19 $z = 4 - 3i$ och $u = 2 + i$

a) Beräkna $|z|$ och $|u|$

b) Beräkna $|zu|$ och $\left|\frac{z}{u}\right|$

19. a) $|z| = (4^2 + 3^2)^{1/2} = \underline{5}$

$|u| = (2^2 + 1)^{1/2} = \underline{\sqrt{5}}$

b) $|zu| = |z| \cdot |u| = \underline{5\sqrt{5}}$

$\left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \underline{\sqrt{5}}$

---

20 Lös ekvationen $2z^3 + 2z^2 + 5z = 0$

20. $2z(z^2 + z + \frac{5}{2}) = 0$

$\underline{z_1 = 0}$

$z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4} - \frac{10}{4})^{1/2} = \underline{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i}$

---

21 Skriv på formen $a + bi$.

$$z = \frac{(2+3i)(3-i)}{(1+i)(1-2i)}$$

21. $$z = \frac{(2+3i)(3-i)}{3-i} = \underline{2+3i}$$

22 Bestäm det komplexa talet z så att

a) $2z + 3\overline{z} = 10 + i$

b) $z - 4\overline{z} = 6 - 20i$

22. a) $z = a + bi \Rightarrow$

$2a + 2bi + 3a - 3bi = 10 + i$

$5a = 10 \Rightarrow a = 2$

$-bi = i \Rightarrow b = -1$

$\underline{z = 2 - i}$

b) $a + bi - 4a + 4bi = 6 - 20i$

$-3a = 6 \Rightarrow a = -2$

$5bi = -20i \Rightarrow b = -4$

$\underline{z = -2 - 4i}$

23 Bestäm konstanten a så att talet $\dfrac{5+i}{2+ai}$ blir reellt.

23. $$\frac{(5+i)(2-ai)}{4+a^2} = \frac{10+a+(2-5a)i}{4+a^2} \Rightarrow \underline{a = \frac{2}{5}}$$

---

24 Antag att a och b är positiva reella tal. Bestäm argument till

a) a b) $-a$

c) ib d) $-ib$

24. a) $0°$ b) $180°$ c) $90°$ d) $-90°$

---

25 $z = 5(\cos 90° + i \sin 90°)$.
Beräkna och skriv på formen $a + bi$.

a) zi b) z / i c) $z^2 i$

25. a) $\underline{-5}$ b) $\underline{5}$

c) $$\left(5e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 25e^{i\frac{3\pi}{2}} = \underline{-25i}$$

---

26 Bestäm en rot till ekvationen $e^z = 1 + i$

26. $1+i = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow$

$$z = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$$

---

27 Skriv z på formen $a + bi$ då $z = (2 + i)^2 \cdot e^{0,5\pi i}$

27. $z = (2+i)^2 \cdot i = 4i - 4 - i = -4 + 3i$

---

28 Vilka av följande rötter är reella?

$z_1 = 4i + \dfrac{3-5i}{1+i}$

$z_2 = (3 + i)(2i + 1)(1 - 7i)$

$z_3 = i^{16} + i^{18}$

28. $z_1 = 4i + \dfrac{(3-5i)(1-i)}{2} = \dfrac{8i - 2 - 8i}{2} = -1$ (reell)

$z_2 = (6i + 3 - 2 + i)(1 - 7i) = (1 + 7i)(1 - 7i) = 50$ (reell)

$z_3 = 1 - 1 = 0$ (reell)

---

29 Avståndet d mellan två punkter z_1 och z_2 kan skrivas $d = |z_1 - z_2|$

a) Beräkna avståndet mellan punkterna $z_1 = 13 - 7i$ och $z_2 = 5i + 18$.

b) Bestäm talet k så att avståndet mellan punkterna $z_1 = 3 + 4i$ och $z_2 = ki$ blir 5.

29. a) $|5+12i| = (25+144)^{1/2} = \sqrt{169} = \underline{13 \text{ l.e.}}$

b) $|3+(4-k)i| = 5$

$9+(4-k)^2 = 25$

$4-k = \pm 4$

$k = 4 \pm 4$

$\underline{k_1 = 0 \quad , \quad k_2 = 8}$

30 Lös ekvationen och skriv rötterna på polär form med argumentet i grader

a) $z^4 = -16$

b) $z^6 = -64i$

30.

a) $z^4 = 16e^{180°i + k\cdot 360°i}$, $k = 0, 1, 2, 3$

$z = 2e^{45°i + k\cdot 90°i}$

$\underline{z_1 = 2e^{45°i},\ z_2 = 2e^{135°i},\ z_3 = 2e^{225°i},\ z_4 = 2e^{315°i}}$

b) $z^6 = 64e^{180°i + k\cdot 360°i}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$z = 2e^{30°i + k\cdot 60°i}$

$z_1 = 2e^{30°i},\ z_2 = 2e^{90°i},\ z_3 = 2e^{150°i},$

$\underline{z_4 = 2e^{210°i},\ z_5 = 2e^{270°i},\ z_6 = 2e^{330°i}}$

31 Lös ekvationen.

a) $x^4 - 16 = 0$ b) $x^3 - 2x^2 + 5x = 0$

31. a) $x^4 = 16e^{k \cdot 2\pi i}$

$\underline{x = 2e^{k \cdot \frac{\pi}{2} i}}$, $k = 0, 1, 2, 3$

b) $x(x^2 - 2x + 5) = 0$

$\underline{x_1 = 0 \quad , \quad x_{2,3} = 1 \pm 2i}$

---

32 Vi har det komplexa talet $z = 1 + i$.
Skriv på formen $a + bi$.

a) z^4 b) z^{10}

32. $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} i}$

a) $z^4 = 4e^{\pi i} = \underline{-4}$

b) $z^{10} = 32e^{\frac{5\pi}{2} i} = \underline{32i}$

---

33 Lös ekvationen $z^3 = 27i$

33.

$$z^3 = 27e^{\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)i}$$

$$\underline{z = 3e^{\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)i}} \quad , \quad k=0,1,2$$

---

34 Visa att $y'' + y = 0$ då $y = i \cdot e^{iz}$

34.

$$y' = -e^{iz} \quad , \quad y'' = -ie^{iz}$$

$$VL = -ie^{iz} + ie^{iz} = 0 = HL.$$

---

35 De två talen $z = 3i + 2$ och $w = -5 + 6i$ ritas som punkter i det komplexa talplanet. Bestäm vinkeln zOw där O = origo. Svara i grader med en decimal.

35.

$$\cos\varphi = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1|\cdot|z_2|}$$

$$(2,3)\cdot(-5,6) = -5\cdot 2 + 3\cdot 6 = 8$$

$$z_1 = \sqrt{13} \quad , \quad z_2 = \sqrt{61} \qquad \varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{61}} = \underline{73{,}5^\circ}$$

Alt. lösning: Cosinussatsen!

36 Bestäm realdelen för det komplexa talet $z = a + bi$ så att $z^2 + z$ är ett reellt tal för alla värden på talet b.

36.

$$z^2 + z = (a+bi)^2 + a + bi =$$

$$= a^2 - b^2 + 2abi + a + bi =$$

$$= a^2 + a - b^2 + b(2a+1)i$$

$$2a + 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{2}}$$

---

37 Bestäm de reella talen k och p så att $x = 3 + 5i$ blir en rot till ekvationen $x^2 + p = kx$.

37.

$$(3+5i)^2 + p = k(3+5i)$$

$$9 - 25 + 30i + p = 3k + 5ki$$

$$30i = 5ki \Rightarrow \underline{k = 6}$$

$$9 - 25 + p = 18 \Rightarrow \underline{p = 34}$$

---

38 Bestäm exakta värden på Re z och Im z då
$\overline{z} + 2z = 2(\cos 0{,}25\pi + i \sin 0{,}25\pi)$

38. $a - bi + 2a + 2bi = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$3a = 2\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{Re} z = a = \frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

$bi = 2i\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{Im} z = b = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}}$

---

39 Ställ upp en andragradsekvation som har reella koefficienter och en lösning $x = 1 + 3i$

39. $x_1 = 1 + 3i \Rightarrow x_2 = 1 - 3i$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i) = 0$

$x^2 - x + 3xi - x + 1 - 3i - 3ix + 3i + 9 = 0$

$\underline{x^2 - 2x + 10 = 0}$

---

40 Visa Eulers identitet $e^{\pi i} + 1 = 0$

40. $VL = e^{\pi i} + 1 = \cos\pi + i\sin\pi + 1 = -1 + 0 + 1 = 0 = HL.$

---

41 Skriv ett tvåsiffrigt tal *xy* där *x* och *y* är talets siffror. Låt siffrorna byta plats så att du får talet *yx*. Visa att de två talens differens alltid är jämnt delbart med 9.

41. $10x + y - 10y + x = k \cdot 9 \quad , k \in \mathbb{Z}$

10-tal

ental

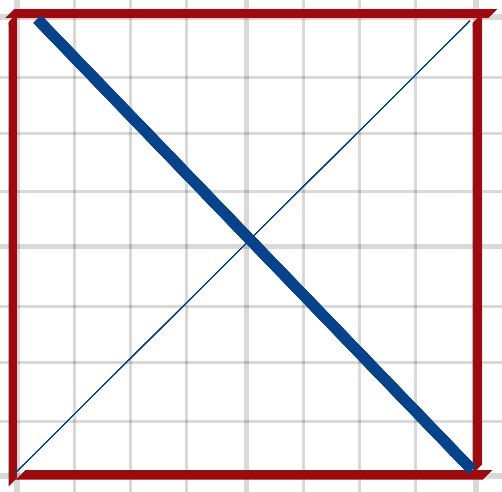
$9x - 9y = k \cdot 9$

$9(x - y) = k \cdot 9$

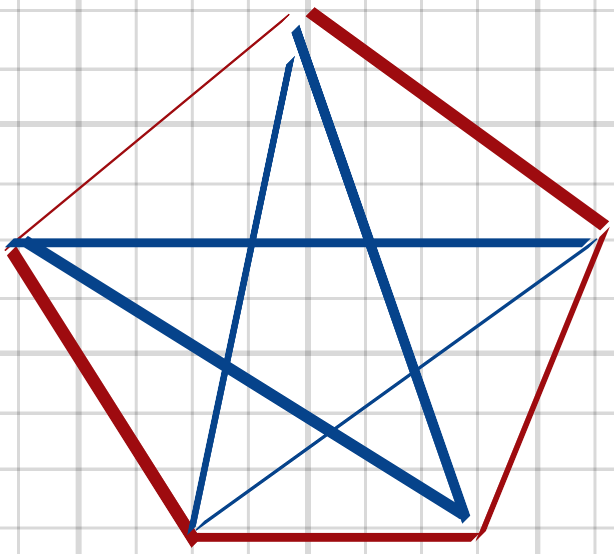
$k = x - y$

42 Visa att antalet diagonaler i en n-hörning kan skrivas $\dfrac{n^2-3n}{2}$.

42.



$$\frac{4^2-3\cdot4}{2}=2$$



$$\frac{5^2-3\cdot5}{2}=5$$

$$\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

Från varje hörn kan $n-3$ st diagonaler dras.

Dras $n-3$ st diagonaler från n hörn få dubbla diagonaler, därav $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

43 Bestäm samtliga rötter.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$

a) $x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2$

$t^2 - 5t - 36 = 0$

43.

$t = \frac{5}{2} \pm \left(\frac{25}{4} + \frac{144}{4}\right)^{1/2} = \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}$

$t_1 = -4 \ , \ t_2 = 9$

$\underline{x_{1,2} = \pm 2i \quad , \quad x_{3,4} = \pm 3}$

b) Prövning ger rötterna $\underline{x_1 = 2 \text{ och } x_2 = -3}$

$(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 1 \\
\hline
x^2 + x - 6 & x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 \\
 & -\underline{\left(x^4 + x^3 - 6x^2\right)} \\
 & \qquad\qquad x^2 + x - 6 \\
 & \qquad\quad -\underline{\left(x^2 + x - 6\right)} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{x_{3,4} = \pm i}$

44 Ekvationen $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ har de komplexa rötterna $x = \pm i$.

Bestäm ekvationens övriga rötter.

44. $(x+i)(x-i) = x^2+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 5 \\
\hline
x^2+1 & x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 \\
- & x^4 + x^2 \\
\hline
 & -4x^3 + 5x^2 - 4x + 5 \\
- & -4x^3 - 4x \\
\hline
 & 5x^2 + 5 \\
- & 5x^2 + 5 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$\underline{x = 2 \pm i}$

45 För vilka reella värden på a saknar ekvationen $z^2 - az = 0{,}6a$ reella rötter? Motivera.

45.
$$z = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{a^2}{4} + \frac{2{,}4a}{4}\right)^{1/2} = \frac{a}{2} \pm \frac{(a^2+2{,}4a)^{1/2}}{2}$$

Ekvationen saknar reella rötter då

$$a^2 + 2{,}4a < 0$$

$$a(a+2{,}4) < 0 \Rightarrow$$

$$\underline{-2{,}4 < a < 0}$$

---

46 Skriv talet $\sqrt{i}$ på formen $a + bi$.

46.
$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow \sqrt{i} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{1/2} = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

---

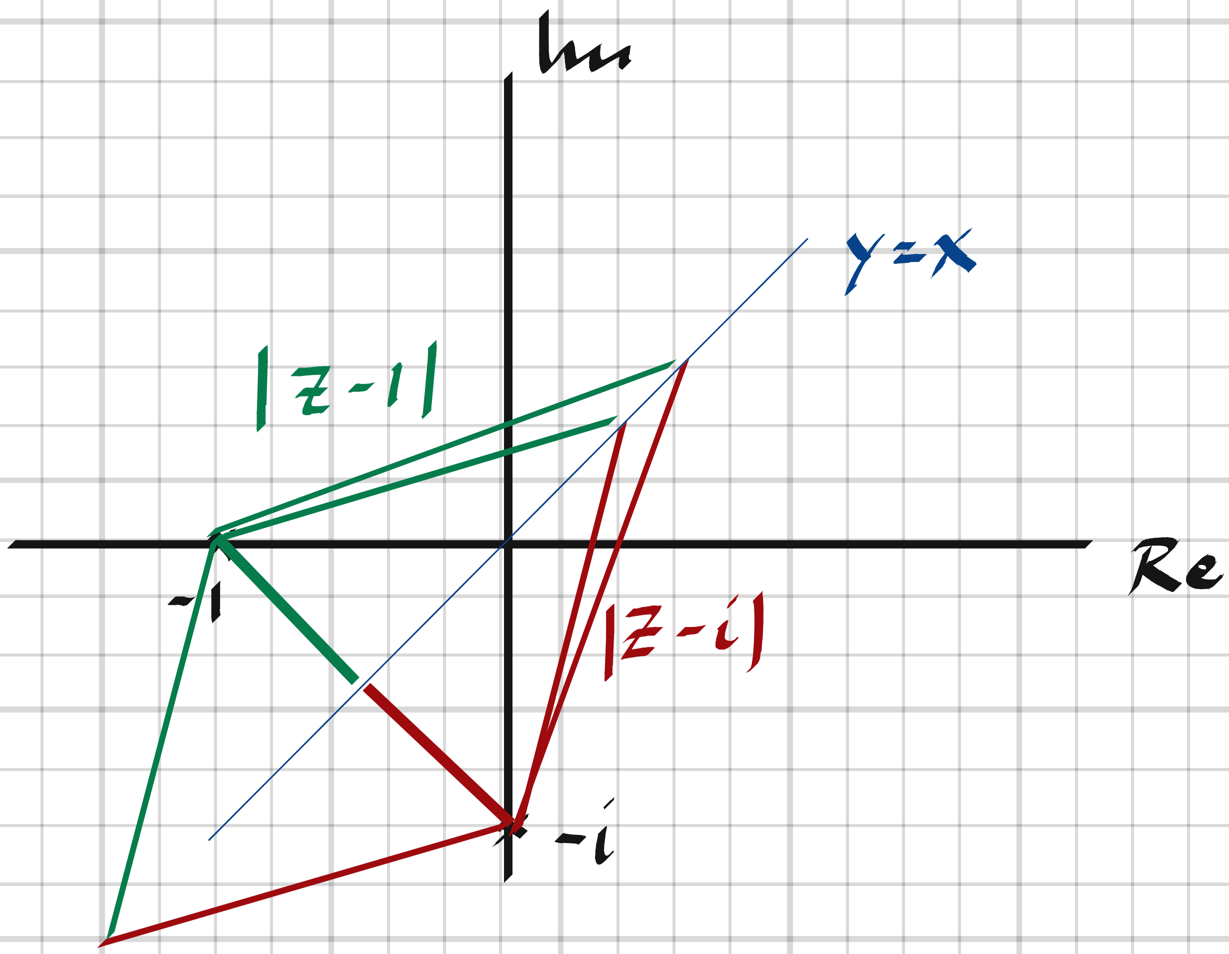
47 Talet $e^{i\pi - \ln 2}$ kan skrivas mycket enklare. Hur?

47. $$e^{i\pi - \ln 2} = \frac{e^{i\pi}}{e^{\ln 2}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

---

48 Rita i det komplexa talplanet de punkter som definieras av ekvationen $|z-1| = |z-i|$.

48.



Gäller för alla punkter längs linjen $y=x$

---

49 Polynomet $ax^3 + bx^2 + x + 3$ har faktorerna $x + 3$ och $x + 1$. Bestäm talen a och b och lös sedan ekvationen $ax^3 + bx^2 + x + 3 = 0$.

49. $(x+3)(x+1) = x^2+4x+3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & ax + b - 4a \\
\hline
x^2+4x+3 & ax^3 + bx^2 + x + 3 \\
 & -\ \left(ax^3 + 4ax^2 + 3ax\right) \\
\hline
 & (b-4a)x^2 + (1-3a)x + 3 \\
 & -\ \left((b-4a)x^2 + (b-4a)\cdot 4x + 3b - 12a\right) \\
\hline
 & (13a-4b+1)x + 12a - 3b + 3
\end{array}
$$

$ax + b - 4a = 0 \Rightarrow x = 4 - \frac{b}{a}$

$$-\frac{3}{4}\cdot \begin{cases} 13a - 4b + 1 = 0 \\ 12a - 3b + 3 = 0 \end{cases} \quad +$$

$$-\frac{39a}{4} + 12a - \frac{3}{4} + 3 = 0$$

$9a = -9 \Rightarrow \underline{a = -1}$

$4b = 1 - 13\cdot 1 \Rightarrow \underline{b = -3}$

$\underline{x_1 = 4 - 3 = 1}$

$\underline{x_2 = -3}$

$\underline{x_4 = -1}$

50 Bevisa formeln $\dfrac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = i\tan x$

50. $$VL = \frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = \frac{\cos 2x + i\sin 2x - 1}{\cos 2x + i\sin 2x + 1} =$$

$$= \frac{1-2\sin^2 x + i\sin 2x - 1}{2\cos^2 x - 1 + i\sin 2x + 1} = \frac{i\sin 2x - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x + i\sin 2x} =$$

$$= \frac{i\cdot 2\sin x\cdot\cos x - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x + i\cdot 2\sin x\cdot\cos x} = \frac{i\cdot\tan x - \tan^2 x}{1 + i\tan x} =$$

$$= \frac{(i\tan x - \tan^2 x)(1 - i\tan x)}{1+\tan^2 x} =$$

$$= \frac{i\cdot\tan x + \tan^2 x - \tan^2 x - i\cdot\tan^3 x}{1+\tan^2 x} =$$

$$= \frac{i\tan x(1+\tan^2 x)}{1+\tan^2 x} = i\cdot\tan x = HL.$$