Matematikens historia för lärare, 7.5 poäng ht 2016
Handledare: Lennart Berg

Trigonometrin genom historien

HÖGSKOLAN
Dalarna

Författare

Jörgen Nilsson

Sammanfattning

Trigonometrin är ett stort och betydelsefullt område inom matematiken och har varit föremål för intresse inom en rad olika kulturer och civilisationer genom historien. I många fall har det varit astronomin och intresset av att kunna beräkna himlakropparnas rörelser som varit en drivande faktor för trigonometrins utveckling. Avståndsmätning, positionering och navigering är exempel på andra tidiga användningsområden. Idag används trigonometrin för att beskriva en mängd olika discipliner inom både naturvetenskap och teknik.

Syftet med denna uppsats är att ge läsaren en översiktlig bild av trigonometrins utveckling genom historien och förhoppningsvis också ge inspiration till implementering av matematikens historia i den ordinarie matematikundervisningen.

Innehållsförteckning

Sammanfattning 2
Inledning 4
De trigonometriska funktionerna 5
Trigonometrin i antikens Grekland 6
  Thales sats 7
  Pythagoras sats 8
  Pythagoras tripplar 9
  Parametrisering av enhetscirkeln 10
  Cirkelkordan 12
  Ptolemaios sats 14
  Sinussatsen 15
  Cosinussatsen 16
  Archimedes pi 17
Trigonometrin i Mellanöstern och Indien 19
  Additionsformlerna 20
Trigonometrin i Europa 21
  Kopplingen mot algebran 22
  Kopplingen mot logaritmen 23
Några ord om trigonometrins förgrundsgestalter 25
  Thales (ca 625-545 f.Kr.) 25
  Pythagoras (ca 580-495 f.Kr.) 25
  Euklides (ca 325-265 f.Kr.) 25
  Archimedes (ca 287-212 f.Kr.) 25
  Hipparchos (ca 190-125 f.Kr.) 26
  Ptolemaios (ca 90-170 e.Kr.) 26
  Diofantos (ca 210-290 e.Kr.) 26
  Aryabhata (476-550 e.Kr) 26
  Al-Khwarizimi (780-850) 26
  Abu al-Wafa' Buzjani (940-998) 27
  Regiomontanus(1436-1476) 27
  Francois Viéte (1540-1603) 27
  Edmund Gunter (1581-1626) 27
  James Gregory (1638-1675) 27
  Roger Cotes (1682-1716) 28
  Leonard Euler (1707-1783) 28
Diskussion 29
Referenser 30

Sökord: Trigonometri, Geometri, Matematikhistoria

Inledning

Enligt svenska akademins ordlista betyder ordet trigonometri ”Vetenskapen om trianglars vinklar”. Ordet kommer från de grekiska orden ´trigono´ och ´metron´ som betyder ’triangel’ respektive ’att mäta’.

Trigonometrin kan, i sin ursprungliga form, sägas vara en förlängning eller vidareutveckling av geometrin. De allra första tecknen på kunskaper om geometri återfinns redan för omkring 4-5000 år sedan i faraonernas Egypten. De antika egyptierna och babylonierna kunde bland annat beräkna relationerna mellan sidorna i likformiga trianglar och det finns vissa tecken på att de även hade kännedom om relationen mellan cirkelns omkrets och diameter, det vill säga det tal vi idag benämner pi. Det är dock det antika Grekland som gett eftervärlden väldokumenterade grundläggande kunskaper inför det som i modern tid kommit att kallas trigonometri. Under medeltiden, då den matematiska aktiviteten i Europa var låg, bibehölls grekernas kunskaper i Mellanöstern och Indien. Även i Kina hade man tidigt goda kunskaper om praktisk trigonometri. I Europa återupptogs utvecklingen av trigonometrin under renässansen och den blev då också en separat och självständig del av matematiken. Det var också i renässansens och barockens Europa som de trigonometriska beteckningarna och den matematiska symbolik, så som vi känner den idag kom till användning.

Trigonometrins historia är enormt omfattande och ambitionen med denna uppsats är på intet sätt att vara heltäckande, utan snarare att ge en översiktlig bild av trigonometrins utveckling genom historien. Jag kommer huvudsakligen fokusera på trigonometrins utveckling i det antika Grekland kompletterat med några nedslag i Mellanöstern, Indien och Europa. Jag kommer också att begränsa mig till den så kallade plana trigonometrin samt i viss mån kopplingen mot algebran och logaritmen. Jag utelämnar därmed den historiska utvecklingen kring den sfäriska trigonometrin.

Materialet i denna uppsats baseras i huvudsak på litteraturstudier. De allra flesta referenskällorna är hämtade från Internet varför den fulla korrektheten ej kan garanteras.

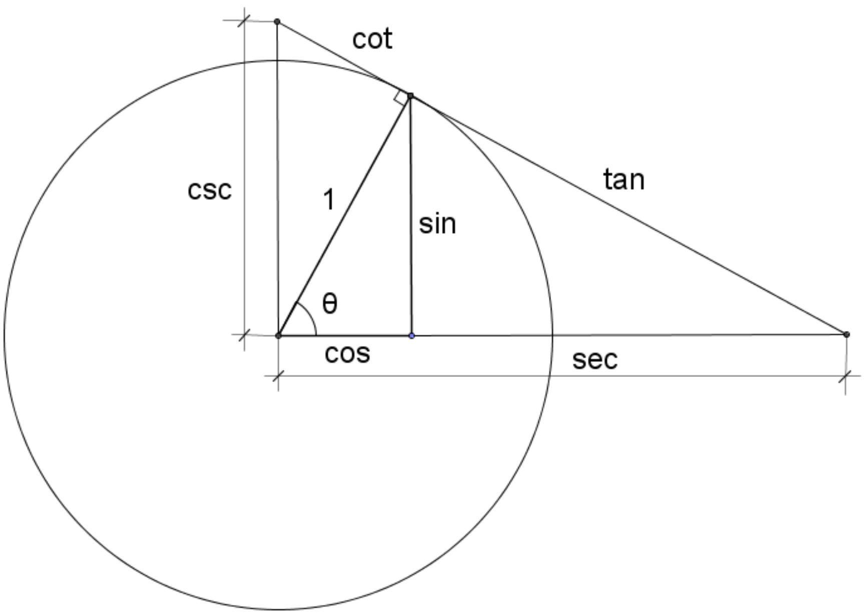
De trigonometriska funktionerna

Trigonometri beskrivs med specifika funktioner för vinklarna i en rätvinklig triangel. De sex vanliga trigonometriska funktionerna kallas sinus (sin), cosinus (cos), tangens (tan), cotangent (cot), secant (sec) och cosecant (csc). De fyra sistnämnda är dock bara utvecklingar av sinus och cosinus där, tangens är kvoten mellan sinus o cosinus, cotangens inversen av tangens, secanten inversen av cosinus och slutligen cosecanten inversen av sinus. Alla har de dock sin egen geometriska representation enligt figuren nedan.

Ordet sinus (eller sine) initierades på 1100-talet av britten Robert av Chester[1] som översatte många betydelsefulla historiska böcker från arabiska till latin. Andra författare följde efter och snart var uttrycket etablerat i hela Europa. Den tyske matematikern Bartolomeus Pitiscus[2] (1561-1613) blev den första att använda ordet trigonometri. Notationen sin användes först 1624 av Edmund Gunter[3] (1581-1626), en engelsk matematiker och astronom. Notationen för de övriga trigonometriska funktionerna introducerades kort därefter.

Sinusfunktionen för en vinkel representerar kvoten mellan en rätvinklig triangels motstående katet och hypotenusa. Cosinus representerar kvoten mellan närliggande katet och hypotenusa. Tangensfunktionen blir således kvoten mellan motstående och närliggande katet.

Om två sidor och en vinkel, alternativt om två vinklar och en sida i en godtycklig triangel är kända kan samtliga vinklar och sidor beräknas med hjälp av de trigonometriska funktionerna.



[1] *Robert of Chester*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_of_Chester
[2] *Bartholomaeus Pitiscus*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Bartholomaeus_Pitiscus
[3] Edmund Gunter. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Gunter

Trigonometrin i antikens Grekland

Geometrins och trigonometrins utveckling i det antika Grekland sträcker sig ungefärligen över en tidsperiod mellan 700 f.Kr och 300 e.Kr. Denna period kallas ofta den gyllene eran (eng. the Golden Age). Grekerna influerades av och hämtade kunskaper både från Egyptierna och Babylonierna. Dåtidens vetenskapsmän hade ofta många strängar på sin lyra med kunskaper inom både astronomi, matematik, religion och filosofi. Till skillnad från tidigare, då man sett matematiken som ett sätt att lösa praktiska och vardagliga problem, såg man nu matematikutvecklingen som en konstart i sig.

Alexandria[4] som grundades av Alexander den Store omkring 332 f.Kr., kom att bli Greklands och västerlandets mest betydelsefulla vetenskapliga centrum. Här huserade bland många andra Euklides[5] (ca 325-265 f.Kr.) där han författade sitt berömda verk *Elementa*. Verket kom att bli de mest betydelsefulla matematiska böckerna i över 2000 år, genom sin grundliga och systematiska behandling av både två- och tredimensionell geometri, kulminerande i de fem Platonska kropparna.

Det var också i Alexandria under 200-talet före Kristus som det gamla testamentet sammanställdes och översattes till grekiska för att komma framtida generationer till del. Det stora biblioteket[6] i Alexandria grundades kring 280 f.Kr. och var under antiken det största i världen. Vad som egentligen hände med biblioteket är omtvistat men enligt den romerske författaren Plutarchos[7] (ca 46-120 e.Kr.) brann biblioteket ned 47 f.Kr. Eftervärlden gick därmed miste om en enorm kunskaps- och kulturskatt.

Det var huvudsakligen genom Ptolemaios[8] (ca 90-170 e.Kr.) som de första idéerna kring trigonometri blev presenterade för världen genom hans stora verk *Almagest*. Ptolemaios beskrev relationen mellan de fyra sidorna och dess två diagonaler för en fyrhörning inskriven i en cirkel. Det vi idag kallar Ptolemaios sats. Han använde denna sats för uträkning av en trigonometrisk tabell, en så kallad kordatabell. Troligen var det dock Hipparchos[9] (ca 190-125 f.Kr.) som var den ursprungliga skaparen av denna tabell.

Ptolemaios hade fler föregångare inom geometrin. En av dem var Thales[10] (ca 625-545 f.Kr.) som visade att en triangel inritad i en cirkel, där ena sidan representerar cirkelns diameter, alltid bildar en rätvinklig triangel. Andra välkända föregångare var Pythagoras[11] (ca 580-495 f.Kr.), mest känd för Pythagoras sats, Euklides (ca 325-265 f.Kr.) vars berömda verk *Elementa* varit en av de stora hörnpelarna inom matematiken, Diofantos[12] (ca 210-290 e.Kr.) med verket *Arithmetika* och naturligtvis den mångsidige Archimedes[13] (ca 287-212 f.Kr.) som bland mycket annat lyckades få fram ett ytterst noggrant närmevärde på talet pi.

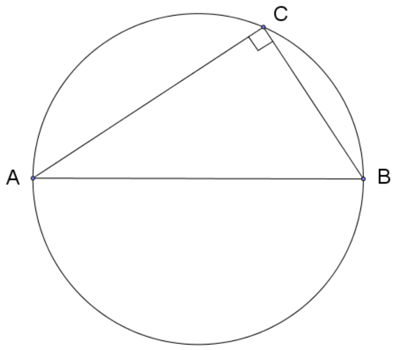
I följande sektioner presenteras ett axplock av deras arbeten.

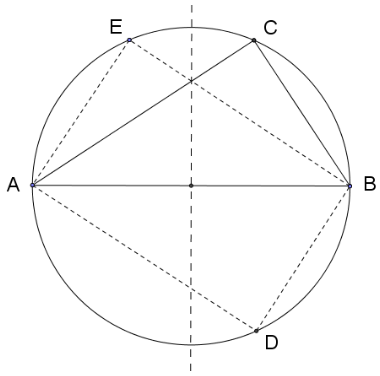
---

[4] Brander, L. (2016). *Det antika Alexandria*. Hämtat från http://www.alltomvetenskap.se/nyheter/det-antika-alexandria
[5] *Euklides*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Euklides
[6] *Biblioteket i Alexandria*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Biblioteket_i_Alexandria
[7] *Plutarchos*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Plutarchos
[8] *Ptolemaios*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Ptolemaios
[9] *Hipparchos*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Hipparchos
[10] *Thales*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Thales
[11] *Pythagoras*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoras
[12] *Diophantus*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus
[13] *Archimedes*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Arkimedes

Thales sats

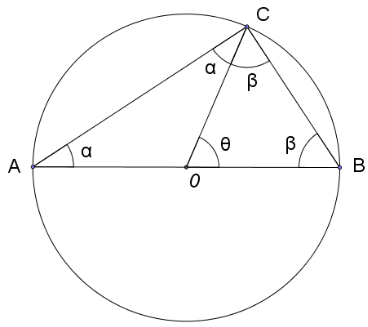
Thales[14] har fått ge namn åt *Thales sats* som visar att om A, B och C är punkter på en cirkel, där sidan AB är en diameter, så är vinkeln ACB vinkelrät. Thales sats är i själva verket ett specialfall av Ptolemaios sats beskriven i ett kommande kapitel. Thales sats är bevisad i Euklides verk *Elementa*.





Satsen kan bevisas genom att först spegla triangeln ACB över diametern AB, sedan spegla samma triangel över den vertikala linjen vinkelrätt mot AB. Parallellogrammet ADBE måste vara en rät rektangel eftersom dess bägge diagonaler AB resp ED är lika långa, d v s diametern.

Satsen kan också bevisas genom att dra en linje från origo till hörnet C. Då fås två likbenta trianglar AOC och COB. Med dagens notation och vetskapen om att vinkelsumman är 180 grader inses lätt att summan av vinklarna α och β måste bli 90 grader.



Vinkelsumman vid origo blir: $(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) = 180°$

$$\alpha + \beta = 90°$$

Om vi ersätter (180° – 2β) med *Θ* ser vi också lätt att α blir *Θ*/2:

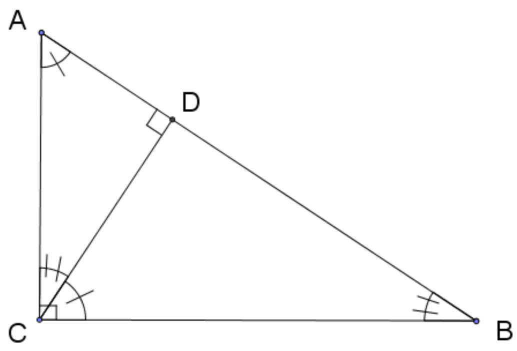
$$180° - 2\alpha + \Theta = 180°$$

$$\alpha = \frac{\Theta}{2}$$

[14] *Thales*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Thales

Pythagoras sats

Den välkända *Pythagoras sats* anger förhållandet mellan en rätvinklig triangels sidor. Det finns ett flertal olika sätt att bevisa denna sats och ett av dem finns dokumenterade i Euklides *Elementa*. Nedan visas dock det bevis som Pythagoras[15] själv antas ha använt. Satsen bevisas genom att rita en rätvinklig triangel ABC och dela denna i två delar genom att dra en linje från hörnet C vinkelrätt mot sidan AB. Vi kan kalla skärningspunkten för D och ser att alla de tre trianglarna är likformiga, d v s dess vinklar är lika och således också deras sidförhållande. Observera att man inte behövde kvadratrot för att beskriva detta samband. Grekerna hade svårt för irrationella tal och ville inte riktigt erkänna dem.



Trianglarnas sidor relaterar till varandra som $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$ och $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

Således gäller:

$$BC^2 = AB \cdot BD \text{ } och \text{ } AC^2 = AB \cdot AD$$

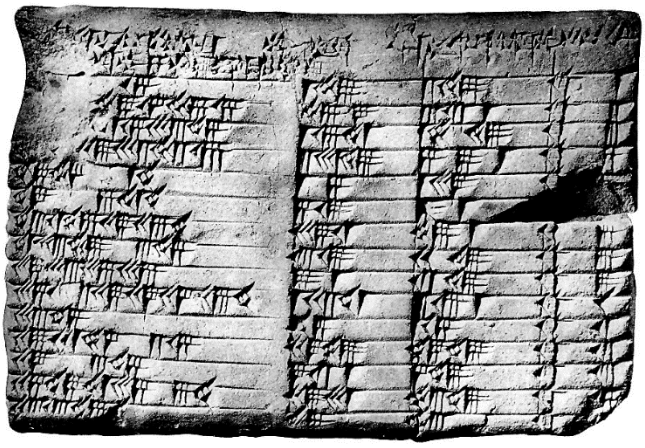
$$BC^2 + AC^2 = AB \cdot (BD + AD)$$

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

[15] *Pythagoras*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

Pythagoras tripplar

En Pythagoras trippel[16] består av tre positiva heltal a, b och c, så att dessa bildar Pythagoras sats $a^2 + b^2 = c^2$. Den allra mest kända trippeln (3, 4, 5) användes redan av Egypterna för att praktiskt kunna mäta upp en rät vinkel. Man har även funnit tabeller över Pythagoras tripplar på Babyloniernas kilskriftstavlor. Figuren nedan visar kilskriftstavla Plimpton 322[17] från G.A. Plimpton Collection på Columbia University.



Euiklides formulerade (med dagens notation) följande samband för att generera Pythagoras tripplar. Formlerna gäller för alla heltal m och n större än noll. Sidorna a och b representerar den rätvinkliga triangelns katetrar och c representerar hypotenusan.

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$$

Sambandet kan lätt satisfieras genom att sätta in dem i Pythagoras sats.

$$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

$$a^2 + b^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

$$a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$$

16 *Pythagorean triple*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple#Proof_of_Euclid.27s_formula

17 *Plimton 322*. (2016). https://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

Parametrisering av enhetscirkeln

Euklides kunde baserat på Pythagoras tripplar formulera en punkt[18] på enhetscirkeln. Nedan följer en redogörelse av denna med dagens notation.

Pythagoras tripplar: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

Genom att dividera högerledet fås radien 1:

$$(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2})^2 + (\frac{2mn}{m^2 + n^2})^2 = 1$$

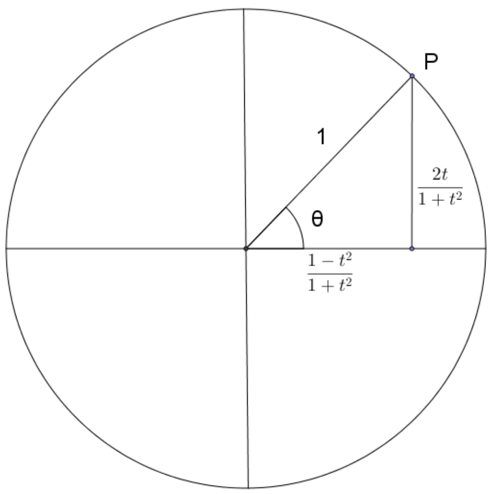
Division med m^2 ger:

$$(\frac{1 - (\frac{n}{m})^2}{1 + (\frac{n}{m})^2})^2 + (\frac{2\frac{n}{m}}{1 + (\frac{n}{m})^2})^2 = 1$$

Införande av substitutionen $t = n/m$ ger:

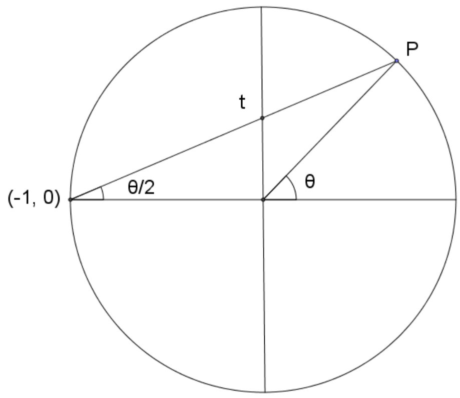
$$(\frac{1 - t^2}{1 + t^2})^2 + (\frac{2t}{1 + t^2})^2 = 1$$

En punkt P på enhetscirkeln blir således $P = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, vilket alltså motsvarar cosinus och sinus för vinkeln Θ i figuren nedan.



[18] Wildberger, N. (2015). *History of Greek Geometry*. Hämtat från https://cosmolearning.org/video-lectures/history-greek-geometry-i/

Diofantos[19] använde ca ett halvt sekel senare en något annorlunda härledning[20] för att parametrisera enhetscirkeln. Han utgick från en linje mellan cirkelns koordinat (-1, 0) och en punkt P på cirkelns periferi. Lutningen för denna linje benämns t.



Linjens ekvation blir:

$$y = t(x + 1)$$

Insatt i cirkelns ekvation fås:

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$$

Vidareutveckling ger:

$$x^2 + t^2(x^2 + 2x + 1) = 1$$

$$x^2(1 + t^2) + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{2t^2x}{1 + t^2} + \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} = 0$$

Om man ansätter följande samband:

$x^2 - (1 - q)x - q = (x + 1)(x - q)$ där $q = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

ses lätt att x har lösningarna -1 och q. Den icketriviala lösningen blir således:

$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ vilket motsvarar cos(Θ)

och ur linjens ekvation fås då:

$y = \frac{2t}{1+t^2}$ vilket motsvarar sin(Θ)

Från Thales sats ges också att vinkeln vid (-1, 0) är hälften så stor som Θ vilket ger att:

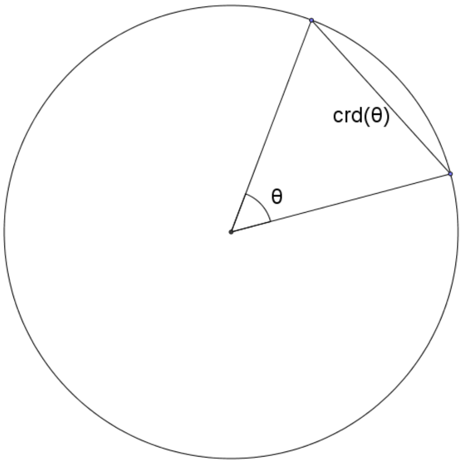
$y = \mathrm{t}$ motsvarar tan(Θ/2)

[19] *Diophantus*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus

[20] Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History, Third Edition.*

Cirkelkordan

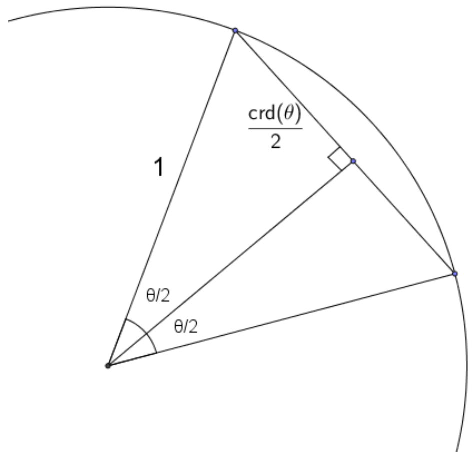
Studierna av cirkeln och kordan betraktas av många som något av starten för vad vi idag kallar trigonometri. Kordafunktionen kan spåras redan från Babyloniens kilskriftstavlor, men det var troligen Hipparchos[21] som först satte upp en så kallad kordatabell i samband med studerandet av himlakropparnas rörelser. Han benämns därför av många som trigonometrins fader. Hipparchos skrev 12 böcker som tyvärr ej finns bevarade men Ptolemaios[22] från Alexandria dokumenterade kordatabellen i sitt verk *Almagest*.



Ptomelaios delade in cirkelns omkrets i 360 delar och dess diameter i 120 delar och använde sig av ett sexagesimalt talsystem. Han började sätta upp sin kordatabell[23] med att utgå ifrån en regelbunden tiohörning och fortsatte sedan mot alltmer förfinad indelning med hjälp av interpolation. Som exemplet visar nedan fick Ptomelaios fram mycket bra närmevärden på kordans längd.

	Kordans längd		
	Sexagesimalt talsystem	Decimalt talsystem	2*sin(Θ/2)
crd(36°)	37; 04 05	$37 + 4/60 + 5/60^2 =$ 37.0681	37.08204
crd(72°)	70; 32 03	$70 + 32/60 + 3/60^2 =$ 70.5342	70.53423
crd(60°)	60	60 = 60.0000	60.00000
crd(90°)	84; 51 10	$84 + 51/60 + 10/60^2 =$ 84.8528	84.85281
crd(120°)	103; 55 23	$103 + 55/60 + 23/60^2 =$ 103.9231	103.92305

[21] *Hipparchos*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Hipparchos
[22] *Ptolemaios*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Ptolemaios
[23] Johansson, B. (2013). *Matematikens historia.*



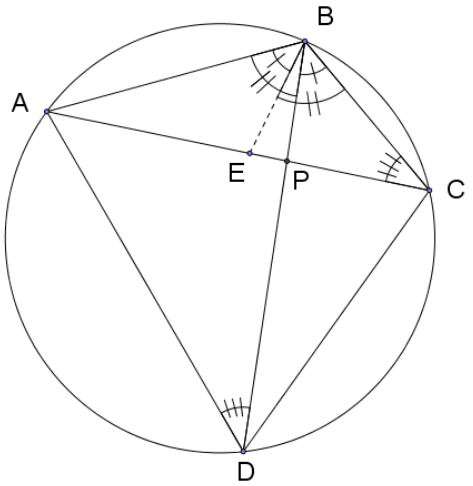
Genom att dra en bisektris vinkelrätt mot kordan inses lätt med dagens notation att:

$$\frac{crd(\theta)}{2} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$crd(\theta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Ptolemaios sats

Ptolemaios[24] har fått ge namn åt *Ptolemaios sats* som beskriver relationen mellan de fyra sidorna och dess två diagonaler för en fyrhörning inskriven i en cirkel.



Ett streck dras från hörnet B till en punkt E på sträckan AC, sådan att vinklarna ABE och DBC blir lika stora. Då ses lätt att vinkeln ABD blir lika stor som vinkeln CBE. Vidare blir vinkeln ADB lika stor som vinkeln ACB eftersom de står mot samma båge mellan A och B. Trianglarna ABD och EBC är således likformiga. På motsvarande sätt blir trianglarna ABE och DBC likformiga.

Trianglarnas sidor relaterar till varandra som $\frac{CE}{BC} = \frac{AD}{BD}$ och $\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BD}$

Således gäller:

$$AC \cdot BD = (AE + CE) \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

Genom likformigheten mellan trianglarna APB och CPD får vi ur denna figur även den välkända kordasatsen:

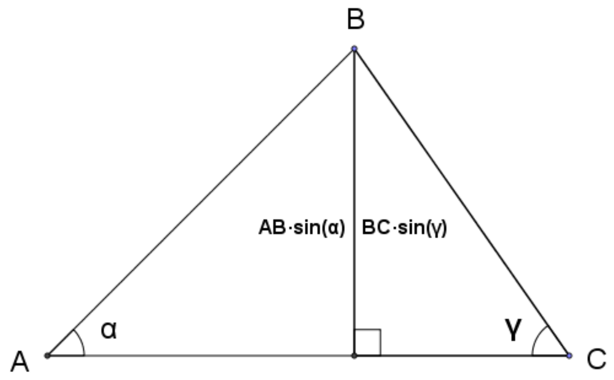
$$\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}$$

$$AP \cdot CP = DP \cdot BP$$

[24] *Ptolemaios*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Ptolemaios

Sinussatsen

Den välkända sinussatsen anges i Euklides verk *Elementa* och beskriver förhållandet mellan en godtycklig triangels sidor och dess motstående vinklar.



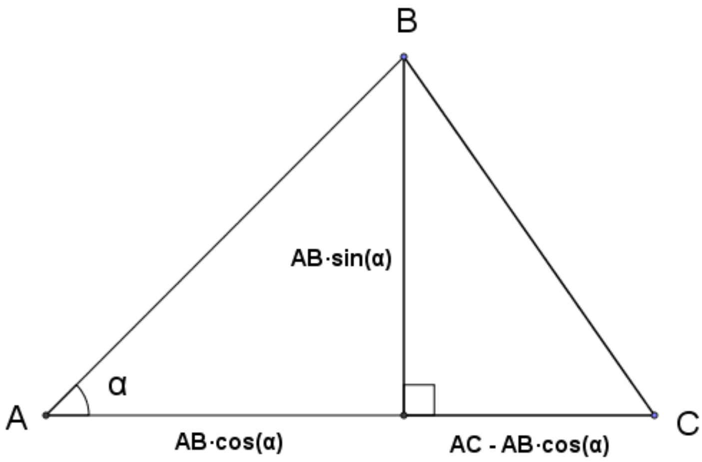
Sinussatsen kan enkelt visas genom att dra en linje från hörnet B vinkelrätt mot sidan AC. Med dagens notation inses lätt att längden på denna linje kan beskrivas på två sätt:

$$AB \cdot \sin(\alpha) = BC \cdot \sin(\gamma)$$

$$\frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{BC}{\sin(\alpha)}$$

Cosinussatsen

Den välkända cosinussatsen beskriver liksom sinussasten ett förhållande mellan en godtycklig triangels sidor och dess motstående vinklar.



Cosinussatsen kan liksom sinussasten visas genom att dra en linje från hörnet B vinkelrätt mot sidan AC. Med dagens notation kan längden av denna linje då tecknas som $AB \cdot \sin(\alpha)$ och sidan AC kan delas in i delarna $AB \cdot \cos(\alpha)$ och $AC - AB \cdot \cos(\alpha)$ så som visas i figuren ovan. Pythagoras sats kan sedan användas på den högra rätvinkliga triangeln enligt:

$$BC^2 = (AB \cdot \sin(\alpha))^2 + (AC - AB \cdot \cos(\alpha))^2$$

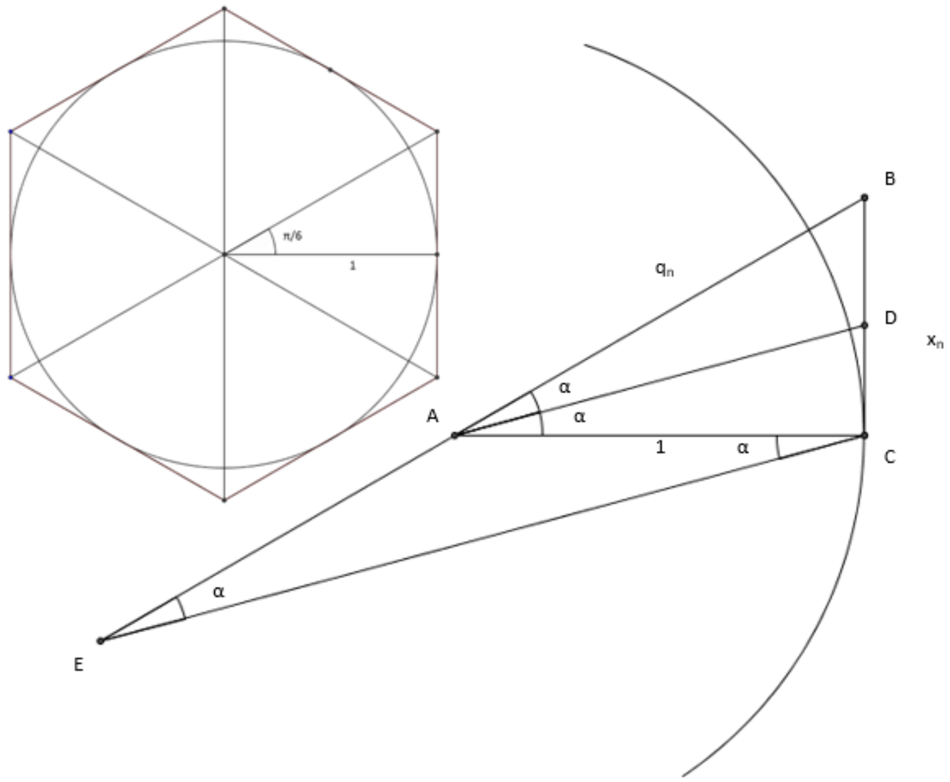
$$BC^2 = AB^2 \cdot \sin(\alpha)^2 + AC^2 + AB^2 \cdot \cos(\alpha)^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$$

Då $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ fås:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$$

Archimedes pi

Archimedes[25] utgick ifrån en utanpåliggande och en inskriven hexagon i anslutning till en cirkel när han beräknade ett närmevärde på det irrationella talet pi. Genom att dela polygonerna i flera steg kommer man allt närmare cirkelns omkrets och därmed ett allt bättre närmevärde på pi. Efter fyra steg, när den inre och yttre polygonen hade 96 sidor kunde han bestämma värdet på pi till mellan 3+1/7 (ca 3.1429) och 3+10/71 (ca 3.1408). Närmevärdet kom att stå sig ända fram till 1600-talet. Med dagens datorteknik kan man nå miljontals decimaler för talet pi.



En bisektris dras från centrum på cirkeln, A mot hexagonens sida, D. Genom att dra förlängning från A till E, på det sätt som figuren visar blir trianglarna ABD och EBC likformiga:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{BE}$$

$$\frac{BD}{BD + CD} = \frac{AB}{AB + AE}$$

$$BD(AB + AE) = AB(BD + CD)$$

Eftersom AE = AC = 1 fås: $$BD \cdot AB + BD = AB \cdot BD + AB \cdot CD$$

$$\frac{BD}{CD} = AB$$

[25] *Archimedes*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Arkimedes

Nedan visas principen (med dagens notation) som Archimedes använde för att beräkna talet pi. Notera att Archimedes utförde dessa beräkningar för hand och utan att använda kvadratrot.

Steg 1:

$$n = 1$$

$$x_n = x_1 = BC = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\pi = \frac{n \cdot 12}{2} \cdot x_n = \frac{1 \cdot 12}{2} \cdot x_1 = \frac{1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3.464$$

Steg 2:

$$n = 2$$

$$\frac{BD}{CD} = AB$$

$$AB = q_{n-1} = \sqrt{(x_{n-1})^2 + AC^2} = \sqrt{(x_{n-1})^2 + 1}$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n} = \frac{x_1 - x_2}{x_2} = q_{n-1} = \sqrt{(x_1)^2 + 1} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{1 + q_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\pi = \frac{n \cdot 12}{2} \cdot x_n = \frac{2 \cdot 12}{2} \cdot x_2 = \frac{2 \cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 3.2154$$

Steg 3:

$$n = 4$$

$$q_2 = \sqrt{(x_2)^2 + 1} = \sqrt{(\frac{1}{2 + \sqrt{3}})^2 + 1}$$

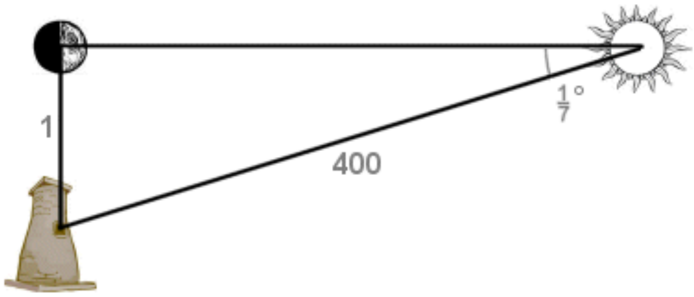
$$x_3 = \frac{x_2}{1 + q_2} = \frac{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}}{1 + \sqrt{(\frac{1}{2 + \sqrt{3}})^2 + 1}}$$

$$\pi = \frac{n \cdot 12}{2} \cdot x_n = \frac{4 \cdot 12}{2} \cdot x_3 = \frac{4 \cdot 12}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}}{1 + \sqrt{(\frac{1}{2 + \sqrt{3}})^2 + 1}} = 3.1597$$

Genom att upprepa samma princip i fler steg nås ett allt bättre närmevärde för talet pi.

Trigonometrin i Mellanöstern och Indien

Under medeltiden, då den matematiska aktiviteten i Europa var låg, bibehölls grekernas kunskaper i Mellanöstern och Indien. Indierna var mycket intresserade av astronomi och kunde med hjälp av sinusfunktionen bestämma relationen av avståndet mellan solen och månen till jorden med relativt hög noggrannhet. Vid halv fullmåne står solen direkt mot månen och bildar en rät vinkel mot jorden. Man kunde då mäta vinkeln vid solen till (1/7) grad[26], motsvarande 400:1. Man kom alltså fram till att solen ligger 400 gånger längre från jorden än månen. Den mer exakta relationen har senare visat sig vara 389.



Det var indiern Aryabhata[27] (476-550 e.Kr.) som först definierade sinus och cosinus på det sätt som används idag. Man använde orden jya och kojya[28] för sinus respektive cosinus. Själva orden sinus och cosinus härstammar dock från medeltidens Europa efter vissa misstolkade[29] översättningar till latin. Även om antikens greker kunde beräkna sinusfunktionen för några vinklar ville de indiska astronomerna kunna beräkna denna för en godtycklig vinkel. Aryabhata upptäckte, genom Pythagoras sats, en metod för konstruktion av en sinustabell som han dokumenterade i sin stora skrift kallad *Aryabhatiya*.

Definitionen av tangens gjordes ca 300 år senare av den berömde persiske matematikern Al-Khwarizimi[30] (780-850).

Den persiske astronomen och matematikern Abu al Wafa al Buzjani[31] (940-998) introducerade sedan funktionerna secant, cotangent och cosecant funktionerna. Han etablerade också flera trigonometriska samband som exempelvis additionsformlerna som återges i nästa sektion.

---

[26] *The Story of Mathematics*. (2016). Hämtat från http://www.storyofmathematics.com/indian.html
[27] *Aryabhata*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Aryabhata
[28] *History of trigonometry*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_trigonometry
[29] Mouwitz, K. &. (2008). *Matematiktermer för skolan.*
[30] *Al-Khwarizmi*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al-Khwarizm
[31] *Abu al-Wafa' Buzjani*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Abu_al-Wafa%27_Buzjani

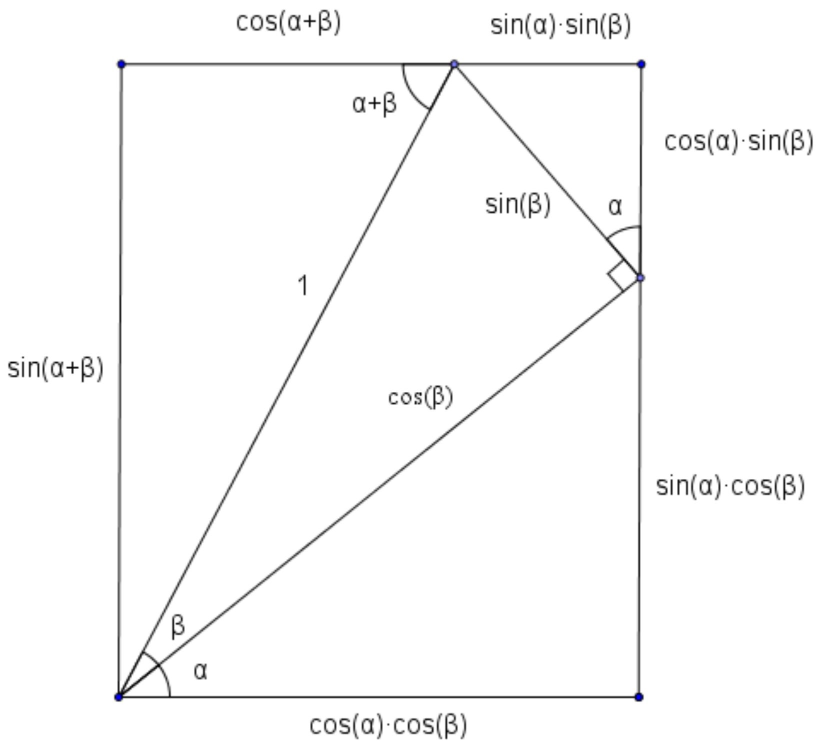
Additionsformlerna

Det var, som angetts ovan, Abu al Wafa al Buzjani[32] som först introducerade additionsformlerna för två vinklar. Dessa beskrivs på följande sätt:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Dessa kan härledas genom att rita en rätvinklig triangel inskriven i en rektangel på det sätt som figuren nedan visar, där triangelns hypotenusa ges längden 1. Då motstående sidor i rektangeln är lika långa inses att ovanstående samband för $\sin(\alpha+\beta)$ och $\cos(\alpha+\beta)$ måste gälla. Genom att sedan byta tecken på β fås även beviset för $\sin(\alpha-\beta)$ och $\cos(\alpha-\beta)$.



[32] *Abu al-Wafa' Buzjani*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Abu_al-Wafa%27_Buzjani

Trigonometrin i Europa

Under medeltiden hade den kristna kyrkan en central roll i Europa. Jorden ansågs vara platt och stod i himlavalvets centrum. Matematisk och naturvetenskaplig forskning var inte något som kyrkan såg som vidare betydelsefullt och som i vissa delar ansågs stå i direkt motsats till den sanna kristna läran. Under andra halvan av 1400-talet[33] började emellertid en ny världsbild få fäste. När nya vetenskapliga landvinningar och upptäckter gjordes kunde kyrkan inte längre stå emot. Vid 1500-talets början var det allmänt känt att jorden var rund och kretsade kring solen. Sjöfarten tog fart och stora påkostade upptäcktsresor inleddes. De europeiska stormakterna erövrade stora landområden runt om i världen, så kallade kolonier som försåg européerna med råvaror. Denna tid benämns som renässansen, vilket betyder *pånyttfödelse*.

Under renässansen återuppväcktes också intresset för grekisk konst, litteratur och således även matematik i Europa. Man ansåg sig ha återupptäckt antikens storhet efter att gamla översättningar från antika grekiska skrifter nått allmänheten. Bland de allra första europeiska vetenskapsmännen kan speciellt nämnas den tyske matematikern och astronomen Johannes Regiomontanus[34] (1436-1476) som ägnade en stor del av sin verksamma tid till att tolka och översätta Ptolemaios[35] verk Almagest. Han utgav bland annat skriften *De triangulis omnimodis* och anses vara den förste att studera trigonometri som en separat lära inom matematiken.

Ett stort antal andra vetenskapsmän tog upp de antika grekernas, arabernas och indiernas arbeten och den matematiska utvecklingen tog ordentlig fart de kommande århundradena. Speciellt nämns här några av dem som haft stor betydelse för trigonometrins utveckling: Francois Viéte[36] (1540-1603), James Gregory[37] (1638-1675), Roger Cotes[38] (1682-1716) och Leonard Euler[39] (1707-1783).

Dessa herrar banade väg för nyfunna trigonometriska kopplingar mot algebran respektive logaritmen. I kommande sektioner ges en inblick i dessa bägge kopplingar.

---

[33] *SO-rummet*. (2016). Hämtat från http://www.so-rummet.se/kategorier/historia/nya-tiden/renassans-upptacktsresor-och-en-ny-varldsbild

[34] *Johannes Regiomontanus*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Johannes_Regiomontanus

[35] *Ptolemaios*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Ptolemaios

[36] *François Viète*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

[37] *James Gregory*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/James_Gregory_(matematiker)

[38] *Roger Cotes*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Cotes

[39] *Leonard Euler*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Kopplingen mot algebran

Den franske matematikern Francois Viète[40] fann ett samband mellan algebran och trigonometrin. Han visade att man kunde lösa tredjegradsekvationer genom att tredela en godtycklig vinkel. Viète använde cirkelkordor för sin redogörelse, men för enkelhetens skull redovisas sambandet nedan med vår moderna notation.

Om man utgår från tredubbla vinkeln α kan man med hjälp av additionsformeln för cosinus teckna detta som:

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)$$

Detta kan vidareutvecklas enligt följande:

$$\cos(3\alpha) = (2\cos(\alpha)^2 - 1)\cos(\alpha) - (2\sin(\alpha)\cos(\alpha))\sin(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = (2\cos(\alpha)^2 - 1)\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha)^2\cos(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = 2\cos(\alpha)^3 - \cos(\alpha) - 2(1 - \cos(\alpha)^2)\cos(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = 2\cos(\alpha)^3 - \cos(\alpha) - 2\cos(\alpha) + 2\cos(\alpha)^3$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha)$$

Detta innebär att för polynomet T(x)= $4x^3 - 3\mathrm{x} - \cos(3\alpha)$ finns en lösning $\mathrm{x} = \cos(\alpha)$.

$$\cos(3\alpha) = 4x^3 - 3\mathrm{x}$$

Se följande exempel på en tredjegradsekvation:

$$4x^3 - 3\mathrm{x} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \cos(120°)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos(120°) => \alpha = 40°$$

En lösning till ekvationen blir då:

$$\mathrm{x}_1 = \cos(40°) \approx 0{,}7660$$

Även vinklarna 240° och 480° har cosinusvärdet $-\frac{1}{2}$, vilket ger oss de två återstående lösningarna:

$$\mathrm{x}_2 = \cos(80°) \approx 0{,}1736 \text{ och } \mathrm{x}_3 = \cos(160°) \approx -0{,}9397$$

[40] *François Viète*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

Kopplingen mot logaritmen

Den brittiske matematikern Brook Taylor[41] har fått ge namn åt Taylorutveckling som innebär att en funktion kan representeras som en oändlig summa termer som beräknats ur funktionens derivata vid en viss punkt. Redan tidigare under 1600-talet hade dock den skotske matematikern James Gregory[42] formulerat Taylorutveckling för trigonometriska funktioner.

Taylorutveckling för cosinus och sinus kan tecknas som:

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots$$

Redan i antikens Grekland hade man funnit att vissa ekvationer saknar reella rötter. Denna problematik togs upp i Europa under 1500-talet och ledde fram till fenomenet roten ur ett negativt tal och därmed definitionen av komplexa tal. Den brittiske matematikern Roger Cotes[43], som för övrigt var en nära medarbetare[44] till Isaac Newton[45], visade sambandet:

$$\log\left(\cos(\varphi) + \sqrt{-1}\cdot\sin(\varphi)\right) = \sqrt{-1}\cdot\varphi$$

Den otroligt produktive schweiziske matematikern Leonard Euler[46] introducerade beteckningen $i = \sqrt{-1}$ och fick ge namn åt Eulers formel:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$$

Eulers formel kan visas genom att ersätta Taylorutvecklingen för $e^{i\varphi}$ med motsvarande Taylorutvecklingar för $\cos(\varphi)$ och $\sin(\varphi)$ enligt ovan.

$e^{i\varphi}$ kan Taylorutvecklas som:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \frac{i^6\varphi^6}{6!} + \frac{i^7\varphi^7}{7!} + \cdots$$

---

[41] *Brook Taylor*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor
[42] *James Gregory*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/James_Gregory_(matematiker)
[43] *Roger Cotes*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Cotes
[44] Berg, L. (2016). Några exempel på nyare matematik. Högskolan Dalarna.
[45] *Isaac Newton*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
[46] *Leonard Euler*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

men eftersom:

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = +1, \qquad i^5 = +i, \qquad i^6 = -1, \qquad i^7 = -i$$

kan vi istället skriva $e^{i\varphi}$ som:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \cdots$$

Då kan vi enkelt se att:

$$\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \cdots = e^{i\varphi}$$

Vi kan också ur detta notera Eulers identitet:

$$e^{i\pi} = -1$$

Några ord om trigonometrins förgrundsgestalter

Thales (ca 625-545 f.Kr.)

Thales[47] från staden Miletos var en grekisk filosof, astronom och matematiker. Han tillhörde en av Greklands sju vise män enligt Platons dialog *Protagoras*. Thales var en berest man som bland andra länder varit i Egypten och hade kunskaper i geometri. Han menade att allt är vatten och att allt kan förklaras om vi kan förklara vatten. Han har fått ge namn åt *Thales sats* som visar att en inskriven triangel i en cirkel vars ena sida är diametern har en rät vinkel mot cirkelns periferi.

Pythagoras (ca 580-495 f.Kr.)

Pythagoras[48] föddes på ön Samos. Han var bekant med Thales och brukade besöka honom i Miletos. Han reste också till Egypten för att förkovra sig inom matematik och astronomi. Då Egypten invaderats av den persiske kungen Kambyses II, fördes Pythagoras som krigsfånge till Babylon där han studerade deras läror. Efter några år återvände han till Samos men flyttade senare vidare till Kroton i Italien där han grundade en skola. Eleverna på skolan kom att kalla sig Pythagoréer. Pythagoras anses vara den förste att bevisa relationen mellan en rätvinklig triangels kateter och hypotenusa och har därför fått ge namn åt *Pythagoras sats*.

Euklides (ca 325-265 f.Kr.)

Euclides[49] var en grekisk matematiker som var verksam i Alexandria i nuvarande Egypten. Man tror att han som ung studerade i Aten vid Platons akademi innan han kom till Alexandria där han var verksam i 20-30 år. Under sin tid i Alexandria skrev han nio till tio verk, av vilka bara en del finns bevarade. Hans mest kända verk är *Stoicheia*, eller *Elementa* på latin. Elementa består av 13 böcker om planfigurer, talteori, irrationella tal samt rymdgeometri. En stor del var Elementa var inte hans eget verk utan en samling av nästan all dåtida kunskap kring geometri. Verket har använts i olika versioner som läromedel ända in i våra dagar.

Archimedes (ca 287-212 f.Kr.)

Archimedes[50] föddes i hamnstaden Syrakusa på Sicilien. Han utbildades i Alexandria men levde och verkade i sin hemstad. Archimedes var oerhört mångsidig och konstruerade många uppfinningar, däribland katapulten som användes för att försvara Sicilien mot Romarna. Han är av många betraktad som en av de allra största matematikerna genom tiderna och kanske mest känd för Arkimedes princip och Arkimedes skruv. Hans beräkning av ett närmevärde till talet π kom att stå sig ända fram till 1600-talet.

---

[47] *Thales*. (2016). https://sv.wikipedia.org/wiki/Thales
[48] *Pythagoras*. (2016). https://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoras
[49] *Euklides*. (2016). https://sv.wikipedia.org/wiki/Euklides
[50] *Archimedes*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Arkimedes

Hipparchos (ca 190-125 f.Kr.)

Hipparchos[51] var en grekisk matematiker och astronom. Man vet inte så mycket om hans liv förutom att han huvudsakligen verkade på ön Rhodos och tillbringade troligen en del tid även i Alexandria. Han lyckades förutspå solförmörkelser och utförde den första stjärnkatalogen i västerlandets historia. Det mesta som är känt om hans arbeten finns dokumenterat av hans efterföljare Ptolemaios i hans verk *Almagest*. Där beskrivs bland annat den första kända trigonometriska tabellen i antikens Grekland.

Ptolemaios (ca 90-170 e.Kr.)

Ptolemaios[52], benämns ofta som Ptolemy i engelskspråkig litteratur, var en Grekisk matematiker och astronom. Han var verksam i Alexandria i nuvarande Egypten, där han utförde en mängd astronomiska observationer. Han ställde även upp den så kallade Ptolemaiska satsen, som säger att summan av rektanglarna av de motstående sidorna i en i en cirkel inskriven fyrhörning är lika med rektangeln av diagonalerna. Det är osäkert hur stor del som var hans eget verk och hur mycket som han återberättat från bland andra Hipparchos. Hans viktigaste verk var *Almagest*, där han bland annat dokumenterade den första trigonometriska tabellen (kordatabellen).

Diofantos (ca 210-290 e.Kr.)

Diofantos[53] var verksam i Alexandria och var bland de första att använda symbolisk notation inom matematiken. Han författade det berömda verket *Arithmetika* i tretton böcker varav tio finns bevarade. Diofantos har fått ge namn åt så kallade diofantiska ekvationer på formen Ax+By=C där A, B och C är heltal.

Aryabhata (476-550 e.Kr)

Aryabhata[54] var en indisk astronom och matematiker född i staden Pataliputra. Troligen bodde och studerade han viss tid i Kusumapura. Han författade skriften Aryabhatiya som en slags summering av dåtidens vetskap inom matematik. Han definierade också sinus och cosinus på det sätt som används idag.

Al-Khwarizimi (780-850)

Al-Khwarizimi[55] var en persisk matematiker och astronom. Han studerade vid Bagdads lärosäte Visdomens hus, där han författade ett antal böcker inom både algebra och trigonometri. Man vet inte så mycket om honom förutom hans bevarade skrifter. Al-Khwarizimi har dock fått ge sitt namn åt ordet *algoritm*.

---

[51] *Hipparchos*. (2016). https://sv.wikipedia.org/wiki/Hipparchos
[52] *Ptolemaios*. (2016). https://sv.wikipedia.org/wiki/Ptolemaios
[53] *Diophantus*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus
[54] *Aryabhata*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Aryabhata
[55] *Al-Khwarizmi*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al-Khwarizmi

Abu al-Wafa’ Buzjani (940-998)

Abu al-Wafa’ Buzjani[56] föddes i nuvarande Iran men flyttade vid 19 års ålder till Bagdad där han levde och studerade till sin död. Han introducerade de trigonometriska funktionerna secant, cotangent och cosecant och gjorde även stora upptäckter inom den sfäriska trigonometrin.

Regiomontanus(1436-1476)

Johannes Regiomontanus[57] var en tysk matematiker och astronom som reste till Rom för att studera grekiska i syfte att översätta Ptolemaios verk *Almagest*. Han utgav också bland annat skriften *De triangulis omnimodis* och blev genom dessa arbeten betydelsefull för den fortsatta utvecklingen av trigonometrin i Europa.

Francois Viéte (1540-1603)

Francois Viete[58] var en fransman med den ovanliga kombinationen av att vara både matematiker och jurist. Han studerade i Paris och var någon tid ledamot av överdomstolen i Rennes. Vid sidan av sitt ämbete ägnade han studier i matematik och speciellt inom algebra och ekvationsteori.

Viete var den förste att använda symbolsk algebra på det sätt vi gör idag. Detta öppnade vägen för mer generella lösningar inom matematiken. Han var också först med att presentera en oändlig produktserie för att beräkna talet pi, den så kallade Vietes formel. Han hittade även ett samband mellan algebran och trigonometrin och kunde visa att en godtycklig tredjegradsekvation är ekvivalent med att tredela en godtycklig vinkel.

Edmund Gunter (1581-1626)

Edmund Gunter[59] vare en engelsk matematiker och astronom. Han blev professor i astronomi vid Gresham Collage i London. Gunter är förknippad med flera uppfinningar, däribland sektorn som var en slags föregångare till räknestickan samt Gunters kvadrant som bland annat kunde användas för att bestämma aktuell tid på dagen. Han skrev också verket *Canon triangulorum* och blev den förste att använda notationen sin.

James Gregory (1638-1675)

James Gregory[60] var en skotsk matematiker, optiker och astronom. Han verkade som professor i matematik vid universiteten i St: Andrews och Edinburgh. Gregory uppfann en ny typ av reflekterande teleskop som fått bära hans namn, Gregorianteleskopet. Inom trigonometrin redovisade han så kallade Taylorutvecklingar av sinus och cosinus bland mycket annat i sitt verk *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura.*

---

[56] *Abu al-Wafa' Buzjani*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Abu_al-Wafa%27_Buzjani

[57] *Johannes Regiomontanus*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Johannes_Regiomontanus

[58] *François Viète*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

[59] *Edmund Gunter*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Gunter

[60] *James Gregory*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/James_Gregory_(mathematician)

Roger Cotes (1682-1716)

Roger Cotes[61] var en engelsk matematiker vid universitetet i Cambridge och är kanske mest känd för att ha arbetat nära tillsammans med Isaac Newton inför Newtons publicering av hans berömda *Principias* andra utgåva. Cotes var även den som först introducerade den formel som idag är känd som Eulers formel.

Leonard Euler (1707-1783)

Leonard Euler[62] var en schweizisk matematiker född i Basel. Euler var otroligt produktiv med mer än 900 artiklar och matematiska böcker. Han studerade teologi och antika språk i Basel samtidigt som han utvecklade sin matematiska färdighet som elev hos Johann Bernoulli. Han anslöt sig senare till en av Johanns söner Daniell Bernoulli vid universitetet i Sankt Petersburg. Då denne lämnade Ryssland, övertog Euler Bernoullis professorstjänst vid den matematiska avdelningen. Euler lämnade senare även han det oroliga Ryssland och tog plats vid den kungliga akademien i Berlin. Det var i Berlin han publicerade sitt verk *Introductio in analysin infinitorum* som bland annat innehåller det som idag kallas Eulers formel.

[61] *Roger Cotes*. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Cotes

[62] *Leonard Euler*. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Diskussion

Jag har genom denna uppsats försökt att ge en översiktlig bild av hur trigonometrin utvecklats, från de antika grekernas geometriska bevis fram till senare dagars kopplingar mot algebran och logaritmen. Som tidigare nämnts är historien inom området trigonometri enormt omfattande och vissa avgränsningar har därför varit oundvikliga. Ett exempel på uppslag till fortsatt arbete inom samma område skulle kunna vara en fördjupning inom den så kallade sfäriska trigonometrin.

Enligt det centrala innehållet för några av gymnasieskolans matematikkurser[63] ska undervisningen bland annat behandla (kurskod inom parantes):

- Begreppen sinus, cosinus och tangens och metoder för beräkning av vinklar och längder i rätvinkliga trianglar. (MATMAT01c)
- Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma. (MATMAT01c)
- Fördjupning av geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel sinus, cosinus, tangens, vektorer och symmetrier. (MATMAT02a)
- Egenskaper hos cirkelns ekvation och enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp. (MATMAT03c)
- Bevis och användning av cosinus- sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel. (MATMAT03c)
- Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler. (MATMAT04)
- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska funktioner. (MATMAT04)
- Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri. (MATMAT04)
- Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria. (Alla MATMAT)

Det är mot bakgrund av ovanstående centrala innehåll som denna uppsats författats i syfte att tydliggöra trigonometrin ur ett historiskt perspektiv. Genom att visa de matematiska härledningarna som lett fram till våra dagars trigonometriska samband väntas eleverna nå ökad förståelse för ämnet. Som extra krydda läggs med fördel några ord om trigonometrins förgrundsgestalter in på lämplig tidpunkt i anslutning till undervisningen.

Av pedagogiska skäl är de matematiska bevisen i denna uppsats skrivna med dagens moderna notation. Med den kunskapsnivå vi har idag kan härledningarna i vissa fall uppfattas som triviala och självklara. Då ska man komma ihåg att många av dem tagit mänskligheten flera århundraden att komma fram till. Det kan vara bra att ha i åtanke då vi försöker lära ut dessa samband till våra elever. Det till synes självklara kan ibland vara mycket svårt innan man har facit i hand.

Det har varit både utvecklande och ett sant nöje att författa denna uppsats. Jag hoppas att den ska upplevas intressant och allmänbildande för både lärare och elever. Avslutningsvis hoppas jag också att den ska fungera som en inspirationskälla till implementering av matematikens historia i samband med den ordinarie matematikundervisningen inom området trigonometri.

---

[63] Skolverket. (2011). Ämnesplaner i matematik för gymnasiet 1-5. i Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola.*

Referenser

Abu al-Wafa' Buzjani. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Abu_al-Wafa%27_Buzjani

Al-Khwarizmi. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al-Khwarizmi

Archimedes. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Arkimedes

Aryabhata. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Aryabhata

Bartholomaeus Pitiscus. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Bartholomaeus_Pitiscus

Berg, L. (2016). Några exempel på nyare matematik. Högskolan Dalarna.

Biblioteket i Alexandria. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Biblioteket_i_Alexandria

Bonaobra, P. M. (2013). Hämtat från History of trigonometry clasical - animated: http://www.slideshare.net/PHILLMURP/history-of-trigonometry-clasical-animated

Brander, L. (2016). *Det antika Alexandria*. Hämtat från http://www.alltomvetenskap.se/nyheter/det-antika-alexandria

Brook Taylor. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

Diophantus. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus

Edmund Gunter. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Gunter

Euklides. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Euklides

François Viète. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

Hipparchos. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Hipparchos

History of trigonometry. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_trigonometry

Isaac Newton. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

James Gregory. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/James_Gregory_(mathematician)

Johannes Regiomontanus. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Johannes_Regiomontanus

Johansson, B. (2013). *Matematikens historia.*

Leonard Euler. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Mouwitz, K. &. (2008). *Matematiktermer för skolan.*

Plimton 322. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

Plutarchos. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Plutarchos

Ptolemaios. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Ptolemaios

Pythagoras. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

Pythagorean triple. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple#Proof_of_Euclid.27s_formula

Robert of Chester. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_of_Chester

Roger Cotes. (2016). Hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Cotes

Skolverket. (2011). Ämnesplaner i matematik för gymnasiet 1-5. i Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola.*

SO-rummet. (2016). Hämtat från http://www.so-rummet.se/kategorier/historia/nya-tiden/renassans-upptacktsresor-och-en-ny-varldsbild

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History, Third Edition.*

Thales. (2016). Hämtat från https://sv.wikipedia.org/wiki/Thales

The Story of Mathematics. (2016). Hämtat från http://www.storyofmathematics.com/indian.html

Wildberger, N. (2015). *History of Greek Geometry*. Hämtat från https://cosmolearning.org/video-lectures/history-greek-geometry-i/