mellan både logaritmen, trigonometrin och komplexa tal (O'Connor et al, 2017b).

Även på 1900-talet gjordes stora framsteg kanske framförallt inom logiken men det förekom även exempel inom mer klassisk matematik, som när britten Andrew Wiles lyckades bevisa Pierre de Fermats (1607-1665) stora sats så sent som 1995 (O'Connor et al, 2017c). I och med datorutvecklingen under detta århundrade framstod en ny era inom matematikens historia vilken i hög grad påverkat vårt förhållande till matematiken, inte minst i skolan.

1.2 Matematikens historia ur olika lärandeperspektiv

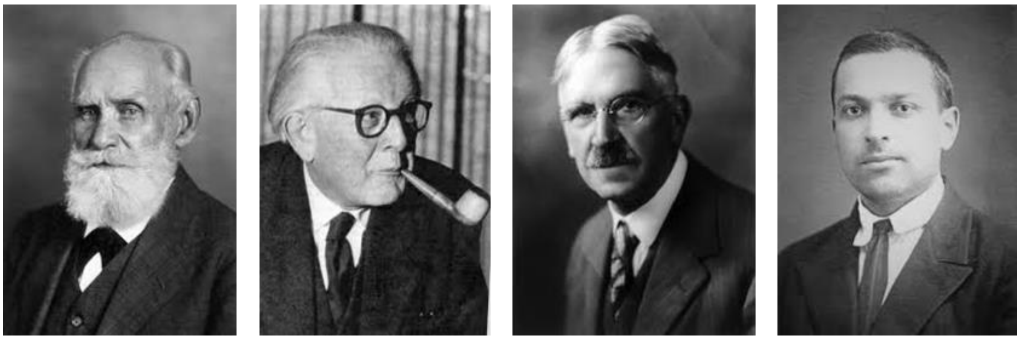
Under de senaste hundra åren har ett antal lärandeperspektiv vuxit fram, vilka i hög grad påverkat såväl vår syn på kunskap som undervisningen i skolan. Bland de mest framträdande lärandeperspektiven kan nämnas *behaviorismen*, *kognitivismen*, *konstruktivismen, pragmatismen* och det som vanligtvis benämns som det *sociokulturella perspektivet*. Texten i denna sektion är i huvudsak baserad på psykologiprofessorn Roger Säljös bok *Lärande – En introduktion till perspektiv och metaforer* (Säljö, 2016).

I början av nittonhundratalet bedrev den ryske fysiologen och Nobelpristagaren Ivan Pavlov (1849-1936) forskning om betingningens principer. Pavlov använde hundar i sina försök och studerade hur deras salivutsöndring påverkades av så kallade stimulus. Han upptäckte att salivutsöndringen påverkades inte bara direkt vid åsynen av mat, utan också när det skedde andra saker som hundarna hade lärt sig att associera med mat. Exempelvis då de hörde djurskötarna skramla med matskålarna. Dessa tankar om att lärande och kunskap kan ses som en reaktion (respons) på yttre faktorer (stimulus) kom att kallas *behaviorismen* och vidareutvecklades av bland andra den amerikanska psykologen B.F. Skinner (1904-1990). Behaviorismens kunskapssyn kan förenklat beskrivas som att kunskap uppnås genom repetitiv inlärning, stimulerad av olika former av belöning. Vi kan här relatera till de moderna datorspelen där spelaren når en allt högre nivå i spelet i takt med att denne ökar sin kunskap eller spelförmåga. Baserat på denna kunskapssyn skulle matematikens historia exempelvis kunna undervisas genom frågesport där eleven belönas i form av ett poängsystem eller liknande.

Behaviorismen kom att kritiseras av många forskare för övergeneralisering vid tolkningen av djurexperimentens överförbarhet till människan. Den ansågs som otillräcklig med en alltför begränsad föreställning om människans lärande. I detta avseende kom *kognitivismen* att framstå som en allt mer intressant utgångspunkt ur lärandeperspektiv. Kognitivismen fick sitt stora genombrott under 1960-talet och utgår från människans kognitiva förmågor och dess mentala processer. I kognitivismen beskrivs lärande som inhämtning, bearbetning och lagring av information. Människans minnesfunktion har en central roll i kognitivismen med viss analogi mot datorteknologin. Med ursprung i dessa tankar kom den schweiziske pedagogen Jean Piaget (1896-1980) att representera den så kallade *konstruktivismen*. Piaget bedrev sin forskning i Geneve och Paris genom att observera elevers kognitiva utveckling, vilken bland annat ledde fram till hans berömda stadieteori där han delar upp barns kognitiva mognad i olika utvecklingsstadier. Piaget menade att individen själv konstruerar sin kunskap genom de två processerna ackommodation och assimilation. Ackommodation representeras av att eleven gör erfarenheter som inte stämmer in mot vad denne redan tror sig veta. Vid assimilation fylls befintlig kunskap på genom erfarenheter med nära koppling till vad eleven redan vet. Enligt Piagets synsätt kommer barnets kognitiva utveckling före lärandet vilket gör undervisningen meningslös om inte eleven nått en tillräcklig mognadsnivå. Med konstruktivismen som ledstjärna skulle undervisning i matematikens historia kunna vara baserad på enskilt arbete där eleven själv får uppsöka information från olika källor, exempelvis internet.

Ur den amerikanska industrialismens spår växte en allmän idéströmning och social rörelse fram som i viss mån kan jämföras med en folkrörelse. Denna blev känd under benämningen progressivism eller framstegsoptimism och innebär en syn på att tekniska, samhälleliga, ekonomiska och vetenskapliga framsteg leder till ett bättre samhälle. I denna tidsanda utvecklades det som kom att kallas *pragmatismen*. Samhället behövde handlings- och lösningsorienterade individer, pragmatiker, som kunde finna lösningar i vardagen snarare än att finna eviga sanningar. Det pragmatiska perspektivet utgår från att kunskap ska vara viktigt för individen, ha relevans och gå att använda. Den som kanske mest av alla förknippas med pragmatismen är den amerikanske psykologen John Dewey (1859-1952). Dewey, som myntade det välkända uttrycket ”learning by doing”, var motståndare till den traditionella katederstyrda och auktoritära undervisningen och förespråkade istället en aktivitetspedagogik där barnen undersöker världen med alla dess sinnen.

Han menade att skolan måste bli en miljö som aktiverar barnen, bygger på deras nyfikenhet och fördjupar deras förståelse för den omgivning de befinner sig i. Vidare ska skolan vara en demokratisk miljö där eleverna prövar kunskapernas hållbarhet genom diskussion och analys. Utifrån Deweys perspektiv bör viktiga inslag av lärandet ske genom projektbaserad undervisning baserad på så kallade inquiry-processer, där man genom ett antal steg identifierar och löser ett problem. Undervisning i matematikens historia ur ett pragmatiskt perspektiv skulle kunna utformas som laboration, där eleverna exempelvis får ta fram en ritning alternativt bygga en modell av en pyramid. I anslutning till den skapande processen görs stegvisa matematiska kopplingar som exempelvis volymberäkning och trigonometri, tillsammans med jämförelser mot egypternas formel för en trunkerad pyramid och de praktiska svårigheter som egyptierna kan ha ställts inför vid uppförandet av pyramiderna.



Figur 3 Från vänster: Ivan Pavlov, Jean Piaget, John Dewey och Lev S. Vygotskij

I Ryssland framkom tankar kring att utveckling och lärande främst handlar om socialt samspel och interaktion mellan människor. Den mest kända företrädaren för *det sociokulturella perspektivet* var den ryske psykologen Lev S. Vygotskij (1896-1934). Förutom det sociala samspelet anses lärandet vara beroende av individens förmåga att hantera fysiska och mentala redskap, där det allra viktigaste redskapet är språket. Vygotskij menade att barnet föds in i en värld av kommunikation och formas i samspelet med sin omgivning. Förmågan att samspela med omgivningen ökar succesivt till alltmer komplexa sammanhang. Ett begrepp i sammanhanget är så kallad appropriering, där barnet lär sig genom att ta över vuxnas språkliga uttryck och kunskaper genom kommunikation. Enligt det sociokulturella perspektivet approprierar vi även fysiska redskap, artefakter. Läraren tillskrivs en viktig roll som genom sin undervisning alltid kan lära barnet något mer. Vygotskij är kanske mest känd för sin proximala utvecklingszon där lärandet utvecklas genom att bygga vidare på det som barnet redan vet eller kan, genom lagom utmanande uppgifter. I ett sociokulturellt perspektiv skulle matematikens historia kunna undervisas genom samtal, diskussioner eller rollspel kring olika teman, kända matematiker eller specifika händelser ur historien.

1.3 Matematikens historia ur ett genusperspektiv

Matematikhistoriens förgrundsgestalter består till en överväldigande majoritet av män. Berömda kvinnliga matematiker genom historien är relativt få, mycket beroende på att kvinnan motarbetats eller hindrats från att studera vid många universitet. Det finns trots allt ett antal som bör synliggöras om vi ska värna principen om jämställdhet inom skolan. Statistiken pekar också på att vi behöver locka fler kvinnor till yrken som kräver kvalificerat matematiskt kunnande. Andelen pojkar och flickor på gymnasieskolans naturvetenskapsprogram har varit ungefär lika de senaste åren. Andelen kvinnor som påbörjade doktorandutbildning inom naturvetenskap och teknik var 2014 dock bara runt 33% (UKÄ, 2015). Inom vissa enskilda teknikgrenar är siffran betydligt lägre än så. En del av kvinnorna faller således bort på vägen upp i utbildningsväsendet.

Fenomenet är ingalunda unikt för Sverige. Den australiska matematiklärarföreningen har antagit ett dokument, *A national statement on girls and mathematics*, som innehåller rekommendationer för lärare om hur undervisningen ska utformas för att passa både flickor och pojkar. Matematikdidaktikern Barbro Grevholm (1994) har översatt denna i syfte att utforma ett motsvarande svenskt dokument. Enligt detta dokument klarar flickorna i Australiens skolor matematiken lika bra som pojkarna både i grundskolan, gymnasiet och på högskolan. Men så snart matematiken inte längre är obligatorisk i gymnasieskolan väljer färre flickor än pojkar att fortsätta läsa matematik och i de fall man kan välja mellan flera nivåer väljer flickor ofta de lägre nivåerna. På högskolan är således de kvinnliga studenterna underrepresenterade på kurserna i matematik och närbesläktade ämnen som natur- och teknikvetenskap med flera. Enligt docent Lovisa Sumpter (2015) hittar vi en del av förklaringen till detta i historien. Hon menar, att om man ser på vad litteraturen berättar om matematik och matematiker med ett historiskt perspektiv hittar vi nästan uteslutande män och detta oavsett om vi studerar allmän historia, matematikens historia eller läromedel i matematik.

Men det finns kvinnor från historien att relatera till. Den kanske mest kända kvinnan i matematikhistorien är den grekiska filosofen och matematikern Hypatia från Alexandria. Hon föddes kring 360 e.Kr som dotter till filosofen och astronomen Theon. Hypatia var en mycket omtyckt föreläsare och utförde bland annat ombearbetningar av stora verk som Diofantos *Arithmetika*, Ptolemaios *Almagest* och Euklides *Elementa*. Som icke-kristen kvinna blev hon mördad under fruktansvärd tortyr år 415 (Warne, 2017).

Långt senare i modern tid blev en annan känd matematiker både Sveriges och världens första kvinnliga matematikprofessor. Det var ryskan Sonja Kovalevsky (1850-1891). Hon arbetade bland annat med partiella differentialekvationer och skrev dessutom flera skönlitterära romaner. Som kvinnlig akademiker blev hon tvungen att lämna sina studier i Ryssland och bodde ett antal år i Tyskland innan hon kom till Sverige (Ottergren, 2004). Andra exempel på kvinnliga matematiker som motarbetats på grund av sitt kön var fransyskan Sophie Germain (1776-1831) och tyskan Emmy Noether (1882-1935). Sophie Germain var framförallt framstående inom talteorin och samarbetade, under pseudonym, med Carl Friedrich Gauss (Swift, 1995). Emmy Noether var verksam inom abstrakt algebra och hyllades av bland andra Albert Einstein som historiens mest betydelsefulla kvinnliga matematiker (Taylor, 1998).

Sumpter (2015) menar att delar av dessa gamla föreställningar om matematik som ett ämne i huvudsak ämnat för män lever kvar än i våra dagar. Att tjejer väljer att inte studera matematik på universitet, ”kanske på grund av att matematik inte säljer sig som ett ämne som kvinnor har möjlighet att studera på samma sätt som juridik och biologi har klarat av att göra”. I det australiska dokumentets svenska översättning (Grevholm, 1994) pekar man ut några faktorer som det bristande intresset hos flickor kan bero på. En av faktorerna handlar om att flickor anses mer benägna än pojkar att välja ämnen på grundval av konstaterad social relevans. En annan faktor handlar om att färre flickor än pojkar ser matematiken som något betydelsefullt i deras framtida liv. Man pekar också på faktorer som handlar om skillnader kring självtillit och synen på sin egen förmåga. Man menar vidare att matematiken i skolan ofta framställs som en avgränsad mängd kunskapsstoff snarare än som ett sätt att vinna kunskap. Många elever betraktar därigenom matematiken som en absolut sanning, oberoende av kulturella sammanhang och väsensskilt från verkliga livet (Grevholm, 1994). Om denna betraktelse i så fall skulle skrämma bort fler kvinnor än män kan självfallet ifrågasättas, men kanske kan vi med matematikhistorians hjälp öka intresset för matematiken hos flickor/kvinnor just genom att sätta den i ett kulturellt och humanistiskt sammanhang. Kanske kan vi också i högre grad visa eleverna att *kvinnor kan* genom att lyfta fram och synliggöra framstående kvinnliga matematiker ur historien.

2 Tidigare forskning

Undervisning i matematikens historia ur ett didaktiskt perspektiv är ett förhållandevis smalt och troligen i många stycken outforskat område. Internationellt har dock en del forskning utförts och några av dess främsta forskare är Uffe T. Jankvist[2], John Fauvel[3] och Michael N. Fried[4]. Nedan nämns tre av deras artiklar i ämnet vilka i huvudsak legat till grund för de tre kommande sektionerna 2.1, 2.2 och 2.3.

- A Categorization of the "whys" and "hows" of Using History in Mathematics Education (Jankvist, 2009)
- Using History in Mathematics Education (Fauvel, 1991)
- Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? (Fried, 2001)

År 1976 grundades en internationell forskningsgrupp på uppdrag av *The International Commission on Mathematical Instruction*, ICMI[5],. Gruppen har fått benämningen *The International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM, 2017). Medlemmarna består av forskare inom matematikdidaktik, matematiker, historiker, lärare och läroplansförfattare. Gruppen organiserar konferenser, framställer utbildningsmaterial för lärare och arbetar bland annat för att utveckla och förbättra läroplaner. De ger också ut ett nyhetsbrev tre gånger per år där de berättar om verksamheten, tipsar om böcker och artiklar mm.

År 2002 publicerades ICMI-studien *History in Mathematics Education* (Fauvel et al, 2002) som undersöker hur matematikens inlärning och undervisning kan förbättras genom att integrera matematikens historia i matematikutbildningen. ICMI-studiens omfattande innehåll baseras på lärares erfarenheter kring nationella läroplaner, läroböcker och lärarutbildning över hela världen. Här ges, bland mycket annat, dessutom information om hur myndigheterna i ett antal jämförbara länder ser på matematikens historia i anslutning till matematikundervisningen.
I Sverige har ett antal mindre studier utförts som examensarbeten i ämneslärarutbildningen. Några av de anges i punktform nedan. Samtliga bidrar de med olika intressanta synvinklar inom området.

- Matematikens historia i matematikundervisningen – En jämförelse mellan förr och nu (Hansson, 2005)
- Matematikens historia i undervisningen (Petrén, 2007)
- Fristående eller inkluderad – En innehållslig textanalys av hur matematikens historia framställs i gymnasiets läroböcker i matematik (Svensson, 2014)
- Matematikens historia i gymnasiematematiken – En undersökning om matematikhistorias varande eller icke varande i skolmatematiken (Lindberg, 2014)

---

[2] Uffe T. Jankvist – Professor och didaktikforskare vid Danish School of Education
[3] John Fauvel – Matematikhistoriker och lektor, senast vid Open University fram till hans död 2001
[4] Michael N. Fried – Matematikhistoriker och lektor vid Ben-Gurion University of the Negev
[5] ICMI - *The International Commission on Mathematical Instruction* bildades i Rom 1908 som ett internationellt organ för forskning kring matematikundervisning.

2.1 Varför matematikens historia i undervisningen?

Genom att lära från matematikens historia kan våra elever troligen bättre möta de framtida matematiska problem de ställs inför. USA:s 26:e president Theodore Rosevelt lär en gång ha sagt:

> "The more you know about the past,
> the better prepared you are for the future"

Professor Uffe Thomas Jankvist vid universitetet i Århus (2009) har resonerat kring begreppen som han kallar "whys and hows", det vill säga varför vi ska undervisa i matematikens historia samt hur undervisningen ska utformas. Jankvist menar att vi måste separera "varför" och "hur" för att nå nya insikter och samtidigt bättre kunna förstå kopplingarna dem emellan. Förutom ökad intellektuell klarhet, menar han att man genom denna förståelse också kan göra det lättare att analysera läromedel, ta beslut om innehåll, presentationsformer och organisation gällande användandet av historia för både lärare och läromedelsförfattare. Jankvist delar in argumenten för "varför" i två huvudkategorier: att studera matematikens historia som ett stöd i matematik-undervisningen eller som ett självändamål i sig. Några argument tillhörande den förstnämnda kategorin hänförs till ökad motivation genom att ge matematiken ett mänskligt ansikte eller genom insikten om att de matematiska problem som studenten upplever som besvärliga i vissa fall tog matematiker århundraden av huvudbry att lösa. Andra argument kan hänföras till kognitiva verktyg som stöd vid lärandet av matematik, genom att kunna visa matematiken på andra sätt och ur en annan synvinkel. Ett annat argument är det så kallade *rekapitalisationsargumentet* vilket kan formuleras som - för att verkligen kunna förstå och bemästra matematiken, måste man genomgått samma faser som matematiker gjort genom historien. Argument för den andra kategorin, där matematikens historia ses som ett självändamål, är sådana där eleven blir varse om att matematiken utvecklats och formats under lång tid i skilda kulturer. Michael N. Fried (2001) vid Ben-Gurion University i Israel anger istället tre huvudteman som skäl till att använda matematikens historia i undervisningen. Det första temat handlar om att humanisera (mänskliggöra) matematiken. Det andra temat handlar om att göra matematiken mer intressant, förståelig och tillgänglig. Det tredje temat berör ökad insikt kring problem, problemlösning och alternativa angreppssätt. Den brittiske matematiklektorn David Lingard (2000) pekar på att det inom matematikens historia finns mängder med exempel som kan hjälpa eleverna att uppskatta det faktum att vissa problem tog matematikerna hundratals år att lösa samt att olösta matematikproblem fortfarande existerar och väntar på sin lösning. Den brittiske matematikhistorikern och lektorn John Fauvel (1991) listar upp en mängd argument för inkluderandet av matematikens historia av vilka några anges nedan:

- Som hjälp för ökad motivation vid inlärning
- Att visa elever hur matematiska begrepp har utvecklats hjälper deras förståelse
- Ger matematiken ett mänskligt ansikte
- Gör matematiken mindre skrämmande
- Hjälper till att utveckla ett multikulturellt angreppssätt
- Elever finner tröst i att de inte är ensamma om problemen
- Uppmuntrar snabbare elever att leta vidare
- Hjälper till att förklara matematikens roll i samhället

2.2 Hur kan undervisning i matematikens historia utformas?

Om undervisningen i matematikens historia ska få de effekter vi önskar är det naturligt att reflektera över hur den bör utformas.

I sitt resonemang kring ovan nämnda "whys and hows" anger Jankvist (2009) tre metoder för att undervisa matematikens historia och väljer att kalla dessa upplysningsmetoden, modulära metoden respektive den historiebaserade metoden. Den första metoden handlar om att upplysa eleverna om den historiska anknytningen i anslutning till undervisningen av ett visst matematiskt område. Detta kan göras muntligt eller via textmaterial och behandla sådant som händelser, biografier, kända problem, anekdoter och så vidare. Den andra metoden handlar om att lägga in paket av separata lektioner speciellt dedikerade för undervisning i matematikens historia inom ett begränsat område. Dessa lektioner kan utformas som textstudier, genom läsning från originalkällor eller som projektarbeten. Andra alternativ kan exempelvis vara genom rollspel, sökningar på internet eller diskussioner kring historiska problem. Den tredje metoden handlar om undervisning i ett evolutionärt eller kronologiskt avseende. Ett exempel på detta kan vara att låta eleverna gå igenom samma utvecklingssteg som man historiskt gjort inom ett visst matematiskt område. Fried (2001) nämner å sin sida två olika strategier för undervisning i matematikens historia. Den första handlar om att introducera historiska anekdoter, korta biografier, isolerade problem och så vidare. Den andra handlar om att ändra undervisningsmetoden efter historiska förtecken. Den senare strategin skulle kunna liknas vid Jankvists tredje metod enligt ovan. På samma sätt som Fauvel (1991) listar upp argument för inkluderandet av matematikens historia, listar han även upp ett antal sätt att använda denna i undervisningen. Några av dem anges nedan:

- Att nämna anekdoter kring gamla matematiker
- Ge enskilda lektioner i matematikens historia
- Uppmuntra skapande av posters eller andra projekt med ett historiskt tema
- Använda specifika historiska problem för att illustrera metoder eller lösningstekniker
- Anordna klassrums- eller hemarbetsövningar baserat på historiskt textmaterial

2.3 Vilka hinder finns för undervisning i matematikens historia?

Matematikkurserna i gymnasieskolan kan säkert av många lärare upplevas som relativt fullmatade. Mycket ska hinnas med för att täcka in alla de delar som respektive ämnesplan föreskriver. Många elever har problem att klara kurskraven och kräver extra stöd i olika former.

Med dessa förutsättningar är det lätt att förstå de lärare som ställer sig kritiska till införlivandet av matematikens historia i undervisningen. Många frågar sig förmodligen hur de ska få tiden att räcka till. En lösning kan vara att dela ut uppgifter till eleverna där de självständigt eller i grupp får söka upp och läsa om matematikens historia på egen hand. Men Fried (2001) frågar sig om detta egentligen är en lösning, då man endast överför problematiken från läraren till eleven. Han menar att man istället kan byta ut befintliga problem mot andra problem inom samma område men med en historisk anknytning. På det sättet bör man enligt honom kunna hålla sig inom tidsramen utan att påtvinga eleverna extra hemarbete. Nackdelen är att läraren måste finna relevanta ”ersättningsproblem” samt värdera och anpassa dessa med hänsyn till läroplan och elevernas nivå. Ett arbete som i vissa fall kan vara svårt och naturligtvis också belastar lärarens tidsschema. Denna nödvändiga anpassning riskerar också att om inte förvanska historien så i alla fall, genom att sätta den i dagens kontext, riskera att eleven går miste om flera av de problemställningar, överväganden och återvändsgränder som dåtidens matematiker ställdes inför. Fried uttrycker detta som att se på historien med våra moderna ögon, istället för med dåtidens. Ett exempel på detta kan vara då vi tvingas förklara historiska matematiska betraktelser med dagens symbolska notation. En del av förståelsen hur dåtidens matematiker verkligen tänkte och resonerade kan då lätt gå förlorad. Trots de problem som kan finnas är det, enligt den tyske matematikdidaktikern Lutz Führers (1992) erfarenhet, lätt att övertyga de flesta matematiklärare om vikten av att inkludera historiska aspekter på sina lektioner. Han menar att matematiklärarna borde vara väl kapabla för detta, förutsatt att någon hjälper dem att överbrygga några av deras osäkra känslor kring matematikhistorian samt metodiken för att undervisa den på ett seriöst sätt. Führer betraktar de huvudsakliga hindren för att acceptera historiska ansatser i klassrummet som:

- Kontrasten i undervisningsmetodik mellan matematik och historia
- En låg nivå av historiskt kunnande hos matematiklärarna

3 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är dels att undersöka hur lärare och elever ser på matematikens historia och dess inkluderande i matematikundervisningen, dels om det finns en diskrepans mellan olika läroboksförfattare avseende tolkning av Skolverkets intentioner om att ge eleverna möjlighet att relatera matematiken i ett historiskt sammanhang, göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande o s v enligt de formuleringar som anges i Lgy2011 och dess kommentarer. Se Sektion 1 Inledning. Nedan redovisas de frågeställningar som detta arbete söker svar på:

- Går intresse och åsikter om matematikens kulturhistoria i matematikundervisningen isär bland lärare och elever?
- Hur ser de på omfattning samt om, hur och varför vi bör undervisa om matematikens kulturhistoria?
- På vilka sätt skiljer sig läroböckerna åt?
- Har läroboksförfattarnas sätt att presentera den matematikhistoriska anknytningen någon inverkan på lärarnas möjligheter att främja elevernas intresse och viljan att lära sig mer?

4 Metod och genomförande

Studien är delvis baserad på en enkätundersökning i form av två frågeformulär. Anledning till valet av just denna metod redovisas i kommande Sektion 4.1. Det ena formuläret är riktat till lärare och det andra riktat till elever, vilka bägge inkluderar ett antal urvalsfrågor. Beroende på vad som passar bäst in på respektive fråga, kan respondenten på vissa frågor endast välja ett svarsalternativ, på vissa andra flera svarsalternativ samt har på vissa frågor dessutom möjlighet att ange egen kommentar. Formulären är skapade med hjälp av Google Formulär (Google, 2017) och distribuerade via mejl till respektive respondent. Syftet med enkätundersökningen var att försöka uttolka hur lärare och elever ser på matematikens historia samt i vilken omfattning och form de anser att undervisningen bör ske.

I Sverige är huvudmannen, skolan och i vissa fall läraren fria att välja det läromedel som han eller hon anser vara bäst lämpat som stöd för den egna undervisningen. Kvalitetssäkringen ligger på lärarna och indirekt på lärarutbildningen att man utbildar lärare till att kunna göra bra kvalitetsgranskningar av läromedel (Skolverket, 2015). Det är därmed också skolans och i förlängningen lärarens ansvar att läroplanen efterlevs i så hög grad som möjligt oberoende av det valda läromedlet. Då läromedlen ändå antas ha en betydande roll, kanske speciellt i matematikämnet (Hammenborg, 2015), har den ovan nämnda enkätundersökningen kompletterats och utökats med en läroboksjämförelse mellan fyra av de vanligaste förekommande läroboksserierna i matematik på den svenska läromedelsmarknaden: *Matematik 5000*, *Matematik Origo*, *Matematik M* och *Exponent*.

Läroboksjämförelsen knyter indirekt an till enkätundersökningen, då synen på matematikens historia och dess införlivande i matematikundervisningen, hos både lärare och elever, till viss del antas vara kopplad till både mängden av matematikhistoriskt innehåll samt det sätt på vilket läromedelsförfattarna valt att presentera det.

4.1 Val av metod

Valet av metod grundar sig på en rad på förhand uppställda kriterier och utgår från de olika metodval som föreslås i *Forskningshandboken* (Denscombe, 2014). I syfte att erhålla en hög svarsandel skulle utfrågningen vara enkel och kortfattad. Av samma anledning, samt att i största möjliga mån erhålla ärliga svar även på förmodat känsliga frågor, skulle respondenterna kunna vara anonyma. Då många elever förmodades ha en begränsad insikt i ämnet, valdes en utfrågning med färdiga svarsalternativ. För att erhålla 100% ifyllnadsgrad användes en inställning som tvingade respondenterna att avge ett svarsalternativ på varje fråga, med en inledande uppmaning att välja det alternativ som ansågs ligga närmast, i de fall respondenten inte tyckte något av svaren helt passade in. För att kunna nå ut till många elever på relativt kort tid var det dessutom en fördel med ett i stort sett självadministrativt tillvägagångssätt.

Vidare, i syfte att avsluta utfrågningen på ett trevligt sätt lades två enklare kontrollfrågor till i slutet av elevenkäten. Svaren på dessa kontrollfrågor väntades också ge en viss insikt om elevens allmänna kännedom kring ämnet. Nedan ges en kort summering av de grundval på vilka metodvalet för denna undersökning föll:

- Enkel och kortfattad
- Begränsade och valbara svarsalternativ
- Möjlighet att vara anonym
- 100% ifyllnadsgrad
- Snabb och självadministrerande
- Trevlig upplevelse

Litteraturstudien, som i första hand ska betraktas som en jämförelse mellan de olika läroboksserierna, baseras på både en kvantitativ metod och en hermeneutisk ansats där såväl mängden av historiskt innehåll liksom texternas innebörd studeras och uttolkas baserat på det sätt på vilket de framställs. De analyserade textavsnitten tolkas i sitt sammanhang istället för som enskilda ord eller meningar. Jämförelser och tolkning kring varför läroboksförfattarna utelämnat alternativt valt vissa områden framför andra ingår också i ansatsen.

Jag har i ansatsen använt nedanstående arbetsgång, vilken utgår från idéhistorikern Crister Skoglunds *Hermenuetik i praktiken* (2012). Punkt 6 har dock inte tillämpats fullt ut. Vidare ställdes i detta fall ingen hypotes innan studien påbörjats.

1. Problemformulering – Vad är det jag vill veta?
2. Förförståelse – Vad tror jag mig redan veta?
3. Instudering av bakgrundsmaterial och tidigare forskning
4. En första läsning av källmaterialet – Vad överraskas jag av? Vad saknas?
5. En första tolkning av materialet
   - Likheter/Skillnader mellan de olika källorna
   - Vad tycker författarna är viktigt?
   - Vad tar författarna som självklart?
   - Vad värjer sig författarna emot?
6. Kontextualisering – Vilka är författarna, när skrev de texterna och ur vilken horisont?
7. Slutanalys – Finns det något mönster? Stämmer min hypotes?

Resultaten från både enkätundersökningen och litteraturstudien har vägts samman och diskuterats i syfte att erhålla en ökad helhetsbild av vilka olika bakgrundsfaktorer som kan ha påverkat lärares och elevers syn på matematikens historia i skolans matematikundervisning.

4.2 Frågeenkäter

Både lärar- och elevenkäten är utformade med en inledning innehållande en kort beskrivning av anledning och syfte med frågeformuläret samt vilken tid som utfrågningen väntas ta i anspråk. Även information om fullständig anonymitet anges. Därefter följer frågor och svarsalternativ. Lärarenkäten består av 11 stycken frågor och elevenkäten 15 stycken frågor. För uppställning av frågor tillsammans med svar hänvisas till Sektion 5.1 och 5.2.

4.3 Litteraturstudie

Matematiken för gymnasieskolans nationella program är uppdelad på tre obligatoriska kurser och differentierad på tre olika utbildningsspår, a, b och c. De yrkesförberedande programmen läser a-spåret. Ekonomi-, estetiska-, humanistiska- och samhällsvetenskapsprogrammet läser b-spåret medan naturvetenskaps- och teknikprogrammet läser c-spåret. Förutom de tre obligatoriska kurserna finns de valbara kurserna Matematik 4, Matematik 5 och Matematik Specialisering. Samtliga kurser har omfattningen 100 gymnasiepoäng (Skolverket, 2011b).

Jag har för litteraturstudien valt ut första kursens a-, b- respektive c-spår för de fyra läroboksserierna *Matematik 5000*, *Matematik Origo*, *Matematik M* och *Exponent*. Jämförelsen görs i syfte att ge en bild av vilka eventuella skillnader som kan finnas med avseende på innehåll gällande matematikens historia, dels mellan de olika läroboksserierna och dels mellan a-, b- och c-spåret. Sida för sida i samtliga studerade läroböcker har genomsökts med avseende på i vilken mån textinnehållet på något sätt kan hänföras till matematikens historia eller någon av matematikhistoriens vetenskapsmän.

4.4 Urval och avgränsningar

Av tids- och resursskäl begränsades urvalet för enkätundersökningen till att omfatta endast en gymnasieskola i södra Sverige med elever uteslutande från högskoleförberedande program. Totala antalet respondenter utgörs av 5 stycken matematiklärare samt 67 stycken av deras elever fördelade på teknikprogrammet (36 elever), naturvetenskapsprogrammet (20 elever) och samhällsvetenskapsprogrammet (11 elever). Frågeformuläret skickades ut via mejl av varje deltagande matematiklärare till samtliga av deras respektive elever. Exakt hur många elever som tillfrågats är med anledning av detta förfarande något osäkert men uppskattas till mellan 100 och 110. Svarsandelen ligger således kring 65% för eleverna och 100% för lärarna.

Litteraturstudien har avgränsats till att endast omfatta de fyra ovan nämnda läroboksserierna avsedda för gymnasieskolans första matematikkurs på a-, b- och c-spåret med kurskoderna MATMAT01a, MATMAT01b och MATMAT01c (Skolverket, 2011b).

4.5 Validitet och reliabilitet

Validitet definieras som relevansen av insamlad data för det givna instrumentets förmåga att mäta det man avser att mäta. Reliabilitet är ett mått på instrumentets kvalitet genom replikerbarhet. Hög validitet nås om mätmetoden är lämplig att mäta det som faktiskt ska mätas medan hög reliabilitet nås om mätningen utförts tillräckligt väl för sitt syfte. (Metoddoktorn, 2014)

Instrumentet, det vill säga i det här fallet enkätundersökningen, ställd till lärare och elever på en gymnasieskola i södra Sverige, bedöms generellt ha både hög validitet och reliabilitet under de förutsättningar och premisser som redovisas i Sektion 4.1 och 4.4. Detta styrks bland annat av klara och tydliga frågor med få möjligheter till feltolkning samt att både lärare och elever garanterats full anonymitet. Relativt litet antal frågor såväl som litet antal respondenter är faktorer som kan ha påverkat validiteten negativt. Att dra alltför långa slutsatser av procentuella fördelningar mellan endast fem deltagande lärare kan vara vanskligt. Vidare har alla respondenter använt samma läroboksserie *Matematik 5000*, vilket i någon mån kan ha påverkat utfallet. Huruvida resultaten är generaliserbara till en större grupp går ej att utläsa från denna studie.

4.6 Etiska överväganden

Vetenskapsrådet har i sin skrift *Forskningsetiska principer* (2002) definierat fyra huvudkrav. Dessa krav benämns informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

Alla deltagare (respondenter) blev informerade om undersökningens syfte, att deltagandet var frivilligt och att svaren behandlas anonymt. Då alla deltagarna var fyllda 15 år samt att undersökningen inte bedömdes vara av etisk känslig natur, ansågs inte föräldrars samtycke nödvändiga att inhämta. Frågeenkäterna besvarades individuellt via Google Formulär (Google, 2017) som bedöms ha tillräcklig grad av konfidentialitet. Alla svar i undersökningen används endast i syfte som underlag till denna studie. Därmed anses Vetenskapsrådets alla fyra huvudkrav vara uppfyllda.

5 Resultat och tolkning - enkätundersökning

I denna sektion redovisas de resultat som framkommit ur enkätundersökningen. Resultaten är först presenterade som rådata utan kommentarer i Sektion 5.1 respektive 5.2. Först i Sektion 5.3 presenteras en sammanfattning av de samband och tolkningar som gått att utläsa ur resultaten.

5.1 Lärarnas svar på enkätundersökningen

I tabellen nedan redovisas enkätens frågor tillsammans med antal lärares svar (av totalt 5) på respektive fråga. För sammanfattning och tolkning av resultat hänvisas till Sektion 5.3. För grafiska framställningar av lärarenkätens svar hänvisas till Bilaga A.

Tabell 1 Frågeenkät ställd till lärare

Fråga	Svarsalternativ	Antal lärare
1. Vilka matematikkurser undervisar du i just nu?	Matematik 1a	2
	Matematik 1b	3
	Matematik 1c	2
	Matematik 2a	1
	Matematik 2b	2
	Matematik 2c	1
	Matematik 3a	
	Matematik 3b	2
	Matematik 3c	1
	Matematik 4	3
	Matematik 5	1
	Matematik Specialisering	
	Inga	
2. Vad heter bokserien som du använder?	Matematik 5000	5
	Matematik M	
	Övrigt …	
3. Hur viktigt tycker du som lärare det är att inkludera matematikens historia i undervisningen?	Mycket viktigt	1
	Ganska viktigt	2
	Ej viktigt alls	1
	Ingen åsikt	1
4. Hur ofta tar du upp något från matematikens historia på dina lektioner?	Flera gånger per kurs	1
	Någon gång per kurs	2
	Någon gång per termin	2
	Aldrig	
5. Vad tycker du främst ska ingå i undervisningen om matematikens historia?	Att lära sig om olika talsystem och sätt att räkna genom historien	1
	Att lära sig om kända matematikers liv och deras upptäckter	
	Tycker att båda ovanstående delar bör ingå ungefär lika mycket	4
	Tycker inte att någon del bör ingå	
6. Vad tycker du är den största fördelen med att ge eleverna kunskaper om matematikens historia?	Ger eleven ökad motivation att lära sig matematik	1
	Ger eleven ökad matematisk förståelse	
	Ger eleven ökad allmänbildning	3
	Ser inga fördelar alls	
	Övrigt … (svar: ”Kan göra undervisningen mer spännande och omväxlande”)	1

7. Vad tror du kan vara det största hindret från att inkludera matematikens historia i undervisningen?	Lärarnas bristande kunskaper	
	Lärarnas bristande intresse	
	Elevernas bristande intresse	
	Tidsbrist	4
	Övrigt … (svar: ”Tidsbrist och lärarens bristande kunskaper”)	1
8. Har du som lärare fått någon utbildning i matematikens kulturhistoria?	Ja - under min studietid	3
	Ja - som fortbildning	
	Nej	2
9. Skulle du önska mer lärarfortbildning om matematikens kulturhistoria?	Ja	5
	Nej	
10. Skulle du vilja att frågor om matematikens historia fanns med på matematikproven?	Ja	
	Nej	4
	Ingen åsikt	1
11. På vilket sätt skulle du föredra att undervisa om matematikens historia?	Invävt i den ordinarie[6] matematikundervisningen	3
	På separata lektioner endast avsedda för matematikens historia	
	Vill helst inte undervisa om matematikens historia alls	2

5.2 Elevernas svar på enkätundersökningen

I tabellen nedan redovisas enkätens frågor tillsammans med antal elevers svar (av totalt 67) på respektive fråga. För sammanfattning och tolkning av resultat hänvisas till Sektion 5.3. För grafiska framställningar av elevenkätens svar hänvisas till Bilaga B.

Tabell 2 Frågeenkät ställd till elever

Fråga	**Svarsalternativ**	**Antal elever**
1. Vilket gymnasieprogram går du på?	Ekonomiprogrammet	
	Estetiska programmet	
	Humanistiska programmet	
	Naturvetenskapsprogrammet	20
	Samhällsvetenskapsprogrammet	11
	Teknikprogrammet	36
2. Vilken matematikkurs läser du just nu?	Matematik 1a	1
	Matematik 1b	10
	Matematik 1c	
	Matematik 2a	
	Matematik 2b	
	Matematik 2c	16
	Matematik 3a	
	Matematik 3b	
	Matematik 3c	10
	Matematik 4	23

[6] Enkätfrågan är olämpligt formulerad. Bättre hade varit ’vid sidan av den övriga matematikundervisningen’.

	Matematik 5	7
	Matematik Specialisering	
3. Vad heter din mattebok?	Matematik 5000	67
	Matematik M	
	Övrigt ...	
4. Brukar du läsa texterna om matematikens historia i läroboken?	Ja – alltid	
	Ja – ibland	21
	Aldrig	46
5. Händer det att läraren nämner något om den texten på matematiklektionen?	Ja – ofta	2
	Ja – ibland	15
	Sällan	27
	Aldrig	23
6. Hur mycket undervisning i matematikens historia har du haft under din tid på gymnasiet?	Ingen alls	25
	Vid något eller några enstaka tillfällen	37
	Ganska ofta (några gånger per kurs)	3
	Mycket ofta (några gånger per månad eller mer)	2
7. Upplevde du denna undervisning som givande och/eller intressant?	Ja	20
	Nej	9
	Vet ej	18
	Ej fått någon undervisning i matematikens historia	20
8. Skulle du vilja ha mer undervisning i matematikens historia än vad du fått hittills?	Ja	21
	Nej	29
	Vet ej	17
9. Vad förknippar du mest med matematikens kulturhistoria?	Att lära sig om olika talsystem och sätt att räkna genom historien	19
	Att lära sig om kända matematiker och deras upptäckter	38
	Vet ej	10
10. Vilka delar skulle du helst vilja studera?	Lära mig om olika talsystem och sätt att räkna genom historien	13
	Lära mig om kända matematiker och deras upptäckter	18
	Lika stora delar av ovanstående	26
	Vet ej	14
11. Vilket av nedanstående föredrar du helst?	Att matematikens historia blandas in i den ordinarie[7] undervisningen	39
	Att matematikens historia ges på separata lektioner	10
	Vill helst inte ha någon matematikens historia alls	18
12. Upplever du att undervisning i matematikens historia bidrar till ökad förståelse för matematik?	Ja	20
	Nej	20
	Vet ej	27

[7] Enkätfrågan är olämpligt formulerad. Bättre hade varit 'vid sidan av den övriga matematikundervisningen'.

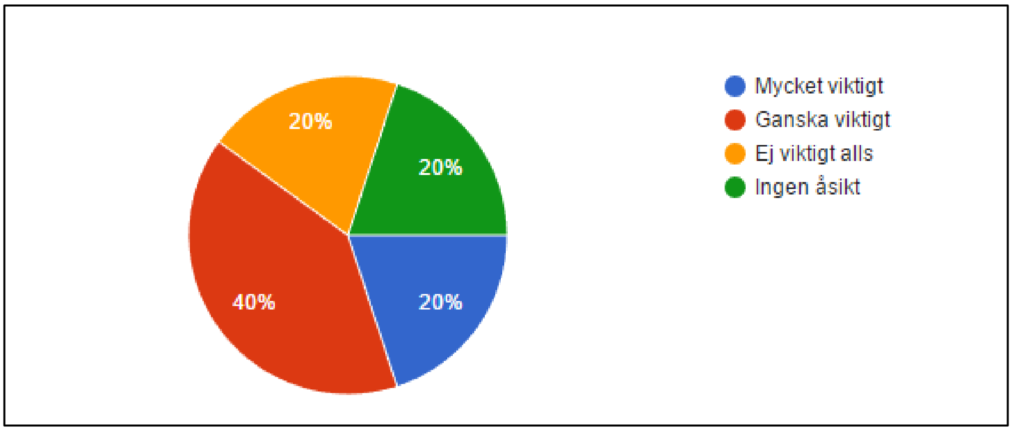
13. Skulle du kunna tänka dig att läsa om matematikens kulturhistoria som en fristående separat kurs?	Ja	9
	Nej	54
	Vet ej	4
14. Vilka tre av nedanstående personer tror du är kända matematiker?	Elton John	2
	Leonard Euler	47
	Björn Ranelid	2
	Christer Fuglesang	5
	Leonardo Fibonacci	47
	Alex Schulman	2
	Sean Penn	10
	Carl Friedrich Gauss	50
	Harry Truman	4
	Nadia Comâneci	30
15. Ungefär vilken tidsperiod kännetecknas som den grekiska storhetstiden i matematik?	1600-600 f.Kr	16
	700 f.Kr – 300 e.Kr	37
	500-1500 e.Kr	9
	1200-1800 e.Kr	5

5.3 Sammanfattning och tolkning av resultat

Nedan ges en sammanfattning och tolkning av de resultat som erhållits från enkätundersökningen. Vidare diskuteras eventuella samband mellan respondenternas svar och i ett par fall ställs dessutom lärarnas svar mot elevernas och jämförs sinsemellan. Variationen bland elevernas svar i undersökningen bedöms vara relativt oberoende av vilket av de tre gymnasieprogrammen eleverna går på och några direkta samband därvidlag har inte kunnat konstaterats. Alla elever har använt läroboksserien *Matematik 5000* men till skillnad från de övriga följer eleverna från samhällsprogrammet b-spåret i matematik. Eftersom litteraturstudien påvisat stora skillnader gällande matematikhistoriskt innehåll mellan b- och c-spåret just för denna läroboksserie kan detta i någon mån ha påverkat utfallet. Se Tabell 3 i Sektion 6.1.

Notera att tolkningarna nedan uteslutande baseras på svarsunderlaget från enkätundersökningen. Se vidare urval och avgränsningar för enkätundersökningen redovisade i Sektion 4.4. En mer övergripande och djupare diskussion ges i Sektion 7.

Åsikterna kring vikten av att inkludera matematikens historia i undervisningen tycks variera mellan lärarna. Likväl anger alla lärarna att de minst någon gång per termin eller oftare tar upp något från matematikens historia på deras lektioner, även om variationen i fråga om omfattning också bedöms som relativt stor. Samtidigt svarar drygt en tredjedel av eleverna att de aldrig erhållit någon undervisning i matematikens historia under sin tid på gymnasiet och att läraren ej heller nämnt något om lärobokens matematikhistoriska text under lektionen. Det ska här nämnas att ingen av eleverna har någon annan matematiklärare än dem som finns med i undersökningen. Det finns således en noterbar diskrepans mellan lärarnas utsagor och elevernas upplevelse gällande omfattningen.

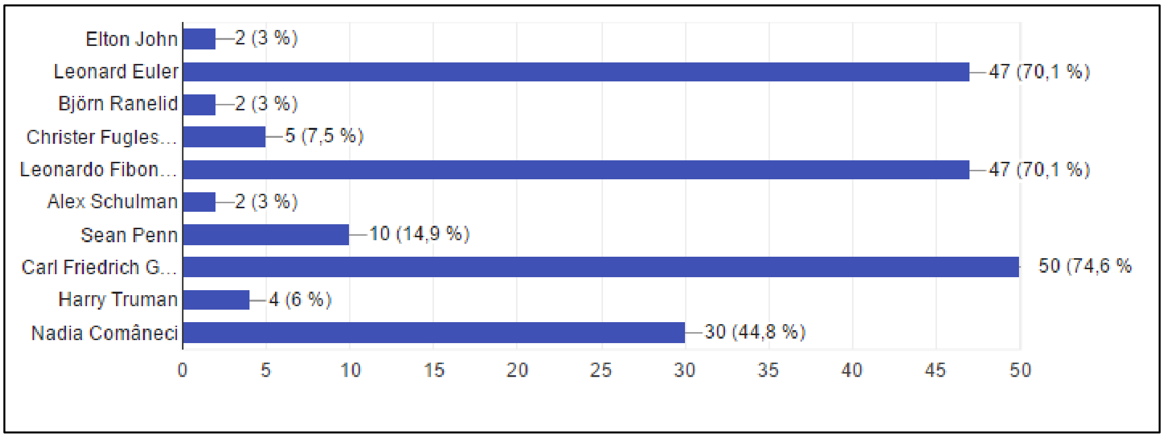


Figur 4. Grafen ovan visar lärarnas svar då de ombads ange hur viktigt de anser det vara att inkludera matematikens historia i undervisningen.

Intresset för matematikens historia tycks vara begränsat bland eleverna och detta oberoende av vilket gymnasieprogram eleverna går på. En övervägande majoritet av eleverna svarar att de aldrig läser texterna om matematikens historia i läroboken. En ännu större andel svarar att de inte skulle kunna tänka sig att läsa om matematikens historia som en fristående separat kurs. Nästan hälften anger också att de inte vill ha mer undervisning i matematikens historia utöver vad de redan fått. Bland lärarna tycks intresset vara större då alla svarar ja på frågan om de skulle önska mer lärarfortbildning om matematikens kulturhistoria.

Två av lärarna uppger att de tidigare inte erhållit någon utbildning i matematikens historia vare sig under utbildningstiden eller som fortbildning. En viss majoritet av lärarna anger att de tycker det är mycket eller ganska viktigt att inkludera matematikens historia i undervisningen. Den enda lärare som ej tyckte detta var också den enda läraren som främst förespråkade alternativet *olika talsystem och sätt att räkna genom historien* framför alternativet att undervisa *om kända matematikers liv och deras upptäckter*. Övriga lärare förespråkade ungefär lika delar av bägge alternativen. Elevernas svar var väldigt spridda när dom ställdes inför samma frågeställning. Värt att notera är att två av de fem lärarna svarar att de helst inte vill undervisa i matematikens historia alls. De tre som svarar att de vill undervisa om matematikens historia, svarar alla att de då förordar denna invävd i matematikundervisningen framför separata lektioner för ändamålet. Samma alternativ förordar också en övervägande majoritet av eleverna. Speciellt intressant är kanske att ingen av lärarna anger ökad matematisk förståelse som största fördelen med att undervisa matematikens historia medan hela 30% av eleverna upplever att undervisning i matematikens historia bidrar till just ökad förståelse för matematik.

Alla de fem lärarna anger tidsbrist som det största hindret från att inkludera matematikens historia i undervisningen. En av lärarna lägger dessutom till skälet bristande kunskaper. Alla lärarna utom en svarar också att de inte vill se frågor om matematikens historia på matematikproven. En lärare svarar ingen åsikt på denna fråga. Ovanstående utslag skulle kunna tolkas som att huvuddelen av lärarna ger matematikens historia relativt låg prioritet då denna ställs mot övrig matematikundervisning. De två avslutande kunskapsfrågorna tyder ändå på att många elever trots allt snappat upp en del kring matematikens historia. Se Figur 5 nedan. Om dessa kunskaper kommer från skolan eller världen utanför framgår dock ej av denna undersökning. Då frågeformuläret saknade tidsbegränsning kan det inte uteslutas att några elever ”googlat” fram informationen, men det kan ju i så fall även det ses som en positiv faktor ur lärandesynpunkt. De har då visat initiativförmåga och handlingskraft att självständigt söka upp den information de behöver för att lösa uppgiften.



Figur 5. Grafen ovan visar elevernas svar då de ombads peka ut tre kända matematiker ur en samling av kända personer mer eller mindre godtyckligt valda från vitt skilda områden.

6 Resultat och tolkning - litteraturstudie

I denna sektion redovisas i korta ordalag den struktur med vilken det matematikhistoriska innehållet presenteras, samt vilka vetenskapsmän som nämns i respektive lärobok. Likaså belyses och tolkas skillnader mellan de studerade läroboksserierna såväl som skillnader mellan dess a-, b- och c-spår, med avseende på både mängd och innehåll av matematikhistorisk fakta. Fokus har riktats mer mot dessa skillnader framför det matematikhistoriska innehållet i sig. I Tabell 3 ges en sammanställning av vilka läroboksavsnitt alternativt faktarutor som innehåller någon form av matematikhistoriskt innehåll i respektive lärobok. I samma tabell anges även vilka historiska vetenskapsmän som benämns. Utan att redovisa detaljerat innehåll ska tabellen i första hand betraktas som en översiktlig bild över mängden matematikhistoriskt material i respektive lärobok.

6.1 Vad skiljer läromedlen åt?

Som tidigare angetts i Sektion 4.3, redovisas här en jämförelse mellan första kursens a-, b-respektive c-spår för de fyra läroboksserierna *Matematik 5000*, *Matematik Origo*, *Matematik M* och *Exponent*. Alla gör de anspråk på att vara utformade utifrån läroplanen Lgy2011 (Skolverket, 2011a). Matematik 5000 ger ut två olika läroböcker för a-spåret. Röd lärobok riktar sig till de elever som studerar på de serviceinriktade yrkesprogrammen Handel och administration, Hotell och turism, Restaurang och livsmedel samt Hantverk. Gul lärobok riktar sig till de elever som studerar på de tekniska yrkesprogrammen Bygg och anläggning, El och energi, Fordon och Transport, VVS och fastighet samt industriteknik. Övriga läroboksserier har en gemensam bok för a-spåret. Totalt ingår alltså 13 stycken läroböcker i jämförelsen.

I de två läroboksserierna *Matematik 5000* och *Matematik Origo* har författarna valt att redovisa det mesta innehållet gällande matematikens historia i en form av faktarutor, som var och en i regel består av en sida eller ett uppslag. *Matematik 5000* benämner i alla sina böcker faktarutorna ”Historik”. *Matematik Origo* benämner i bok 1b och 1c faktarutorna ”Historia” medan man i boken 1a valt benämningen ”Samhälle och yrkesliv”. I *Matematik Origo* 1a speglas matematiken antingen i ett historiskt *eller* samhälleligt sammanhang och lyfter ofta fram hur den används i yrkeslivet. Det förekommer i regel, med några undantag, en faktaruta per kapitel i dessa bägge läroboksserier. Läroboksserien *Matematik M* innehåller några mindre historiska faktarutor bestående av tre till fyra meningar om en vetenskapsman. *Matematik M 1c* skiljer sig markant från läroboksseriens a- och b-spår genom att denna, förutom ett par små faktarutor, dessutom redovisar innehåll ur matematikens historia som text i de flesta kapitlens inledande del. I läroboksserien *Exponent* använder man sig inte alls av faktarutor. Här ges det historiska innehållet med några rader löpande text insprängt i några av kapitlen. I *Exponent 1b* och *1c* ges dessutom en mer utförlig text i kapitlens inledande del på liknande sätt som i *Matematik M 1c*.

Faktarutorna i *Matematik 5000* skiljer sig något beroende på a-, b- eller c-spår. Läroboken Blå 1c innehåller en inledande faktaruta kallad ”Från vargben till datorer” som saknas i läroboksseriens böcker för a- och b-spåret. I både lärobok *Gul 1a* och *Röd 1a* liksom *Grön 1b* nöjer man sig med att presentera två historiska talsystem, till skillnad mot lärobok *Blå 1c* där man presenterar tre historiska talsystem. Både lärobok *1a Röd* och lärobok *1a Gul* innehåller tre historiska faktarutor varav två är identiska. I den tredje faktarutan har man av någon anledning valt text om talet pi i den röda boken och text om Pythagoras sats i den gula boken. Med undantag för dessa skillnader är det i allt väsentligt samma historiska mängd och faktainnehåll för a- och b-spåret, medan c-spåret skiljer ut sig med avsevärt större omfattning.

Det historiska innehållet i *Matematik Origo 1b* är i stort sett likvärdigt med innehållet i *Matematik Origo 1c*. Den förstnämnda läroboken innehåller en faktaruta om sjuksköterskan Florence

Nightingale (i egenskap av statistiker) samt ett par korta meningar om Herman Weyl och James Maxwell, vilka saknas i den sistnämnda. *Matematik Origo 1a* innehåller totalt sett något mindre matematikhistoriskt material, men de delar som presenteras är identiska med de övriga. I den programanpassade delen om geometri behandlas Pythagoras sats, men utan att nämna någonting om vem han var. Läroboksserien *Matematik Origo* har generellt en något vidare syn på begreppet matematikhistoria jämfört med de andra. Man inkluderar här exempelvis Big-Mac index och opinionsundersökningar under det matematikhistoriska paraplyet. Innehåll som man kanske inte vanligtvis förknippar med matematikens historia.

Figur 6 Exempel på mindre faktaruta i läroboken *Matematik M 1c*

I läroboken *Matematik M 1a* ges en liten, vad man skulle kunna kalla en historisk faktaruta med fyra meningar om Pythagoras. I fördjupningsavsnitt kapitel 7 Geometri ges följande bildtext: ”Redan för mer än 2000 år sedan kunde man bestämma platsers lägen, dvs. koordinaterna latitud och longitud …”. Vidare ges i fördjupningsavsnittet kapitel 8 Trigonometri, följande textrad som i någon mån kan hänföras till matematikens historia: ”Trigonometri uppstod för cirka 2000 år sedan och tillämpas idag bl.a. inom lantmäteri och astronomi …”. Detta är i princip allt som finns skrivet om matematikens historia i läroboken *Matematik M 1a*. Samma faktaruta om Pythagoras samt bild och bildtext enligt ovan återfinns i läroboken *Matematik M 1b* med tillägg av två ytterligare små faktarutor om de franska vetenskapsmännen Descartes och Pascal. I *Matematik M 1c* har alla kapitel, utom kap 5 Sannolikhet och statistik, en inledande text med historiskt innehåll. Innehållet är dock mycket kortfattat. Exempelvis nämns maya-folkets och babyloniernas talsystem men de visas ej. Generellt innehåller läroboksserien *Matematik M* mindre matematikhistoriskt innehåll än de övriga.

I läroboken *Exponent 1a* anges visst historiskt innehåll i kap 5 Geometri och i kap 6 Sannolikhet och statistik. I dessa avsnitt nämns några vetenskapsmän i relativt korta ordalag. *Exponent 1b* och *1c* är i stort sett identiska med avseende på matematikhistoriskt faktainnehåll. *Exponent 1b* innehåller dock en sektion om gyllene snittet och Fibonaccis talföljd, vilket saknas i *Exponent 1c*. Både *Exponent 1b* och 1c innehåller väsentligt större mängd matematikhistoria än *Exponent 1a*. I den sistnämnda nämns dock matematikerna Cardano, Pascal och Fermat vilka inte omnämns i Exponent 1b och 1c. Generellt innehåller *Exponent* fler omnämningar av kända vetenskapsmän än övriga läroboksserier.

Skillnader mellan läroboksserierna finns också i innehållsförteckningen. I *Matematik 5000* och *Matematik Origo* anges sidhänvisning till de historiska faktarutorna i innehållsförteckningen medan det varken i *Matematik M* eller *Exponent* anges någon hänvisning till matematikhistoriskt innehåll överhuvudtaget.

Bortsett från några få undantag, med viss övervikt för *Matematik 5000*, anges inte någon matematikhistorisk anknytning i övningsuppgifterna hos någon av de studerade läroböckerna. Ett av undantagen återges nedan tillsammans med en matematikhistorisk text, vilken refererar till övningsuppgiften 1138. Utdragen är tagna från *Matematik 5000 1c* i kapitlet Primtal – delbarhet och faktorisering (s. 13):

> Redan Euklides, som var en grekisk matematiker på 300-talet f Kr, visade att listan på primtal aldrig tar slut. Det finns hur stora primtal som helst! (Se Euklides bevisidé i uppgift 1138.) Med hjälp av kraftfulla datorer jagar dagens matematiker allt större primtal. Det största kända primtalet (år 2008) består av 13 miljoner siffror!
>
> ....
>
> **1138** Euklides bevisade att antal primtal är oändligt med ett s k motsägelsebevis: Vi antar t ex att bara primtalen 2, 3, 5 och 7 finns. Bilda talet $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$. Förklara varför n måste vara ytterligare ett primtal och varför vårt antagande är fel.

Det förekommer också att man anger uppgiften som ett referat tillsammans med en referens till en historisk person. Exemplet nedan är hämtat från läroboken *Matematik Origo 1a* i kapitlet 2 Tal, övningsuppgift 47 (s. 81):

> **47** ”Ett träd står 21 längdenheter ovan jord och har 7/12 av dess hela längd under jorden. Hur långt är hela trädet?” (Leonardo från Pisa, 1180-1250).

För alla böcker gäller att dessa generellt presenterar relativt kortfattade historiska tillbakablickar eller referenser. Nedan visas två exempel tagna från *Matematik Origo 1c* och *Matematik M 1c*. Något längre presentationer görs via de större faktarutorna i läroboksserierna *Matematik 5000* och *Matematik Origo*. Någon hänvisning eller information om ytterligare fördjupning ges dock ej.

> De första trigonometriska tabellerna konstruerades i Grekland runt 150 f.Kr. av Hipparchos för att underlätta astronomiska observationer. Han gjorde mycket noggranna beräkningar av årets längd och månens omloppstid, samt fastställde en avancerad metod för att bestämma geografiska positioner med hjälp av latituder och longituder. Han katalogiserade också närmare tusen stjärnor och lade grunden för den moderna trigonometrin. (Matematik Origo 1c, s. 267)
>
> Det arabiska ordet al-jabr, som betyder återförening, koppling, är ursprunget till begreppet algebra. Ordet finns i titeln till en lärobok som skrevs av den persiske matematikern al-Khwarizmi på 800-talet. (Matematik M 1c, s. 61)

I Tabell 3 nedan listas en schematisk sammanställning av det historiska innehållet respektive angivna vetenskapsmän i varje lärobok. I vissa fall anges ingen klar titel för det historiska innehållet i läroboken. I dessa fall anges här istället avsnittets titel från vilket det matematikhistoriska innehållet hämtats.

Tabell 3. Schematiskt innehåll av matematikens historia i den första matematikkursen ur de fyra läroboksserierna Matematik5000, Matematik Origo, Matematik M och Exponent.

Lärobok	**Avsnittets eller faktarutans titel innehållande historiskt faktainnehåll**	**Angivna vetenskapsmän totalt**
Matematik 5000 1a Röd (Alfredsson et al., 2011a)	Historik: Två historiska talsystem (s. 21) Det egyptiska talsystemet Mayafolkets talsystem Historik: Varifrån kommer procenttecknet? (s. 75) Historik: Talet π – historiska fakta (s. 222)	Arkimedes (s. 222)
Matematik 5000 1a Gul (Alfredsson et al., 2011b)	Historik: Två historiska talsystem (s. 21) Det egyptiska talsystemet Mayafolkets talsystem Historik: Varifrån kommer procenttecknet? (s. 73) Historik: Pythagoras sats (s. 230)	Pythagoras (s. 230)
Matematik 5000 1b Grön (Alfredsson et al., 2011c)	Talsystem med olika baser (s. 44) Historik: Två historiska talsystem (s. 57) Det egyptiska talsystemet Mayafolkets talsystem Historik: Varifrån kommer procenttecknet? (s. 89) Historik: Talet π – historiska fakta (s. 198)	Arkimedes (s. 198)
Matematik 5000 1c Blå (Alfredsson et al., 2011d)	Historik: Från vargben till datorer (s. 8) Primtal – delbarhet och faktorisering (s.13) Negativa tal (s. 16) Räkna med bråk (s. 23) Talsystem med olika baser (s. 44) Historik: Tre historiska talsystem (s. 47) Det egyptiska talsystemet Det babyloniska talsystemet Mayafolkets talsystem Algebraiska uttryck (s. 98) Ekvationsbegreppet (s. 107) Formler (s. 127) Geometri och algebra (s. 156) Historik: Talet π – historiska fakta (s. 163) Geometri och bevis (s. 171) Historik: Pythagoras Sats (s. 186) Historik: Sannolikhetslärans födelse (s. 247) Koordinatsystem (s. 278)	al-Khwarizmi (s. 98) Arkimedes (s. 163) Rene Descartes (s. 278) Albert Einstein (s. 127) Euklides (s. 13, 15, 156,171) Pierre de Fermat (s. 247) Fibonacci (s. 213) Blaise Pascal (s. 247) Pythagoras (s. 186) Robert Recorde (s. 107)

Matematik Origo 1a (Olofsson et al., 2017)	S&Y: Att mäta med kroppen (s. 18) S&Y: Talsystem genom historien (s. 74) Det egyptiska talsystemet Det babyloniska talsystemet Mayafolkets talsystem Det romerska talsystemet Det indiska talsystemet och arabiska siffror Datorn och det binära talsystemet S&Y: Fibonaccis talföljd (s. 126) S&Y: Procenttecknet och Big Mac-index (s. 176) S&Y: Opinionsundersökningar (s. 206) S&Y: Sannolikhetslära och spel (s. 237) S&Y: Geometri och arkitektur (s. 343)	Pierre de Fermat (s. 237) Leonardo Fibonacci (s. 126) Blaise Pascal (s. 237)
Matematik Origo 1b (Szabo et al., 2011a)	Historia: Florence Nightingale (s. 19) Historia: Talsystem genom historien (s. 66) Det egyptiska talsystemet Det babyloniska talsystemet Mayafolkets talsystem Det romerska talsystemet Det indiska talsystemet och arabiska siffror Datorn och det binära talsystemet Historia: Fibonaccis talföljd (s. 117) Historia: Procenttecknet och Big Mac-index (s. 152) Historia: Kryptering (s. 194) Hemlig skrift Krypteringsmaskiner Historia: Opinionsundersökningar (s. 222) Historia: Sannolikhetslära och spel (s. 251) Symmetri (s. 280) Satser och bevis (s. 291) Historia: Det finns ingen kungsväg (s. 299) Euklides Elementa Ord av Euklides	Euklides (s. 291, 299) Leonardo Fibonacci (s. 117) Pierre de Fermat (s. 251) James Maxwell (s. 280) Florence Nightingale (s. 19) Blaise Pascal (s. 251) Hermann Weyl (s. 280)
Matematik Origo 1c (Szabo et al., 2011b)	Historia: Talsystem genom historien (s. 46) Det egyptiska talsystemet Det babyloniska talsystemet Mayafolkets talsystem Det romerska talsystemet Det indiska talsystemet och arabiska siffror Datorn och det binära talsystemet Historia: Fibonaccis talföljd (s. 97) Historia: Procenttecknet och Big Mac-index (s. 133) Historia: Kryptering (s. 178) Hemlig skrift Krypteringsmaskiner Historia: Opinionsundersökningar (s. 206) Historia: Sannolikhetslära och spel (s. 235) Satser och bevis (s. 254) Sinus och cosinus (s. 267) Historia: Det finns ingen kungsväg (s. 287) Euklides Elementa Ord av Euklides	Euklides (s. 254, 287) Leonardo Fibonacci (s. 97) Pierre de Fermat (s. 235) Blaise Pascal (s. 235) Hipparchos (s. 267)

Matematik M 1a (Holmström et al., 2011a)	Pythagoras sats[8] (s. 290)	Pythagoras (s. 290)
Matematik M 1b (Holmström et al., 2011b)	Rita grafer (s. 195) Minst en vinst (s. 242) Pythagoras sats (s. 294)	Rene Descartes (s. 195) Blaise Pascal (s. 242) Pythagoras (s. 294)
Matematik M 1c (Sjunnesson et al., 2011)	Taluppfattning och aritmetik (s. 7) Positionssystemet och olika talbaser (s. 37) Algebra och ekvationer (s. 61) Omskrivning av formler (s. 98) Geometri (s. 111) Geometriska satser och bevis (s. 112) Pythagoras sats (s. 126) Trigonometri (s. 132) Samband och förändring (s. 173)	al-Khwarizmi (s. 61) Erathostenes (s. 111) Euklides (s. 112) Galileo Galilei (s. 173) Heron (s. 98) Johannes Kepler (s. 173) Pythagoras (s. 126)
Exponent 1a (Johansson et al., 2011)	Geometri (s. 183) Talet π (s. 203) Kvadratrot (s. 210) Pythagoras sats (s. 211) Trigonometri[9] (s. 231) Sannolikhetslära (s. 285)	Arkimedes (s. 203) Girolamo Cardano (s. 285) Rene Descartes (s. 210) Pierre de Fermat (s. 285) Leonardo Fibonacci (s. 210) Hipparchos (s. 231) Blaise Pascal (s. 285) Bartholomaeus Pitiscus (s. 231) Pythagoras (s. 211) Christoff Rudollf (s. 210)
Exponent 1b (Gennow et al., 2011a)	Talsystem (s. 48) Romerska talsystemet Decimala talsystemet Babyloniska talsystemet Binära talsystemet Algebra i olika sammanhang (s. 63) Geometri i olika sammanhang (s. 117) Cirkeln (s. 123) Gyllene snittet (s. 137) Argumentation, definition, axiom, sats och bevis (s. 140) Gruppaktivitet, Pythagoras sats (s. 144) Procenträkning i olika sammanhang (s. 153) Funktioner i olika sammanhang (s. 197) Koordinatsystemet (s. 198) Begrepp och enkla slumpförsök (s. 243)	al-Khwarizmi (s. 63) Aristoteles (s. 140) Jean Bernoulli (s. 197) Nicolaus Copernicus (s. 140) Rene Descartes (s. 198) Diofantos (s. 63) Peter Dirichlet (s. 197) Euklides (s. 117) Leonard Euler (s. 123, 197) Leonardo Fibonacci (s. 137) Andrey Kolmogorov (s. 243) Gottfried W. von Leibniz (s. 197) Pythagoras (s. 144)
Exponent 1c (Gennow et al., 2011b)	Potens med rationell exponent (s. 52) Talsystem (s. 63) Romerska talsystemet Decimala talsystemet Babyloniska talsystemet Binära talsystemet Algebra i olika sammanhang (s. 83) Geometri i olika sammanhang (s. 141) Cirkeln (s. 147) Koordinatsystemet (s. 157) Trigonometri (s. 159) Argumentation, definition, axiom, sats och bevis (s. 175) Procenträkning i olika sammanhang (s. 189) Gruppaktivitet, Pythagoras sats (s. 179) Funktioner i olika sammanhang (s. 237) Begrepp och enkla slumpförsök (s. 279)	al-Khwarizmi (s. 83) Aristoteles (s. 175) Jean Bernoulli (s. 237) Nicolaus Copernicus (s. 175) Rene Descartes (s. 157) Diofantos (s. 83) Peter Dirichlet (s. 237) Euklides (s. 141) Leonard Euler (s. 147, 237) Andrey Kolmogorov (s. 279) Gottfried W. von Leibniz (s. 237) Pythagoras (s. 179)

[8] Avsnittet läses endast av vissa yrkesprogram.
[9] Avsnittet läses endast av vissa yrkesprogram.

6.2 Sammanfattning och tolkning av resultat

Nedan ges en sammanfattning och tolkning av de resultat som erhållits från litteraturjämförelsen. En mer övergripande och djupare diskussion ges i Sektion 7.

Studien visar kvantitativa skillnader mellan de olika läroboksserierna, både med avseende på textmassa med matematikhistoriskt faktainnehåll och med avseende på antalet namngivna vetenskapsmän. Totalt sett är läroboksserierna *Exponent*, *Matematik Origo* och *Matematik 5000* relativt jämbördiga med avseende på kvantitet. Läroboksserien *Matematik M* ger däremot generellt sett mindre mängd jämfört med de övriga. Studien visar också stora skillnader mellan a-, b- och c-spåret inom varje läroboksserie. I *Matematik Origo* och *Exponent* är b- och c-spåret tämligen likartade med avseende på mängden matematikhistoriskt innehåll. I läroboksserierna *Matematik 5000* och *Matematik M* skiljer c-spåret ut sig med avsevärt mer innehåll jämfört med a- och b-spåret. På a-spåret är det i alla läroboksserierna mer sparsamt med matematikhistoriskt innehåll jämfört med de övriga.

Faktainnehåll och valda delar ur matematikens historia varierar även det stort mellan läroboksserierna. Historieinnehållet har dock i regel en viss koppling till det område inom matematiken som respektive avsnitt behandlar. Läroboksförfattarna har till synes valt ut de delar ur matematikens historia som de själva ansett vara mest relevanta i anslutning till respektive moment inom det centrala innehållet. En jämförelse mellan vilka vetenskapsmän som anges visar också en betydande skillnad mellan läroboksserierna. Några få vetenskapsmän förekommer dock mer frekvent än andra, exempelvis Pythagoras, Arkimedes och Euklides.

Skillnader noteras också avseende det sätt på vilket det matematikhistoriska innehållet presenteras. Författarna till *Matematik 5000* och *Matematik Origo* har i huvudsak valt stora helsides faktarutor medan man till *Matematik M* valt några få mindre faktarutor kombinerade med korta matematikhistoriska texter i anslutning till övrigt matematiskt innehåll. I *Matematik Exponent* är faktarutorna helt ersatta med liknande korta texter. Man skulle kunna tolka denna skillnad som att författarna av *Matematik M* och *Exponent* förordat en mer inkluderande form för det matematikhistoriska faktainnehållet, i motsats till *Matematik 5000* och *Matematik Origo* där man förordat en högre grad av separering mellan matematikhistorian och övrig matematikundervisning.

Utifrån studien noteras även att man, bortsett från några få undantag, inte anger någon matematikhistorisk anknytning i övningsuppgifterna hos någon av de studerade läroboksserierna. Gemensamt för dem alla är också att det grekiska alfabetet inte används eller återges i någon form, förutom bokstaven pi (π). Exempelvis anger man vinklar med de latinska gemenerna u, v, x istället för α, β, γ som var brukligt i äldre matematikböcker och som ofta används i utländsk matematisk litteratur. Ska detta tolkas som en förenkling, modernisering eller en negligering av den antika grekiska matematiken och dess upphovsmän?

Vidare noteras att bland alla studerade läroböcker omnämns endast en kvinna, sjuksköterskan Florence Nightingale (här i egenskap av statistiker), och det i läroboken *Matematik Origo 1b*. Varför man valt just henne och att bara presentera henne i b-spårets lärobok är svårt att uttolka.

7 Slutsatser och diskussion

Jag har i detta arbete försökt utröna lärares och elevers intresse och åsikter kring prioritet och inkluderande av matematikens kulturhistoria i matematikundervisningen. Jag har också försökt klargöra huruvida det finns en diskrepans hos läromedelsförfattare avseende tolkning av Skolverkets intention om att ge eleverna möjlighet att relatera matematiken till ett historiskt sammanhang (Skolverket, 2011a). Dessutom har frågor gällande hur och varför vi bör undervisa om matematikens kulturhistoria, liksom eventuella hinder diskuterats ur olika synvinklar.

Resultatet av studien visar att undervisning i matematikens historia prioriteras relativt olika bland lärarna och den ges i huvudsak låg prioritet då den ställs mot matematikundervisning i exempelvis aritmetik, algebra eller geometri. Slutsatsen baseras på lärarnas svar om hur de ser på vikten av att inkludera matematikens historia, att de ser bristen på tid som största hindret för detta, samt att de unisont förkastar frågor om matematikens historia på matematikproven. Studien visar också att omfattningen tycks variera stort och vara beroende av lärarens individuella engagemang. Man kan fråga sig på vilken grund lärarna värderar olika delar av läroplanens innehåll. Är det kanske en kombination av vana, fördomar och ämneskultur?

Vidare visar sig intresset vara begränsat hos merparten av eleverna. Man kan spekulera i vad detta beror på. Då många elever uppger att de aldrig fått någon undervisning i matematikens historia, kan en orsak vara att de helt enkelt har svårt att relatera till vad sådan undervisning egentligen innebär eller kan innebära. Vissa elever kan ha förväxlat innebörden av intresse och plikt. I så fall kan en annan orsak vara avsaknaden av examination kring kunskaper i matematikens historia. Eleverna kan därmed känna att de hellre lägger tid och kraft på de delar som påverkar deras betyg. Sättet på vilket läroboken presenterar det historiska faktainnehållet, liksom sättet på vilket deras lärare framfört matematikens historia, kan naturligtvis också spela in. Oavsett orsak kan man naturligtvis ställa sig frågan om man behöver ta hänsyn till graden av intresse hos eleverna. Ett något större intresse noteras däremot hos lärarna, som dock i relativt hög andel själva saknar utbildning i matematikens historia. Ett par av lärarna uppger att de helst inte vill undervisa om matematikens historia alls, vilket kanske kan grunda sig på en viss osäkerhet. Jämför med de slutsatser som Führer (1992) dragit, vilka anges i Sektion 2.3, där han bland annat pekar på kontrasten i undervisningsmetodik mellan matematik och historia samt generellt en låg nivå av historiskt kunnande hos matematiklärarna. Lärarna vill emellertid gärna erhålla fortbildning i ämnet.

Både lärare och elever tycks vara eniga om att föredra undervisning om matematikens historia som invävd i matematikundervisningen framför separata lektioner avsedda för ändamålet, det som Jankvist (2009) kallar den modulära metoden. Jämför Sektion 2.2. När det gäller synen på matematikhistoriens innehåll i undervisningen tycks det råda en relativt stor enighet om att olika talsystem och sätt att räkna genom historien tillskrivs ungefär lika stor vikt som kända matematikers liv och deras upptäckter. Olika talsystem är också något som de allra flesta läroböckerna behandlar i någon form. Man kan spekulera i varför just historiska talsystem prioriterats av läroboksförfattarna. Ligger det en föreställning om att kunskapen om andra talsystem bidrar till en ökad förståelse för vårt eget? Risken är väl kanske att det istället bara förvirrar för den unga eleven.

Skolverkets formuleringar är, om inte vaga så i alla fall öppna för ganska vida tolkningar. Detta visar sig inte minst i den spridning på vilket sätt de olika läromedlen författats och utformats. Det finns betydande skillnader i hur läromedelsförfattarna ser på elevernas behov av matematik-historiskt innehåll, inte minst mellan a-, b- och c-spåret. Det går inte att utläsa direkt ur styrdokumenten att det bör vara någon skillnad mellan a-, b- och c-spåret, med avseende på matematikhistoriskt innehåll. Trots det noteras stora skillnader mellan läroboksserierna i detta avseende. I två fall är b- och c-spåret tämligen likartade. I två andra fall skiljer c-spåret ut sig markant från både a- och b-spåret. På a-spåret är det i alla läroboksserierna mer sparsamt med matematikhistoriskt innehåll jämfört med de övriga inom varje läroboksserie. Tolkar läroboksförfattarna läroplanen som att eleverna på de yrkesförberedande programmen inte är i lika stort behov av matematikhistorisk anknytning, eller antar de bara att intresset skulle vara lägre bland dessa elever? Skolverket har i sina kommentarer separerat ut kunskapskraven för matematik 1a till en särskild grupp kallad Variant I. Här kan man bland annat utläsa: ”I variant I betonas möjligheten att med ord och i praktisk handling kunna visa sina kunskaper inom karaktärsämnena och i en praxisnära miljö” (Skolverket, 2011c). Kanske matematikhistorian på a-spåret helt enkelt till en del fått stryka på foten för att ge plats åt en mer praktisk orientering av matematiken? Oavsett utbildningsspår, finns det även mellan läroboksserierna överlag en noterbar skillnad i mängden matematikhistoriskt innehåll, där tre av dem prioriterat detta betydligt mer än den fjärde.

Generella överenskommelser kring vilket faktainnehåll ur matematikens historia, eller vilka vetenskapsmän, som ska delges eleverna bedöms som obefintliga. Faktainnehållet tycks istället valts ut av läromedelsförfattarna på grundval av vad de själva ansett vara mest relevant i anslutning till respektive moment inom det centrala innehållet. Kan denna fria syn ha sitt ursprung i det faktum att test av matematikhistoriska kunskaper utelämnas på de nationella proven? Ett införande av matematikhistoriska frågor på de nationella proven hade förmodligen tvingat fram en nationell samordning kring det matematikhistoriska innehållet och kanske också en fortbildningsinsats i matematikens historia för lärarna.

Med avseende på matematikhistoriskt innehåll får således eleverna idag olika faktakunskaper beroende på vilket läromedel skolan eller läraren valt att använda. Å andra sidan har detta kanske heller aldrig varit Skolverkets intention. Kanske ser man valet av faktainnehåll underordnat när man hänvisar till att eleverna ska utveckla förmågan att ”relatera matematiken till dess betydelse och användning, i ett … historiskt sammanhang” (Skolverket, 2011b)? Kanske syftet med kunskapskravets formulering, om att eleven ska kunna relatera ”något i kursens innehåll till … matematikens kulturhistoria” (Skolverket, 2011b), skall betonas på just *något* oavsett vad? Även om det matematikhistoriska innehållet skiljer sig mellan läroböckerna, har det dock i regel viss koppling till det område inom matematiken som avsnittet behandlar. I det här sammanhanget bör påpekas att skillnaderna i faktainnehåll mellan läroboksserierna kanske till viss del jämnar ut sig om man även tar hänsyn till andra och tredje matematikkursen, vilka legat utanför denna studies avgränsning.

Även sättet på vilket det matematikhistoriska innehållet presenteras skiljer sig åt mellan läroboksserierna. Några använder företrädesvis separata faktarutor, medan andra flikar in matematikhistorisk fakta lite här och var i texten, med viss betoning på de olika avsnittens inledningar. Att använda separata faktarutor för det matematikhistoriska innehållet kan ifrågasättas. Genom denna konstruktion riskerar matematikens historia att förbli något annat än övrig matematikundervisning och därmed ytterligare understödja dess låga prioritet. Enkätundersökningen indikerar också att väldigt få elever överhuvudtaget läser faktarutorna. Ansvaret vilar därför tungt på läraren att ta upp och diskutera faktarutornas innehåll alternativt matematikhistoriska fakta från någon annan källa. Faktarutorna har å andra sidan fördelen att innehållet kan berättas något mer utförligt jämfört med textavsnitt insprängt bland övrigt matematiskt innehåll. Oavsett hur läroboksförfattarna valt att presentera matematikens historia, kan det tyckas svårt att få en helhetsbild av olika skeenden eller tidsepoker av historien. Jämför med Jankvists (2009) andra kategori, som anges i Sektion 2.1, där eleven bör blir varse om att matematiken utvecklats och formats under lång tid i skilda kulturer. Istället för att om möjligt åskådliggöra successiva framsteg och upptäckter, ges den matematikhistoriska anknytningen i regel som små fragment utan någon nämnvärd sammanhängande struktur. Helhetsbilden försvåras ytterligare då det matematikhistoriska faktainnehållet inte framförs i kronologisk ordning. Man skulle därmed kunna ifrågasätta om man, med dessa fragment tagna ur sitt sammanhang, lever upp till Skolverkets intention om att med hjälp av matematikens historia ”göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande …” (Skolverket, 2011c). Det anges i regel inte några länkar eller annan form av hänvisning till fördjupning eller ytterligare matematikhistorisk information. Sådana hade förmodligen underlättat såväl för den intresserade eleven som vill veta mer, som för läraren att utöka sitt underlag för en mer omfångsrik undervisning.

Med undantag för ett enstaka fall, omnämns inte några kvinnor alls bland alla namngivna vetenskapsmän i läroböckerna. Även om matematikens historia knappast skämt bort oss med kvinnliga matematiker så finns det ett antal som skulle kunna omnämnas, inte minst ur jämställdhetssynpunkt. En större andel kvinnor än män väljer bort matematik då de har möjlighet att själva välja. Jämför statistik och kommentarer i Sektion 1.3. Vad detta beror på har säkert många skilda förklaringar, men en faktor som nämns är att flickor anses mer benägna än pojkar att välja ämnen på grundval av konstaterad social relevans. En annan faktor som nämns är att vi i alltför hög grad betraktar och förmedlar matematiken som oberoende av kulturella sammanhang och väsensskilt från verkliga livet. Om denna betraktelse i så fall skulle skrämma bort fler kvinnor än män kan självfallet ifrågasättas, men kanske kan vi med matematikhistorians hjälp öka intresset för matematiken hos flickor/kvinnor just genom att sätta den i ett kulturellt och humanistiskt sammanhang. Kanske kan vi också i högre grad visa eleverna att *kvinnor kan* genom att lyfta fram och synliggöra framstående kvinnliga matematiker ur historien.

Bortsett från några få undantag, anges inte matematikhistorisk anknytning i övningsuppgifterna hos någon av de studerade läroböckerna. En större andel av sådana uppgifter skulle kanske kunna vara ett relativt enkelt sätt att förmedla viss matematikhistorisk kunskap, utan att ytterligare belasta en redan ansträngd tidplan, i vilken mycket av övrigt matematiskt innehåll också ska hinnas med. Jämför med Frieds (2001) slutsatser, angivna i Sektion 2.3, där han menar att tidsbristen delvis kan avhjälpas genom att byta ut befintliga problem mot andra problem inom samma område men med en historisk anknytning. Det blir nu istället helt upp till läraren att vid sidan av läroboken försöka leva upp till Skolverkets vidare intention om att låta ”eleverna via matematiska problem få ta del av människorna, den tidsepok och den kultur som upptäckte de matematiska samband och begrepp som behandlas i kursen” (Skolverket, 2011c).

Man får onekligen känslan av att samtliga läroboksförfattare ansträngt sig för att hitta övningsuppgifter med modern och praktisk anknytning som väntas ligga nära elevens vardag. En praxis som troligen influerats av pragmatismen och Deweys tankar om att kunskap ska vara viktigt för individen, ha relevans och gå att använda. Jämför med avsnittet om pragmatismen i Sektion 1.2. Trots all denna välmening, kan man ifrågasätta om detta alltid är rätt väg att gå för att främja elevens förståelse, nyfikenhet och lust att lära sig mer. Kanske vi, genom att uteslutande visa upp matematiken som ett verktyg för att lösa praktiska problem, tappar bort vikten av att också förmedla matematikens skönhet, det som populärt brukar kallas *the beauty of mathematics*? Lingard (2000) ifrågasätter denna praxis och pekar på att det inom matematikens historia finns en mängd övningsexempel att plocka, som verkliga män och kvinnor har definierat, löst, kämpat med och i vissa fall till och med hängett hela sina liv åt. Ibland borde vi kanske förmedla matematiska kunskaper till våra elever, likt antikens greker, som en konstart i sig själv utan något egentligt nyttokrav.

7.1 Fortsatt arbete

Många elever i den här studien uppger att de inte erhållit någon undervisning alls i matematikens historia under sin tid på gymnasiet. De antas därför ha svårt att relatera till vad sådan undervisning egentligen innebär eller kan innebära. Det skulle därför vara intressant att först förse eleverna med olika varianter av matematikhistorisk undervisning varefter de utfrågas hur de upplevt denna undervisning samt hur de ser på matematikens historia i olika avseenden och ur olika synvinklar. Det skulle också vara intressant att i förlängningen av ett sådant projekt försöka mäta vilken effekt denna undervisning haft på faktorer som matematisk förståelse, motivation och intresse, eventuellt genom jämförelse mot en referensgrupp som inte fått ta del av motsvarande undervisning.

Genusperspektivet har berörts och diskuterats till en del i denna uppsats. Intressant vore att också gå vidare och undersöka om det finns skillnader i synen på matematikens historia mellan kvinnliga och manliga lärare och elever.

Den här studien begränsades till endast en gymnasieskola i södra Sverige med elever uteslutande från några högskoleförberedande program. Intressant vore att som fortsatt arbete också studera hur det ser ut på andra skolor, i andra regioner och andra gymnasieprogram. Frågorna kan säkert ställas på fler och annorlunda vis till både större och mindre grupper av lärare och elever. Frågorna skulle också kunna kompletteras med längre och djupare intervjuer, även till fler grupper som exempelvis läromedelsförfattare, skolpolitiker och Skolverket.

Studien begränsades också till att endast jämföra första matematikkursens läromedel med avseede på matematikhistoriskt faktainnehåll och kvantitet. Intressant vore att också studera de fortsatta matematikkursernas läromedel för att utröna om skillnaderna består eller jämnar ut sig då elevernas hela gymnasietid tas i beaktande.

Referenser

African Heritage. (2016). Retrieved from The Rhind Papyrus or Advanced Ancient Egyptian Mathematics: https://afrolegends.com/2016/11/23/the-rhind-papyrus-or-advanced-ancient-egyptian-mathematics/

Alfredsson et al., L. (2011a). *Matematik 5000 1a Röd*. Stockholm: Natur och kultur.

Alfredsson et al., L. (2011b). *Matematik 5000 1a Gul*. Stockholm: Natur och Kultur.

Alfredsson et al., L. (2011c). *Matematik 5000 1b Grön*. Stockholm: Natur & Kultur.

Alfredsson et al., L. (2011d). *Matematik 5000 1c Blå*. Stockholm: Natur och Kultur.

Allen, G. (2000). *The Origins of Mathematics*. Texas: Texas A&M University.

Brander, L. (2010). *Allt om Vetenskap*. Retrieved from Det antika Alexandria: http://www.alltomvetenskap.se/nyheter/det-antika-alexandria

Denscombe, M. (2014). *Forskningshandboken* (3 ed.). Lund: Studentlitteratur.

Dyer, J. (2008). *On the Ancient Egyptian Value for Pi*. Retrieved from The Number Warrior : https://numberwarrior.wordpress.com/2008/03/05/on-the-egyptian-value-for-pi/

Euklides' Elementa. (n.d.). Retrieved from Elementa på svenska: http://canities.se/elements.html

Fauvel et al, J. (2002). *The ICMI Study (Book6): History in Mathematics Education*. London: Springer.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the learning of mathematics 11(2),3-6*.

Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education 10*.

Führer, L. (1992). Historical stories in the mathematics classroom. *The Mathematical Gazette, 76 No.475*.

Gennow et al., S. (2011a). *Exponent 1b*. Malmö: Gleerups.

Gennow et al., S. (2011b). *Exponent 1c*. Malmö: Gleerups.

Google. (2017). *Google Formulär*. Retrieved from Skapa fina formulär: https://www.google.se/intl/sv/forms/about/

Grevholm, B. (1994). Ett centralt uttalande om flickor och matematik. *Nämnaren nr 3*.

Hammenborg, H. (2015). *Vilken roll spelar läromedel i matematikundervisningen?* Eskilstuna: Examensarbete Mälardalens högskola.

Hansson, J. (2005). *Matematisk historia i matematikundervisningen - en jämförelse mellan förr och nu*. Umeå: Examensarbete Umeå Universitet.

Henahan, S. (2002). *Art Prehistory*. Retrieved from Access Excellence: http://www.accessexcellence.org/WN/SU/SU102001/caveart.html

Holmström et al., M. (2011a). *Matematik M 1a*. Stockholm: Liber.

Holmström et al., M. (2011b). *Matematik M 1b*. Stockholm: Liber.

HPM. (2017). *HPM The International Study Group*. Retrieved from http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/

Jankvist, U. T. (2009). A Categorization of the "whys" and "hows" of Using History in Mathematics Education. *Educational studies in mathematics, 71(3)*.

Johansson et al., L.-G. (2011). *Exponent 1a*. Malmö: Gleerups.

Lindberg, H. (2014). *Matematikens historia i gymnasiematematiken - En undersökning om matematikens varande eller icke varande i skolmatematiken*. Stockholm: Examensarbete Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholms Universitet.

Lingard, D. (2000). The history of mathematics: an essential component of the mathematics curriculum at all levels. *The Australian Mathematics Teacher, 56, 1*.

Mastin, L. (2016). *The Story of Mathematics*. Retrieved from The Story of Mathematics: http://www.storyofmathematics.com/indian.html

Metoddoktorn. (2014). *Validitet*. Retrieved from Metoddoktorn: http://www.mdh.se/student/stod-studier/examensarbete/omraden/metoddoktorn/metod/validitet-1.29071

O'Connor et al, J. J. (2017a). *Francois Viète*. Retrieved from MacTutor History of Matehematics archive: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete.html

O'Connor et al, J. J. (2017b). *Leonhard Euler*. Retrieved from MacTutor History of Matehematics archive: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Euler.html

O'Connor et al, J. J. (2017c). *Andrew John Wiles*. Retrieved from MacTutor History of Matehematics archive: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wiles.html

Olofsson et al., K. (2017). *Matematik Origo 1a*. Stockholm: Sanoma Utbildning.

Ottergren, E. (2004). *Sonja Kovalevsky 1850-1891*. Retrieved from Matematiska Institutionen Stockholms Universitet: http://www2.math.su.se/gemensamt/sonja/

Petrén, S. (2007). *Matematikens historia i undervisningen*. Flemingsberg: Examensarbete Södertörns Högskola.

Sjunnesson et al., J. (2011). *Matematik M 1c* (2 ed.). Stockholm: Liber.

Skoglund, C. (2012). Hermeneutik i praktiken - En kortfattad sammanfattning av hur en hermeneutisk forskningsprocess kan gå till.

Skolverket. (1994). Läroplanen för de frivilliga skolformerna, Lpf94. Stockholm.

Skolverket. (2011a). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Matematik ämnesplaner gymnasiet*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011c). *Om ämnet Matematik - Kommentarer till Lgy2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2015). *Hur väljs och kvalitetssäkras läromedel?* Retrieved from Skolverket: https://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/didaktik/tema-laromedel/hur-valjs-och-kvalitetssakras-laromedel-1.181769

SO-rummet. (2016). Retrieved from http://www.so-rummet.se/kategorier/historia/nya-tiden/renassans-upptacktsresor-och-en-ny-varldsbild

Sumpter, L. (2015). *Varför finns det så få kvinnliga professorer i matematik?* Retrieved from Föreningen svensk undervisningshistoria: http://undervisningshistoria.se/varfor-finns-det-sa-fa-kvinnliga-professorer-i-matematik/

Svensson, J. (2014). *Fristående eller inkluderad - En innehållslig textanalys av hur matematikns historia framställs i gymnasiets läroböcker i matematik*. Örebro: Examensarbete Örebro Universitet.

Swift, A. (1995). *Sophie Germain*. Retrieved from Biographies of Women Mathematics: https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/germain.htm

Szabo et al., A. (2011a). *Matematik Origo 1b* (2 ed.). Sanoma Utbildning.

Szabo et al., A. (2011b). *Matematik Origo 1c* (2 ed.). Stockholm: Sanoma Utbildning.

Säljö, R. (2016). *Lärande - En introduktion till perspektiv och metaforer*. Malmö: Gleerups.

Taylor, M. (1998). *Emmy Noether*. Retrieved from Biographies of Women Mathematics: https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/noether.htm

The Calendar System. (2017). Retrieved from Living Maya Time: https://maya.nmai.si.edu/calendar/calendar-system

Thorbjörnsson, H. (2017). *SO-rummet*. Retrieved from Qin Shi Huangdi: http://www.so-rummet.se/fakta-artiklar/qin-shi-huangdi-den-grymme-kejsaren

UKÄ. (2015). *Universitet och högskolor Årsrapport 2015*. Stockholm: Universitetskanslerämbetet.

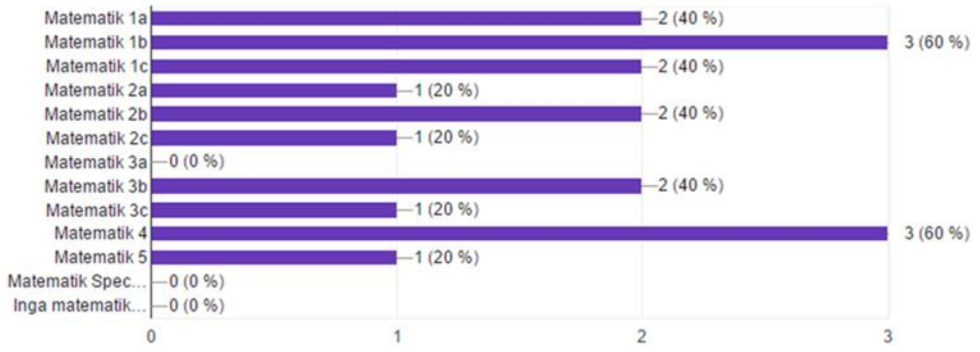
Warne, K. (2017). *Hypatia av Alexandria*. Retrieved from Förmödrar & förebilder: http://www.kvinnofronten.nu/Formodrar/hypatia.htm

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Vetenskapsrådet.

Bilaga A: Lärarnas enkätsvar i grafisk form

Vilka matematikkurser undervisar du i just nu?

5 svar

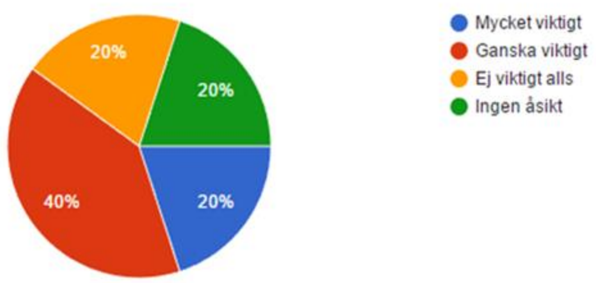


Vad heter bokserien som du använder?

5 svar

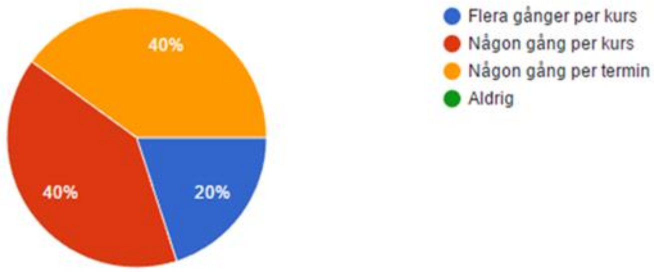
Hur viktigt tycker du som lärare det är att inkludera matematikens historia i undervisningen?

5 svar



Hur ofta tar du upp något från matematikens historia på dina lektioner?

5 svar



Vad tycker du främst ska ingå i undervisningen om matematikens historia?

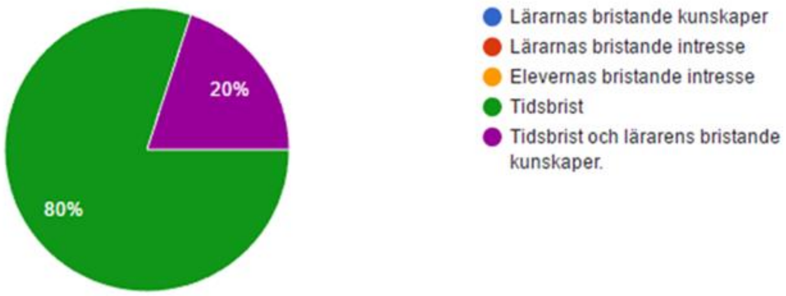
5 svar

Vad tycker du är den största fördelen med att ge eleverna kunskaper om matematikens historia?

5 svar

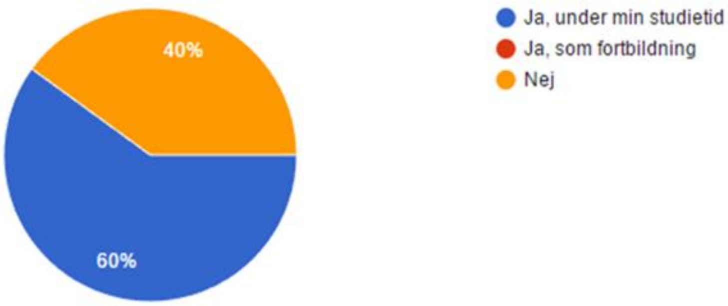
Vad tror du kan vara det största hindret från att inkludera matematikens historia i undervisningen?

5 svar



Har du som lärare fått någon utbildning i matematikens kulturhistoria?

5 svar

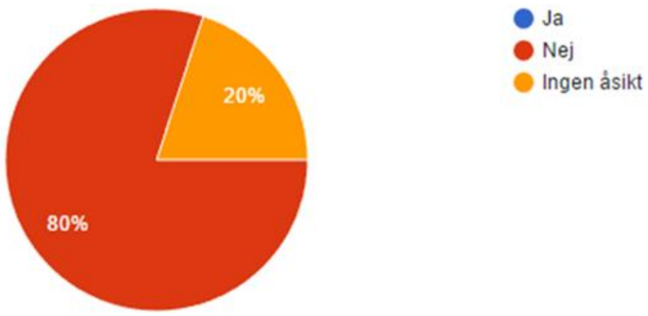


Skulle du önska mer lärarfortbildning om matematikens kulturhistoria?

5 svar

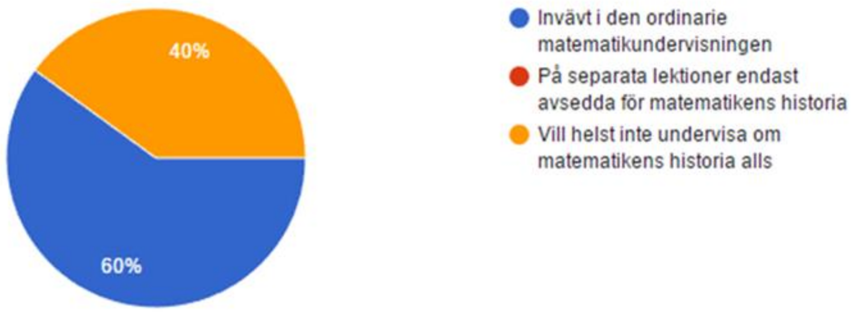
Skulle du vilja att frågor om matematikens historia fanns med på matematikproven?

5 svar



På vilket sätt skulle du föredra att undervisa om matematikens historia?

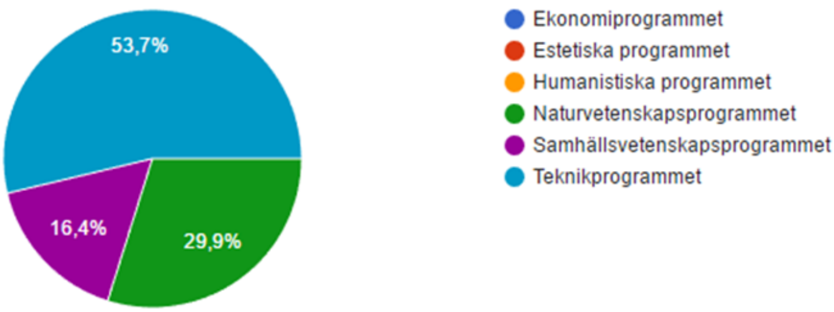
5 svar



Bilaga B: Elevernas enkätsvar i grafisk form

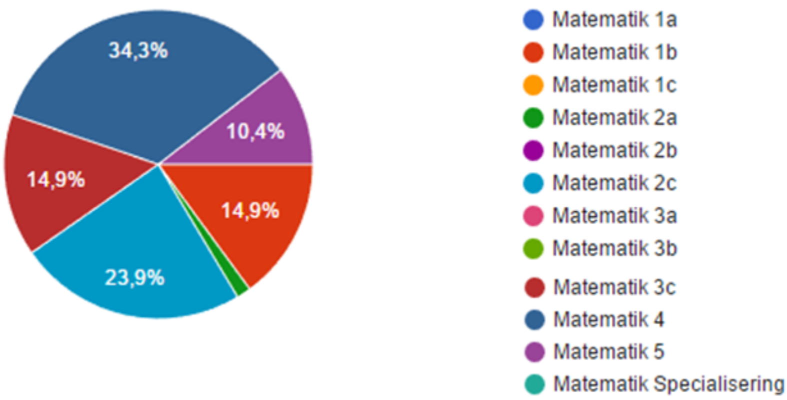
Vilket gymnasieprogram går du på?

67 svar



Vilken matematikkurs läser du just nu?

67 svar

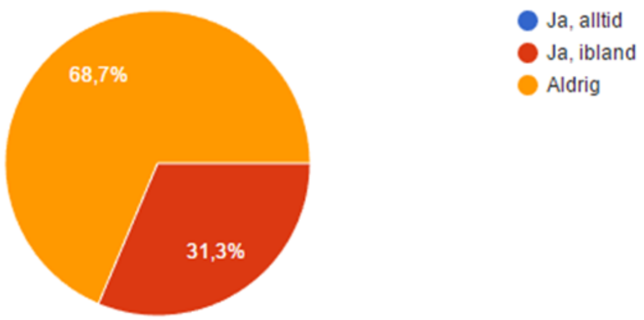


Vad heter din mattebok?

67 svar

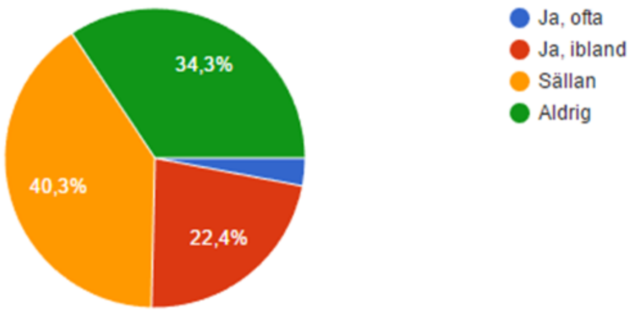
Brukar du läsa texterna om matematikens historia i läroboken?

67 svar



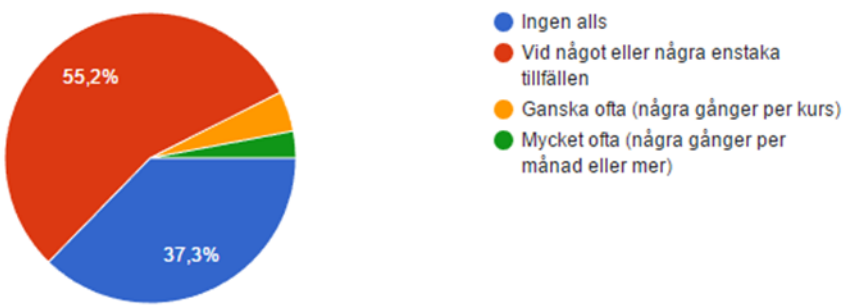
Händer det att läraren nämner något om den texten på matematiklektionen?

67 svar



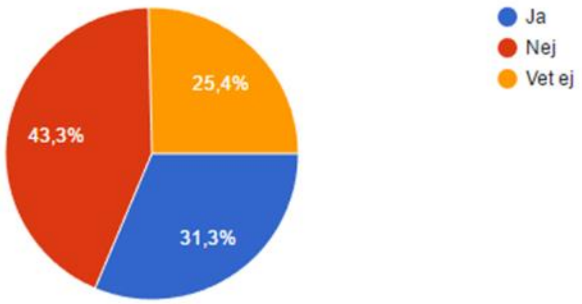
Hur mycket undervisning i matematikens historia har du haft under din tid på gymnasiet?

67 svar



Skulle du vilja ha mer undervisning i matematikens historia än vad du fått hittills?

67 svar



Vad förknippar du mest med matematikens kulturhistoria?

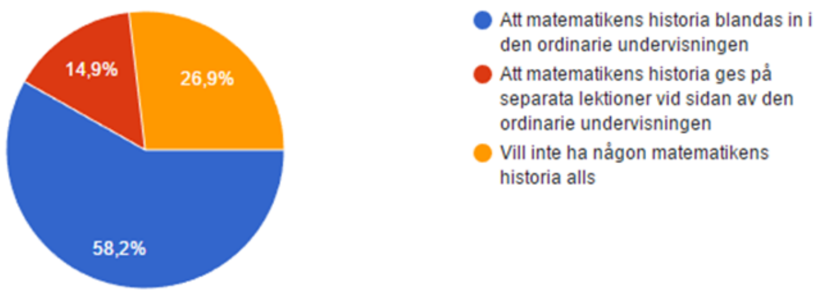
67 svar

Vilka delar skulle du helst vilja studera?

67 svar

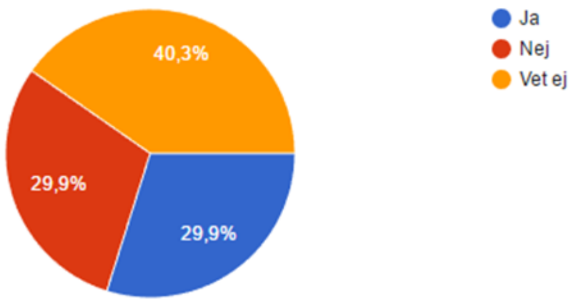
Vilket av nedanstående föredrar du helst?

67 svar



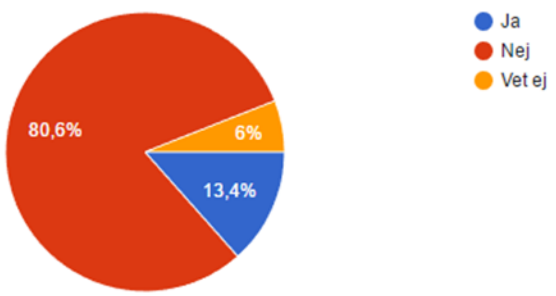
Upplever du att undervisning i matematikens historia bidrar till ökad förståelse för matematik?

67 svar



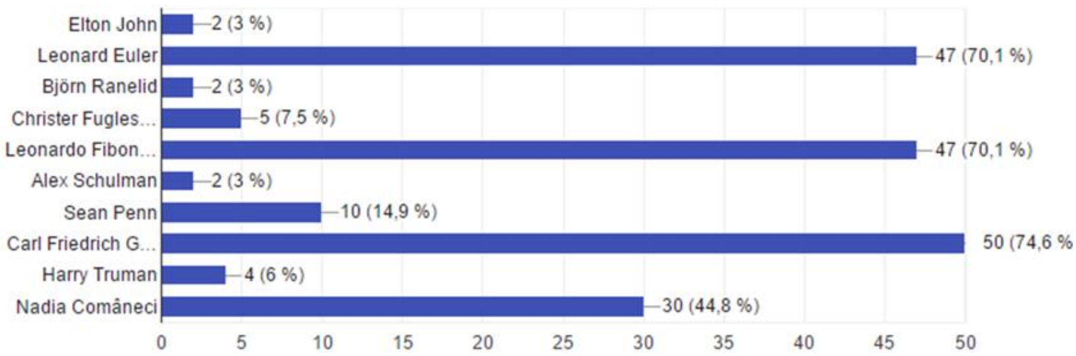
Skulle du kunna tänka dig att läsa om matematikens kulturhistoria som en fristående separat kurs?

67 svar



Vilka tre av nedanstående personer tror du är kända matematiker?

67 svar



Ungefär vilken tidsperiod kännetecknas som den grekiska storhetstiden i matematik?

67 svar