3108 ö Ge exempel på två olika funktioner f och g som uppfyller villkoret $f'(x) = g'(x) = \frac{x}{3}$

3108. $f(x) = \frac{x^2}{6}$ $\qquad g(x) = \frac{x^2}{6} + 3$

3109 För vilken eller vilka av följande funktioner är $f'(-2) = 12$?

A $f(x) = -x^3$ **B** $f(x) = x^3$

C $f(x) = -3x^2$ **D** $f(x) = -6x$

3109. B $(f'(x) = 3x^2)$, C $(f'(x) = -6x)$

3110 Visa med hjälp av derivatans definition att om $f(x) = 9x$, så är $f'(x) = 9$.

3110. $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{9(x+h) - 9x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9h}{h} = 9$$

3111 En funktion f anges med $f(x) = \dfrac{3x^4}{5}$.
Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till funktionens graf i den punkt där $x = 2$.

3111. $f'(x) = \dfrac{12x^3}{5}$

$k = f'(2) = \dfrac{12 \cdot 2^3}{5} = \dfrac{96}{5} = \underline{19{,}2}$

3112 Vilka punkter på kurvan $y = 5x^3$ har en tangent vars riktningskoefficient är 60?

3112. $y' = 15x^2$

$15x^2 = 60 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \underline{(-2, -40), (2, 40)}$

3113 Visa med hjälp av derivatans definition att om $f(x) = 2x - 3$ och $g(x) = k \cdot f(x)$, där k är konstant, så är $g'(x) = k \cdot f'(x)$.

3113. $f' = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2(x+h) - 3 - 2x + 3}{h} = 2$

$g(x) = k \cdot f(x) = k(2x - 3) = 2kx - 3k$

$g'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{2k(x+h) - 3k - 2kx + 3k}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2kh}{h} = 2k = k \cdot f'(x)$

3122 Bestäm $f'(x)$

a) $f(x) = (x+1)^2$

b) $f(x) = (x-3)(x+3)$

3122. a) $f'(x) = 2(x+1)$

b) $f(x) = x^2 - 9$, $f'(x) = 2x$

3123 En funktion f anges med funktionsuttrycket $f(x) = x^4 - 3x^3 + 101$. Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till funktionens graf i punkten där $x = 3$.

3123. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2$

$k = f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 = 4 \cdot 27 - 81 = 27$

3124 ö Ge exempel på en funktion f, sådan att $f'(1) = 10$.

3124. $f(x) = 5x^2$

3125 En funktion f anges med funktionsuttrycket $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Bestäm funktionens derivata i funktionens nollställen.

3125. $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0$

$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 3$

$f'(x) = 2x - 4$

$\underline{f'(1) = -2 \ , \ f'(3) = 2}$

3126 Lös ekvationen $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 11$

3126. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = \pm 1}$

b) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

$x = \frac{2}{6} \pm \frac{\sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \underline{\frac{1 \pm 2}{3}}$

3127 Anna har fått i uppgift att beräkna derivatan av $f(x) = x^3 - 6x$ i $x = 2$.

Hon beräknar den med följande metod:

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 = -4$

$f'(2) = D(-4) = 0$

a) Vilket fel gör Anna?

b) Vilket är det korrekta sättet att beräkna funktionens derivata i $x = 2$?

3127. a) Hon bör lösa ut $f'(x)$ innan hon stoppar in värden.

b) $f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$

3128 **ö** Ge exempel på två olika funktioner f och g som uppfyller villkoret $f'(x) = g'(x) = x^2 - 3x$.

3128. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$, $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4$

3129 a) Ge exempel på tre olika funktioner
ö f, g och h som uppfyller villkoret
$f'(x) = g'(x) = h'(x)$.

b) Kan det finnas fler funktioner som har samma derivata som f, g och h?

3129. a) $f(x) = x^2+1$, $g(x) = x^2+2$, $h(x) = x^2+3$

b) Alla funktioner $f(x) = x^2 + C$

3130 Tangenten till kurvan $y = ax^2 + bx$ i punkten $(1, -1)$ har riktningskoefficienten $k = 4$. Bestäm talen a och b.

3130. $y' = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} y'(1) = 4 \Rightarrow 2a + b = 4 \\ y(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -6 \end{array}$$

3136 Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $y = \frac{1}{x} - 0{,}1$ där $x = 3$.

3136. $y' = -\frac{1}{x^2}$

$k = y'(3) = -\frac{1}{9}$

3137 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1$ i punkten (2, 3).

3137.

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$k = y'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$$

Tangentens ekv:

$$y - y(2) = k(x-2)$$

$$y - 3 = 0(x-2)$$

$$y = 3$$

3138 Varför kan man inte beräkna derivatan av $f(x) = \frac{3}{x} + 0{,}3$ i den punkt där $x = 0$?

3138. f(x) är odefinerad för $x = 0$.

3139 Ett flygbolag har kommit fram till att resenärernas genomsnittliga vikt M kg under perioden oktober–januari kunde beräknas med funktionsuttrycket $M(t) = M_0 \cdot t^{0,027}$. I uttrycket är $M_0 = 55$ kg den genomsnittliga vikten av en resenär i början av perioden och t är antalet veckor efter den 1 oktober. Med hur många kg/vecka ökar resenärernas genomsnittliga vikt 15 veckor efter periodens början?

3139. $M'(t) = M_0 \cdot 0.027 \cdot t^{-0.973}$

$M'(15) = 55 \cdot 0.027 \cdot 15^{-0.973} = \underline{0.106 \text{ kg/vecka}}$

3140 Varför kan man inte bestämma ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^2 + \sqrt{x} - 3$ i punkten $(0, -3)$?

3140. $y'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

x i nämnaren, y' odefinierad för $x = 0$.

3141 Gravitationslagen kan aldrig bevisas på samma sätt som man bevisar saker inom matematiken, men den är experimentellt bevisad. "Två kroppar attraherar varandra ömsesidigt med en kraft som är direkt proportionell mot deras massor och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan dem" är Newtons formulering av gravitationslagen. Sambandet brukar uttryckas med formeln

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

där F är kraften, G är gravitationskonstanten, r är avståndet mellan kropparna och m respektive M är kropparnas massor.

a) Bestäm $\frac{dF}{dr}$ och tolka resultatet.

b) Vi förutsätter att jordens dragningskraft mot en komet som befinner sig 20 000 km från jorden avtar med en hastighet av 2 N/km. Hur snabbt ändras jordens dragningskraft när kometen befinner sig på 10 000 km avstånd?

3141. a) $\frac{dF}{dr} = \frac{-2G \cdot m \cdot M}{r^3}$

Förändringen i dragningskraft vid ett visst avstånd.

b) $2GmM = 2 \cdot 20000^3$

$\frac{dF}{dr}(10000) = \frac{-2 \cdot 20000^3}{10000^3} = -16$ N/km

3142 Bestäm en funktion f vars tangent i punkten där $x = 1$ har ekvationen $y = x - 3$.

3142.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$f(1) = y'(1) = -2 \Rightarrow \frac{1}{2} - 3 + C = -2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\underline{f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{2}}$$

3143 Visa med hjälp av derivatans definition att om $f(x) = \frac{1}{x^2}$, så är $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

3143.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{h \cdot x^2 (x+h)^2} = \frac{-2xh - h^2}{x^4 h + 2x^3 h^2 + x^2 h^3} =$$

$$= \frac{-2x - h}{x^4 + 2x^3 h + x^2 h^2} = \frac{-2(x+h)}{x^2(x^2 + 2xh + h^2)} = \frac{-2(x+h)}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2}{x^2(x+h)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{x^2(x+h)} = -\frac{2}{x^3}$$

3209 a) Använd räknaren till att bestämma kvoterna

$$\frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{och} \quad \frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

för små värden på h. Svara med två decimaler.

b) Använd resultatet från a) för att beräkna derivatan av $f(x) = 2{,}7^x$ och $g(x) = 2{,}8^x$.

3209. a) $h = 0.001 \Rightarrow$ $\frac{2{,}7^h - 1}{h} \approx 0.99$

$\frac{2{,}8^h - 1}{h} \approx 1.03$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2{,}7^{x+h} - 2{,}7^x}{h} = \frac{2{,}7^x(2{,}7^h - 1)}{h} \approx \underline{0.99 \cdot 2{,}7^x}$

$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2{,}8^{x+h} - 2{,}8^x}{h} = \frac{2{,}8^x(2{,}8^h - 1)}{h} \approx \underline{1.03 \cdot 2{,}8^x}$

3210 Bestäm lutningen för tangenten till kurvan $y = x^3 - e^x + e$ där $x = 2$.

3210. $y' = 3x^2 - e^x$

$k = y'(2) = 3 \cdot 2^2 - e^2 = \underline{12 - e^2}$

3211 Vilken eller vilka av följande funktioner har $f'(1) = 1 - e$?

A $f(x) = 1 - e^x$

B $f(x) = e^x - x$

C $f(x) = x - e^x + 1$

D $f(x) = 1 - (e^x - x)$

3211. C, D

3212 Kan det finnas en tangent till kurvan $y = e^x$ som är parallell med x-axeln?

3112. Nej, för dess derivata $y' = e^x$ kan aldrig bli 0.

3213 Bestäm ekvationen för den tangent till kurvan $y = 2e^x + 3x - 7$ som är parallell med linjen $y = 5x - 4$.

2.

3213. Parallell $\Rightarrow k = 5$

$y' = 2e^x + 3$

$y'(x) = 5 \Rightarrow 2e^x + 3 = 5$; $x = \ln 1 = 0$

Tangentens ekv:

$g - g(0) = k(x - 0)$, $g(0) = y(0)$

$g = 5x - 5$

3214 För vilka värden på x har funktionerna f och g samma värde på derivatan om
$f(x) = 10e^x + x^3 - 8x^2 - x$ och
$g(x) = x^2 - 16x + 4 + 10e^x$?

3214. $f'(x) = 10e^x + 3x^2 - 16x - 1$

$g'(x) = 2x - 16 + 10e^x$

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow 3x^2 - 16x - 1 = 2x - 16$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$

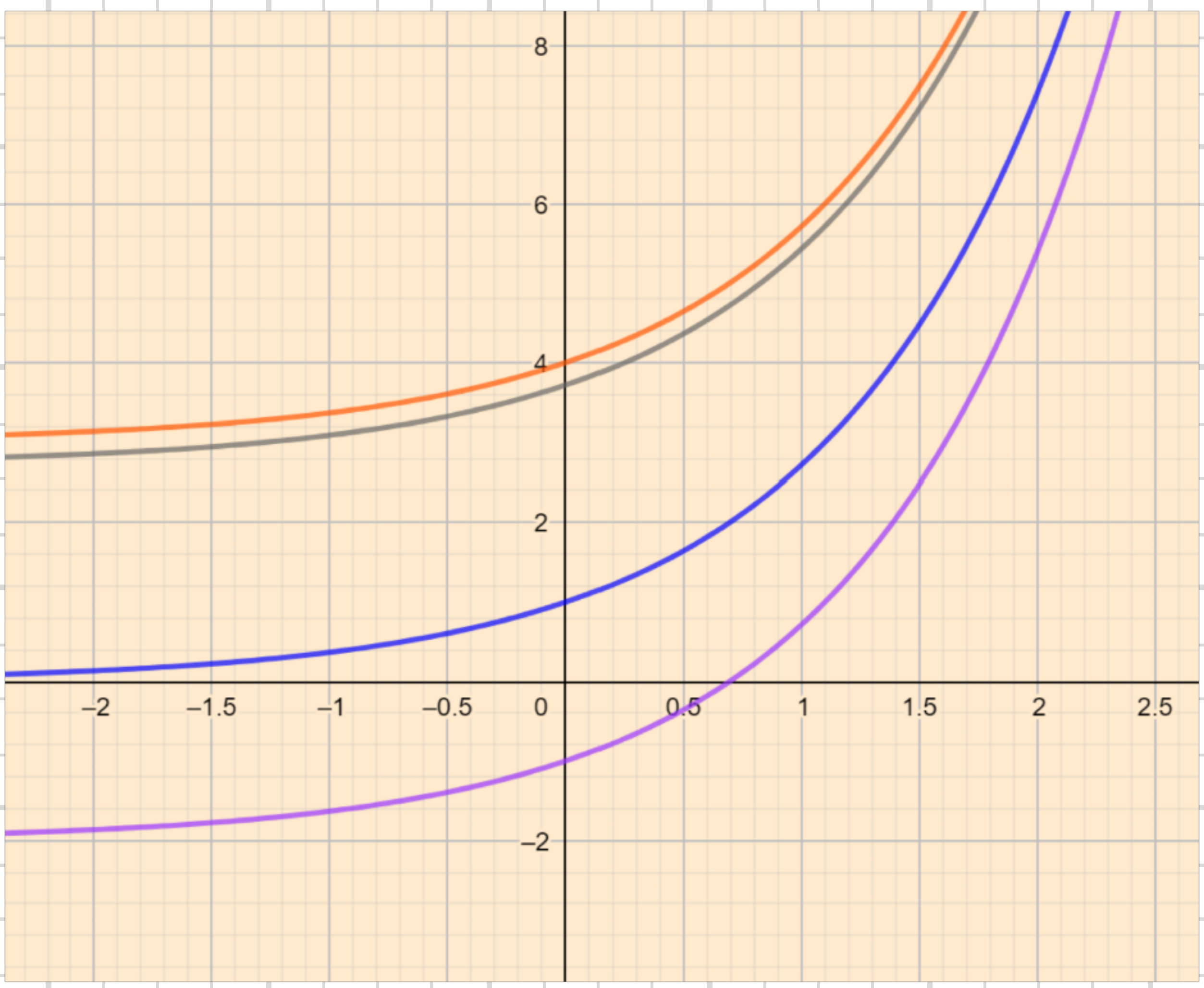
$\underline{x_1 = 1, \ x_2 = 5}$

3215 a) Bestäm derivatan av $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^x + 3$, $f_3(x) = e^x - 2$ och $f_4(x) = e^x + e$

b) Rita graferna till f_1, f_2, f_3 och f_4 med hjälp av din grafritande räknare. Rita också graferna till f_1', f_2', f_3' och f_4'. Jämför funktionernas grafer med graferna till deras derivator. Vilka slutsatser kan man dra av resultatet?

3215. a) $f_1'(x) = f_2'(x) = f_3'(x) = f_4'(x) = e^x$

b) Höjdläget för funktionen f spelar ingen roll, derivatan blir densamma.



3216 Enligt definitionen av talet e är $f(x) = e^x$ identiskt med sin egen derivata.
Visa utan att använda deriveringsregeln $D(k \cdot g(x)) = k \cdot g(x)$ att

a) om $f(x) = 8e^x$, så är $f'(x) = 8e^x$

b) om $f(x) = n \cdot e^x$, där n är ett heltal, så är $f'(x) = n \cdot e^x$

3216. a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8e^{x+h} - 8e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8e^x(e^h - 1)}{h} = 8e^x$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{n \cdot e^{x+h} - n \cdot e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{n \cdot e^x(e^h - 1)}{h} = n \cdot e^x$$

3223 Bestäm $f'(1)$ exakt med hjälp av deriveringsreglerna.

a) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$

b) $f(x) = 3^x + \frac{1}{3^x}$

c) $f(x) = C \cdot e^{kx}$

3223. a) $f'(x) = e^x - e^{-x}$

$$f'(1) = e - \frac{1}{e}$$

b) $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x - \ln 3 \cdot 3^{-x} = \ln 3\left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)$

$$f'(1) = \ln 3\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8 \ln 3}{3}$$

c) $f'(x) = C \cdot k e^{kx}$

$$f'(1) = C \cdot k \cdot e^k$$

3224 Låt $y = e - e^{\pi \cdot x}$ och bestäm riktningskoefficienten för tangenten till kurvan där $x = 4$.

3224. $y' = -\pi e^{\pi x}$

$$k = y'(4) = -\pi e^{4\pi}$$

3225 ö Ge ett exempel på en rät linje i formen $y = kx + m$ som är parallell med tangenten till kurvan $y = 1\,001 + e^{-x/2}$ där $x = 0$.

3225. $y' = -\frac{e^{-x/2}}{2}$

$k = y'(0) = -\frac{1}{2}$

ex. $\underline{y = -\frac{x}{2} + 1}$

3226 I en cellodling finns det från början 600 celler. Antalet celler $N(t)$ efter t timmar beskrivs av $N(t) = N_0 \cdot e^{0,11t}$, där N_0 är antalet celler när $t = 0$.

a) Bestäm derivatan av $N(t)$.

b) Vad beskriver derivatan $N'(t)$?

c) Med hur många procent har antalet celler ökat efter 24 timmar?

3226. a) $N'(t) = 600 \cdot 0{,}11 e^{0{,}11t} = 66 e^{0{,}11t}$

b) Cellökningen vid en viss tidpunkt t

c) $\frac{600(e^{0{,}11 \cdot 24} - 1)}{600} = 13{,}0 = 1300\,\%$

3227 Bestäm ekvationen i formen $y = kx + m$ för tangenten till kurvan $y = e^2 - e^{\sqrt{2} \cdot x}$ i punkten där $x = \sqrt{2}$.

3227. $y' = -\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}x}$

$k = y'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\, e^2$

<u>Tangentens ekv:</u>

$g - g(\sqrt{2}) = k(x - \sqrt{2})$, $g(\sqrt{2}) = y(\sqrt{2}) = 0$

$g - 0 = -\sqrt{2}\, e^2 (x - \sqrt{2})$

$g(x) = -\sqrt{2}\, e^2 x + 2e^2 = \sqrt{2}\, e^2 (\sqrt{2} - x)$

3228 Grafen till $f(x) = C \cdot e^{kx}$ har lutningen 5 i punkten $(0, 3)$. Bestäm talen C och k.

3228. $f'(x) = Cke^{kx}$

$f'(0) = 5 \Rightarrow C \cdot k = 5$

$f(0) = 3 \Rightarrow C = 3$; $k = \frac{5}{3}$

3229 För en funktion gäller att $g(0) = 5$ och $g'(x) = 0{,}048 \cdot e^{-0{,}003x}$. Bestäm $g(x)$.

3229.

$$g(x) = \frac{0{,}048}{-0{,}003} \cdot e^{-0{,}003x} + c$$

$$g(0) = 5 \Rightarrow -16 + c = 5 \; ; \; c = 21$$

$$\underline{g(x) = -16e^{-0{,}003x} + 21}$$

3235 Antalet invånare $A(t)$ i en stad anges med $A(t) = 58\,000 + 1\,200t$, där t är tiden räknat i år från år 1990.

a) Hur snabbt ökade antalet invånare år 1997?

b) Hur snabbt ökade antalet invånare år 2007?

c) Jämför resultaten från a) och b). Varför får man just de resultaten?

3235.

a) $A' = 1200$ invånare/år

b) $A' = 1200$ — " —

c) Antalet invånare växer linjärt.
Ökningen är därmed konstant

3236 För vilket eller vilka x-värden är tangenten till kurvan parallell med x-axeln?

a) $y = x^3 - x^2 + 1$ b) $y = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{x}$

c) $y = e^x - x - 1\,001$

3236. a) $y' = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{x = 0,\ x = \frac{2}{3}}$

b) $y' = \frac{x}{8} - \frac{1}{x^2}$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{x = 2}$

c) $y' = e^x - 1$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{x = \ln 1 = 0}$

3237 Kapitalet på Evas bankkonto växer enligt $K(x) = 12\,000 \cdot e^{0{,}017x}$, där $K(x)$ är värdet i kronor efter x år.

a) Hur stor är räntesatsen?

b) Beräkna $K'(5)$ och förklara innebörden av din beräkning.

3237. a) Räntesatsen är $e^{0{,}017} - 1 = 1{,}7\%$

b) $K' = 204e^{0{,}017x}$; $K'(5) = 222$ kr/år

Kapitalet växer med 222 kr/år vid år 5.

3238 En samhällsplanerare gjorde i slutet av år 2007 en prognos över befolkningsutvecklingen i Sverige. Utvecklingen beskrevs med funktionsuttrycket

$N(t) = 9{,}18 + 0{,}0232t - 0{,}000\,338t^2$

där $N(t)$ är antalet miljoner invånare t år efter år 2007. Bestäm hur stor befolkningsökningen per år är i slutet av år 2015 enligt denna prognos.

3238. $N'(t) = 0.0232 - 0.000676t$

$N'(8) = 0.0178$ miljoner/år

3239 I vilken punkt är tangenten till kurvan $y = 5 + 2e^x$ parallell med linjen $y = 4x - 3$?

3239. $y' = 2e^x$

Parallell $\Rightarrow k = y' = 4$

$2e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 2$

$(\ln 2, 9)$

3240 Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y = \pi + 4^x$ i den punkt där $x = 0$.

3240. $y' = \ln 4 \cdot 4^x$

$y'(0) = \ln 4$

Normal $\Rightarrow k = -\dfrac{1}{y'(0)} = -\dfrac{1}{\ln 4}$

<u>Normalens ekv:</u>

$y - y(0) = k(x - 0)$, $y(0) = y(0) = \pi + 1$

$y - \pi - 1 = -\dfrac{x}{\ln 4}$

$y = -\dfrac{x}{\ln 4} + \pi + 1$

3241 Värdet av en segelbåt minskar exponentiellt med tiden. Segelbåten köptes för 420 000 kr för fem år sedan och i dag är den värd 290 000 kr.

a) Bestäm en exponentialfunktion med basen e som beskriver segelbåtens värdeminskning.

b) Hur lång tid efter köpet kommer värdet att minska med 8 000 kr per år?

3241. a)

$$420000 \cdot e^{k \cdot 5} = 290000 \Rightarrow$$

$$k = \frac{1}{5} \cdot \ln \frac{290}{420} \approx -0{,}0741$$

$$\underline{y = 420000 \cdot e^{-0{,}0741 \cdot t}}$$

b)

$$y' = 31122 e^{-0{,}0741t}$$

$$y' = 8000 \Rightarrow t = -\frac{1}{0{,}0741} \cdot \ln \frac{8000}{31122} \approx \underline{18 \text{ år}}$$

3242 Karolina håller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20 °C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$T(t) = 95e^{-0{,}039t}$, där T är kaffets temperatur i °C och t är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning.

b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut.

c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid.

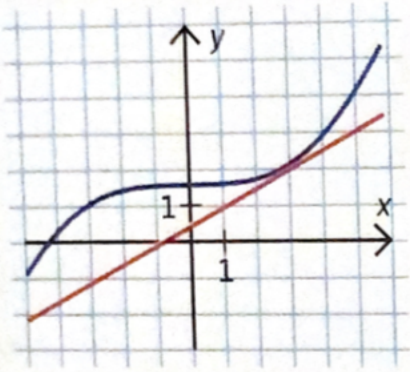
(Np Ma3b ht 2012)

3242. a) $\underline{T(0) = 95°C}$

b) $1 - e^{-0{,}039} = \underline{3{,}8\%}$

c) När temperaturen når rumstemp. stämmer ej längre modellen.

3243 Linjen l tangerar kurvan y i punkten $(3, 2)$ och skär x-axeln där $x = -1$. Bestäm $y'(3)$.



3243. $y'(3) = k = \frac{1}{2}$

3244 Visa att man inte kan dra en tangent med lutningen 4 till kurvan $y = 5x + \sqrt{x}$.

3244. $y' = 5 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y' = 4 \Rightarrow 5 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ (går ej)

3245 Vd:n för glasögontillverkaren ZeBra varnade inför årets tredje kvartalsrapport: ”Produktionen fortsätter att öka, men ökningen kommer att ske i långsammare takt än under förra kvartalet”. Förklara uttalandet med hjälp av derivator.

3245. Derivatan är fortfarande positiv men har ett lägre värde.

3246 Vid ett experiment ökar antalet bakterier N i en bakteriekultur enligt $N(t) = N_0 \cdot 2^t$, där t är tiden räknat i timmar och N_0 är antalet bakterier i början av experimentet. Vid experimentets början fanns det 3 000 bakterier. Efter hur lång tid är bakteriernas tillväxthastighet 108 000 bakterier/timme?

3246. $N'(t) = 3000 \cdot \ln 2 \cdot 2^t = 2079 \cdot 2^t$

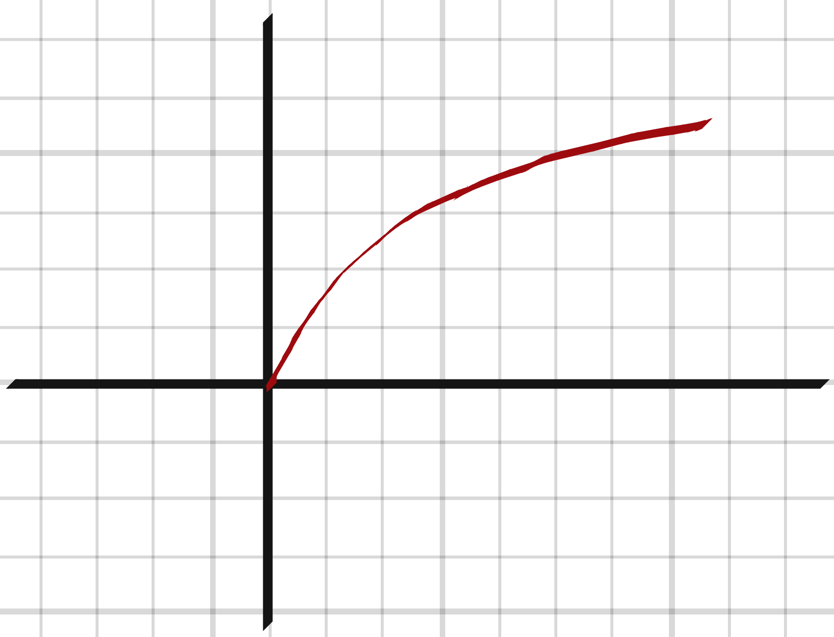
$N'(t) = 108\,000 \Rightarrow 2079 \cdot 2^t = 108\,000$

$$2^t = \frac{108\,000}{2079}$$

$$t = \frac{\ln \frac{108\,000}{2079}}{\ln 2} = \underline{5{,}7 \text{ h}}$$

3247 Förklara varför funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ inte är *deriverbar* för alla x som den är definierad för.

3247. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$



x i nämnaren $\Rightarrow$

funktionen är ej deriverbar för $x = 0$.

3248 I uppgift 3234 angavs kostnaden K kronor för att tillverka x par glasögon på företaget ZeBra med funktionsuttrycket

$K(x) = 7\,000 + 6x + 0{,}01x^2$

a) Med vilken sorts funktion beskrivs marginalkostnaden?

b) På vilket sätt ändras marginalkostnaden?

c) Bestäm ett uttryck som visar marginalkostnadens förändring beroende av antal producerade glasögonpar.

3248. a) $K'(x) = 6 + 0{,}02x$

Linjär funktion.

b) Marginalkostnaden ökar linjärt med antal tillverkade glasögon

c) $K''(x) = 0{,}02$.

Marginalkostnadens förändring är konstant.

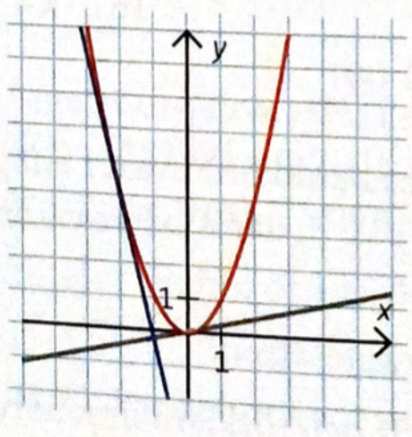
3249 Visa att $f'(x) \geq 0$ för alla x om $f(x) = Ax^5 + Bx^3$ och A och B är positiva konstanter.

(*Np MaC vt 2005*)

3249. $f'(x) = 5Ax^4 + 3Bx^2 = x^2(5Ax^2 + 3B)$

$x^2 \geq 0$, $5Ax^2 + 3B \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

3250 Visa att tangenterna till kurvan $y = x^2$ som går genom punkten $(-1, -\frac{1}{4})$ bildar rät vinkel mot varandra.



(x_t, y_t) = tangeringspunkt

3250. $y' = 2x \quad , \quad k = y'(x_t) = 2x_t$

Tangentens ekv.

$$g - g(x_t) = k(x - x_t) \quad , \quad g(x_t) = Y(x_t) = x_t^2$$

$$g - x_t^2 = 2x_t x - 2x_t^2$$

$$g(x) = 2x_t x - x_t^2$$

$$g(-1) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -2x_t - x_t^2 = -\frac{1}{4}$$

$$x_t^2 + 2x_t - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_t = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$k = 2x_t = -2 \pm \sqrt{5} \; ; \; k_1 = -2 - \sqrt{5} \; , \; k_2 = -2 + \sqrt{5}$$

Tangenterna är vinkelräta om $-\frac{1}{k_1} = k_2$:

$$-\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{2-\sqrt{5}}{4-5} = -2+\sqrt{5} = k_2 \quad \text{v.s.b.}$$