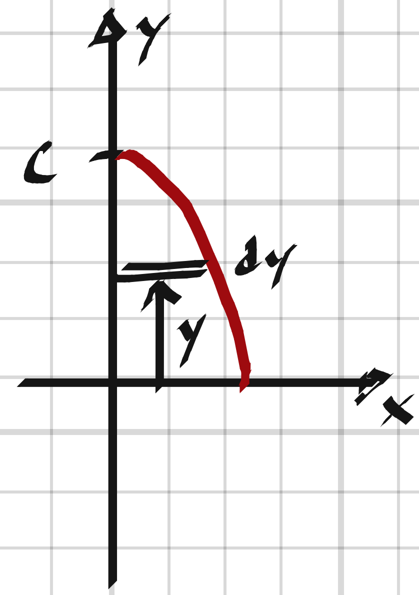
21 Ett område begränsas av x-axeln och kurvan $y = c - x^2$ där $c > 0$. Området roterar kring y-axeln. Skriv ett uttryck för rotationskroppens volym.



21.

$$y = c - x^2 \quad ; \quad x^2 = c - y$$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi (c-y) dy$$

$$V = \int_0^c dV = \int_0^c \pi (c-y) dy = \pi \left[cy - \frac{y^2}{2} \right]_0^c = \pi \left(c^2 - \frac{c^2}{2} \right) = \underline{\frac{\pi c^2}{2}}$$

---

22 Bestäm ett exakt värde till $\int_0^4 xe^x \, dx$

när du vet att $f(x) = xe^x$ har den primitiva funktionen $F(x) = xe^x - e^x$.

22.

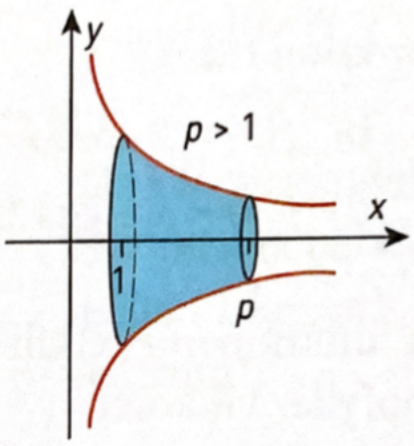
$$\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0) = 4e^4 - e^4 - (0-1) = \underline{3e^4 + 1}$$

---

23 Kurvan $y = 1/x$ roterar kring x-axeln enligt bilden.

a) Bestäm exakt värde på rotationskroppens volym då $p = 1{,}5$

b) Bestäm p så att rotationskroppens volym blir $0{,}5\pi$ ve.



23.

a) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2}$

$$dV = \pi y^2 dx = \frac{\pi}{x^2} dx$$

$$V = \int_1^p dV = -\pi \left[\frac{1}{x}\right]_1^p = \pi\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$p = 1.5 \Rightarrow V = \pi\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \underline{\frac{\pi}{3} \text{ v.e}}$$

b) $\pi\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{p = 2}$$

24 Funktionen $f(x) = a + e^{2x} \cdot \sin 3x$
har en maximipunkt i intervallet $0 < x < 1$.
Bestäm konstanten a så att maximipunkten ligger under x-axeln.

24. $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot 3\cos 3x = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sin 3x + 3\cos 3x = 0$

$\tan 3x = -\frac{3}{2}$

$3x = -0{,}983 + k \cdot \pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$x = -0{,}328 + k \cdot \frac{\pi}{3}$

$k = 1 \Rightarrow x = 0{,}720$

$f(0{,}720) = a + 3{,}51$

$f(0{,}720) < 0 \Rightarrow \underline{a < -3{,}51}$

25 Beräkna följande integraler.

a) $\int_0^{0,5\pi} \cos 3x\, dx$ b) $\int_0^{2} (\sin x \cos x + 1)\, dx$

25.

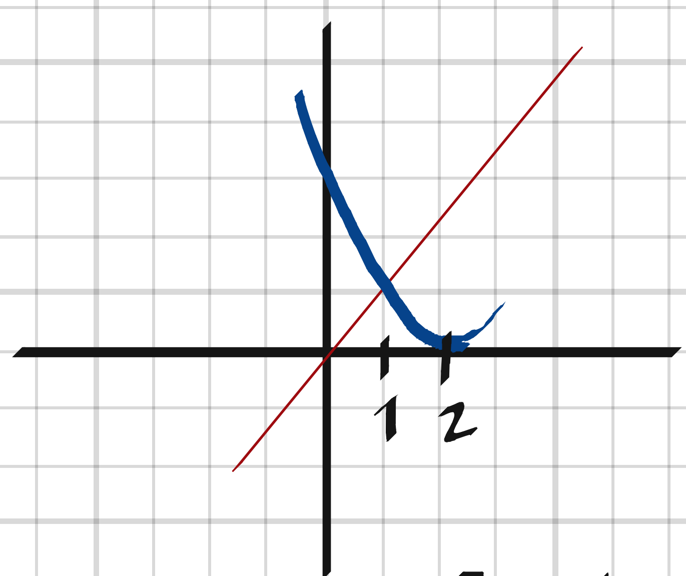
a) $$\int_0^{0,5\pi} \cos 3x\, dx = \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{0,5\pi} = \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

b) $$\int_0^{2} (\sin x \cos x + 1)\, dx = \int_0^{2} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + 1\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{4} + x\right]_0^{2} = -\frac{\cos 4}{4} + 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9 - \cos 4}{4}$$

---

26 Ett område begränsas av kurvan $y = x^2 - 4x + 4$, linjen $y = x$ och positiva x-axeln. Beräkna arean av området.



26. Skärningspunkt:

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \left(\frac{25}{4} - \frac{16}{4}\right)^{1/2} = \frac{5}{2} \overset{(+)}{-} \frac{3}{2} = 1$$

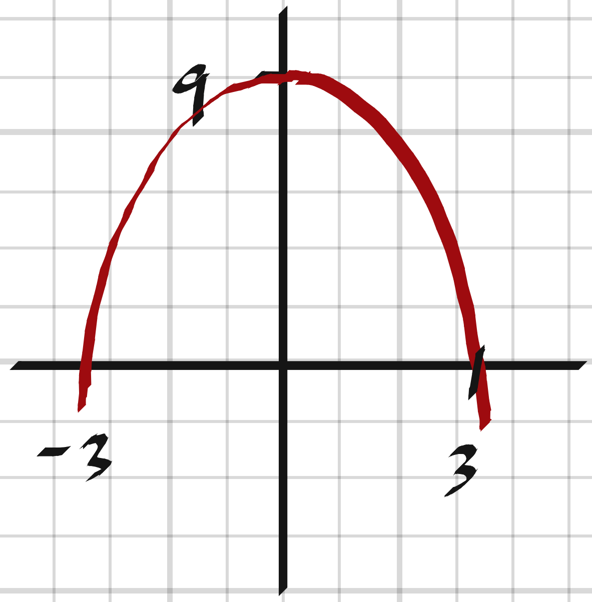
$$\frac{7}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$A = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 8 + 8 -$$

$$\frac{1}{3} + 2 - 4 = 0{,}833 \text{ a.e}$$

27 Kurvan $y = 9 - x^2$ och x-axeln begränsar ett område. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området roterar

a) kring x-axeln b) kring y-axeln.



27.

a) $dV = \pi y^2 dx$

$y^2 = 81 - 18x^2 + x^4$

$V = 2\int_0^3 dV = 2\pi\left[81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = 814$ v.e.

b) $dV = \pi x^2 dy$

$x^2 = 9 - y$

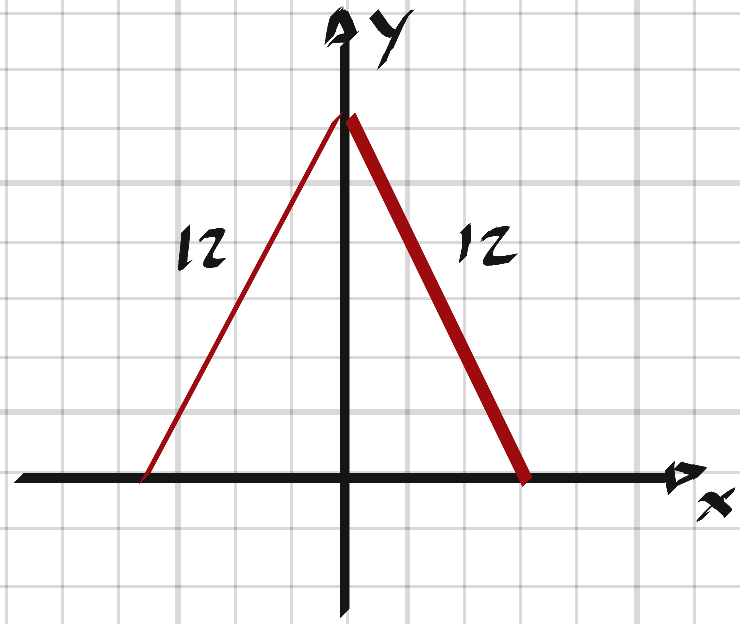
$V = \int_0^9 dV = \pi\left[9y - \frac{y^2}{2}\right]_0^9 = 127$ v.e.

---

28 Bestäm konstanten b så att $\int_1^b x^{-1}\,dx = 2$

28. $\ln b - \ln 1 = 2 \Rightarrow b = e^2$

29 I en triangel är två av sidorna 12 cm vardera. Triangeln får rotera kring den tredje sidan. Hur stor kan rotationskroppens volym högst vara? Svara i exakt form.



29.

$$x^2 + y^2 = 144$$

$$V = 2 \cdot \frac{\pi y^2 \cdot x}{3} = \frac{2\pi}{3}(144x - x^3)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\pi}{3}(144 - 3x^2)$$

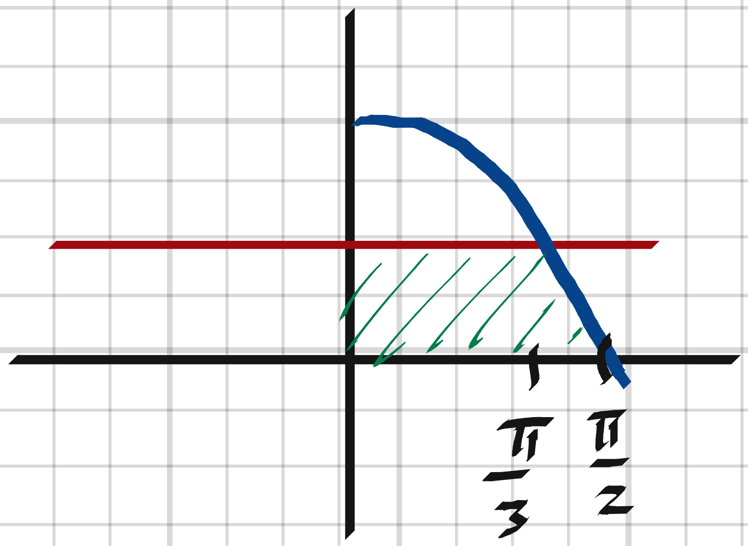
$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x = \overset{+}{(-)} \frac{12}{\sqrt{3}} \approx 6{,}93$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi x$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$V_{max} = V\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(144 \cdot \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{1728}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{6912\pi}{9\sqrt{3}} = \underline{256\pi \cdot \sqrt{3}}$$

30 Ett område begränsas av kurvan $y = 2\cos x$, linjen $y = 1$ samt de positiva koordinataxlarna. Beräkna ett exakt värde på områdets area.



30. Skärningspunkt:

$$2\cos x = 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \int_0^{\pi/3} dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\cos x\,dx = \frac{\pi}{3} + 2\left[\sin x\right]_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}\ \text{a.e}}$$

31 a) Derivera funktionen $y = x \cdot \ln x - x$

b) Använd resultatet i a-uppgiften och beräkna $\int_1^e \ln x \, dx$

31.

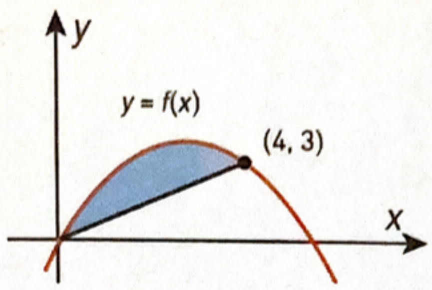
a) $y' = \ln x + 1 - 1 = \underline{\ln x}$

b) $\int_1^e \ln x \, dx = \left[x \cdot \ln x - x \right]_1^e = e - e - (0 - 1) \underline{= 1}$

---

32 Bestäm det blå områdets area då man vet att

$\int_0^4 f(x)\,dx = 9{,}5$



32.

$g(x) = \frac{3x}{4}$

$A = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^4 g(x)\,dx = 9{,}5 - 6 = 3{,}5$ a.e.

---

33 Bestäm ett exakt värde på konstanten a så att

$$\int_1^e \frac{2+ax}{x^2}\,dx = e^{-1}$$

33,

$$\int_1^e (2x^{-2}+ax^{-1})\,dx = e^{-1}$$

$$\left[-2x^{-1}+a\cdot\ln x\right]_1^e = e^{-1}$$

$$-2e^{-1}+a-(-2+0) = e^{-1}$$

$$\underline{a = 3e^{-1}-2}$$

34 Funktionen $g(x) = 2x^3 - 4x$ har en primitiv funktion $G(x)$ vars minsta värde är 1. Bestäm $G(4)$.

34.

$$G(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + C$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2-2) = 0 \; ; \; x_1 = 0, \; x_2 = \sqrt{2}, \; x_3 = -\sqrt{2}$$

$$g'(x) = 6x^2 - 4$$

$g'(0) < 0 \Rightarrow$ maximum

$g'(\sqrt{2}) = g'(-\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$ minimum

$$G(\sqrt{2}) = G(-\sqrt{2}) = 2 - 4 + C = 1 \Rightarrow C = 3$$

$$G(4) = \frac{4^4}{2} - 2 \cdot 4^2 + 3 = \underline{99}$$

35 Bestäm $k > 0$ så att integralen $\int_0^k (k - x^3)\,dx$ får ett så stort värde som möjligt.

35.

$$f(k) = \int_0^k (k - x^3)\,dx = k^2 - \frac{k^4}{4} = k^2\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)$$

$$f'(k) = 2k - k^3 = k(2 - k^2)$$

$$f''(k) = 2 - 3k^2$$

$$f'(k) = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\quad k_2 = -\sqrt{2},\quad k_3 = \sqrt{2}$$

$$f''(0) > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$f''(\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$k > 0 \Rightarrow \underline{k = \sqrt{2}}$$

36 Kurvan $y = ax - x^2$ innesluter tillsammans med den positiva x -axeln ett område. Bestäm konstanten a då områdets area är 288 ae.

36.

$ax - x^2 = 0 \; ; \; x(a-x) = 0$

$x_1 = 0 \, , \; x_2 = a$

$$\int_0^a (ax - x^2)\,dx = 288$$

$$\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = 288$$

3-2

$$a^3 = 288 \cdot 6$$

$$\underline{a = 12}$$

37 Ett område som begränsas av x-axeln och grafen till $y = x(x - a)$ roterar kring x-axeln. Bestäm $a > 0$ så att rotationskroppens volym blir 10π ve. Svara både exakt och med tre värdesiffror.

37.

$$y^2 = x^4 - 2ax^3 + a^2x^2$$

$$dV = \pi y^2 dx$$

$$V = \int_0^a dV = \pi \int_0^a (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2)\,dx = 10\pi$$

$$\pi\left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^5}{2} + \frac{a^5}{3}\right) = 10\pi$$

$$(6 - 15 + 10)a^5 = 300$$

$$a^5 = 300$$

$$a = 300^{1/5} = 3{,}13$$

38 Bestäm $a > 1$ så att uttrycket

$a^2 + \int_1^a (4x - 3x^2)\,dx$ blir så stort som möjligt.

38.

$$f(a) = a^2 + \left[2x^2 - x^3\right]_1^a = a^2 + 2a^2 - a^3 - 2 + 1 = -a^3 + 3a^2 - 1$$

$$f'(a) = -3a^2 + 6a = 3a(2-a)$$

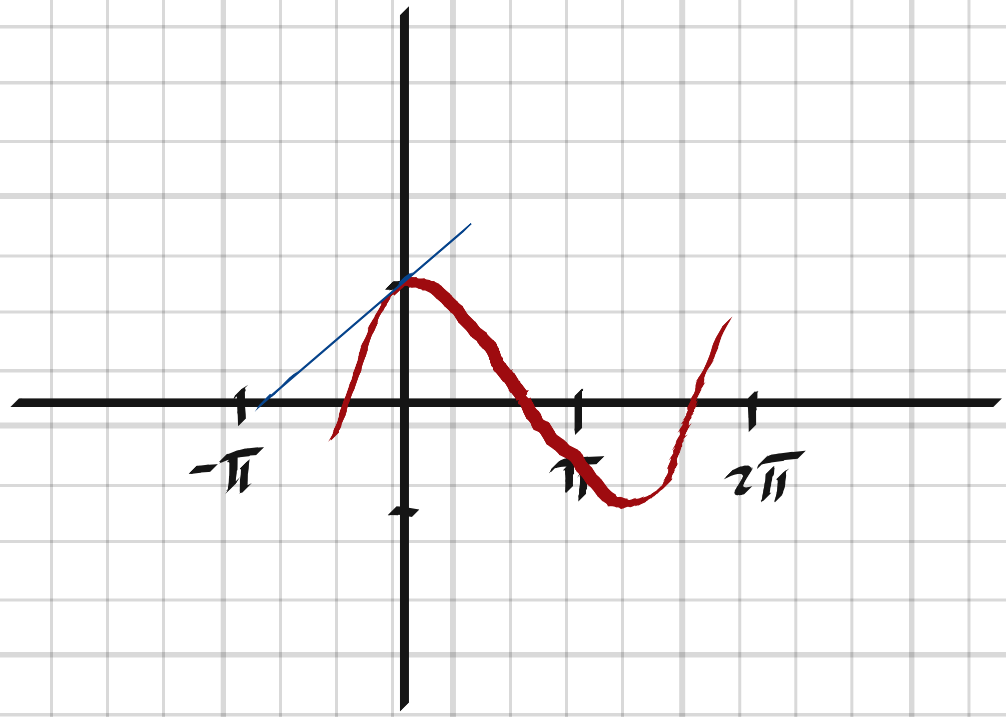
$$f''(a) = -6a + 6 = 6(1-a)$$

$$f'(a) = 0 \Rightarrow (a_1 = 0),\ a_2 = 2$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$\underline{a = 2}$$

39 Kurvan $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ har en tangent där kurvan skär y-axeln. Tangenten begränsar tillsammans med koordinataxlarna en triangel. Kurvan delar denna triangel i två delar. Bestäm förhållandet mellan den större och den mindre delens area.

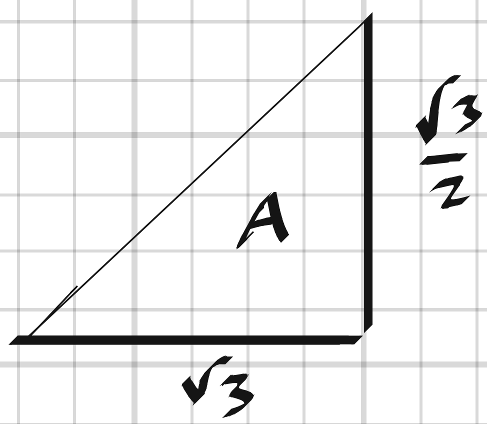


$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

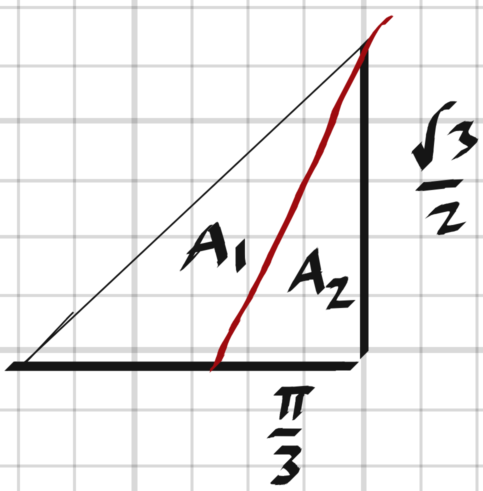
$y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$y(0) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y'(0) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3}{4}$



Tangentens ekv:

$f - f(0) = k(x - 0)$

$f(0) = y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$k = y'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$f = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$A_2 = \int_{-\pi/3}^{0} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx = -\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\pi/3}^{0}$

$= -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$

$A_1 = A - A_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\varphi = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1/2}{1/4} = 2$

40 Vilket är det minsta värde som funktionen $g(x)$ kan anta? Svara med tre värdesiffror.

$$g(x) = \int_1^x (t^3 - 4)\,dt \qquad x > 1$$

40.

$$g(x) = \left[\frac{t^4}{4} - 4t\right]_1^x = \frac{x^4}{4} - 4x - \frac{1}{4} + 4$$

$$g'(x) = x^3 - 4$$

$$g''(x) = 3x^2 > 0 \text{ för alla } x \Rightarrow \text{minimum}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 4^{1/3} = 1{,}5874$$

$$g_{min} = g(4^{1/3}) = \underline{-1{,}01}$$

41 För vilket positivt tal a gäller att

$$\int_2^a (2t-1)\,dt = \int_1^e \frac{18}{t}\,dt$$

41.

$$\left[t^2-t\right]_2^a = \left[18\cdot\ln t\right]_1^e$$

$$a^2-a-4+2=18$$

$$a^2-a-20=0$$

$$(a-5)(a+4)=0$$

$$a>0 \Rightarrow \underline{a=5}$$

42 Klockan 06.00 avläser Eva att en cistern innehåller 425 liter syra. Hon beslutar sig för att fylla på mer syra. Vätskeflödet y (liter/h) varierar då enligt $y = 15\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{12}\right)$ där x är antal timmar efter klockan 06.00. Om mängden syra blir mer än 500 liter slås ett varningslarm till. Vid vilken tidpunkt slås larmet till?

42.

$$V = \int_0^x 15\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)dx = 500 - 425$$

$$-\frac{15 \cdot 12}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{12}\right]_0^x = 75$$

$$\left(1 - \cos\frac{\pi x}{12}\right) = \frac{75\pi}{15 \cdot 12}$$

$$\cos\frac{\pi x}{12} = 1 - 1{,}309 = -0{,}309$$

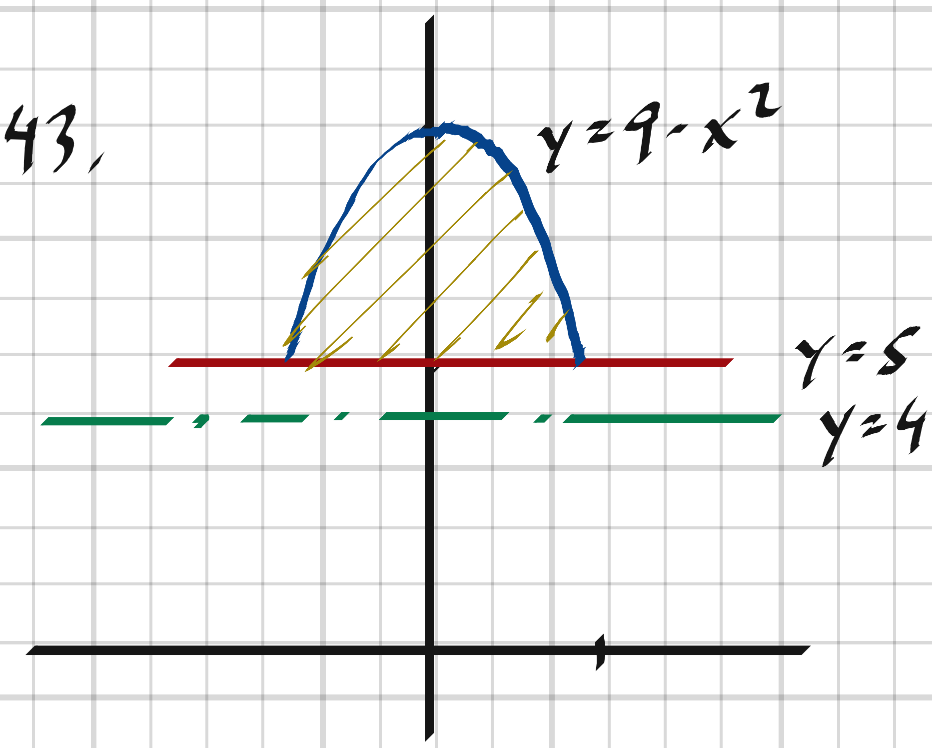
$$\frac{\pi x}{12} = \pm\arccos(-0{,}309) + k \cdot 2\pi$$

$$x = \pm 7{,}20 + k \cdot 24 \quad h$$

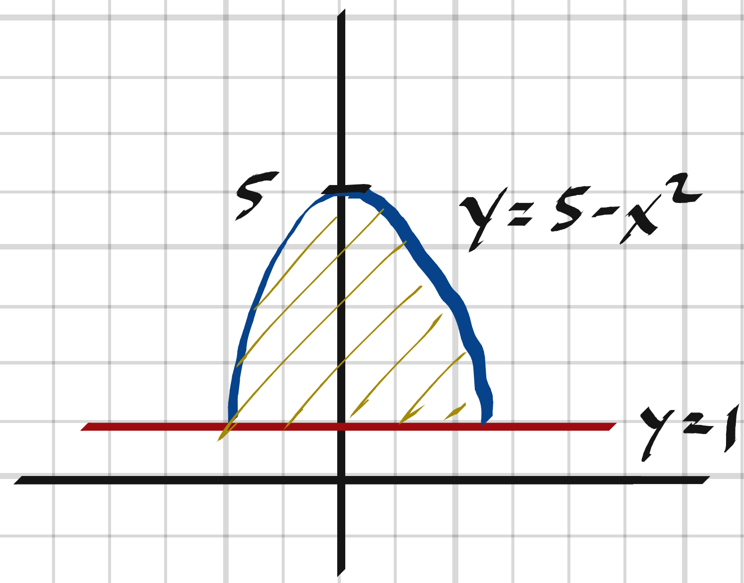
$k = 0 \Rightarrow 06{,}00 + 7\,h + 0{,}2 \cdot 60 \text{ min} = \underline{13:12}$

43 Grafen till $y = 9 - x^2$ innesluter tillsammans med linjen $y = 5$ ett område. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då området roterar kring linjen $y = 4$.

43.



$\equiv$



Skärningspunkter:

$5 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 2$

$5 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$dV = \pi y^2 dx = \pi (5 - x^2)^2 dx$

$V_1 = 2 \cdot \int_0^2 dV = 186.82$ v.e.

$V_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot (2+2) = 4\pi$ v.e

$V_3 = 2 \cdot \int_2^{\sqrt{5}} dV = 0.51$ v.e

$V = V_1 - V_2 - V_3 = 186.82 - 4\pi - 0.51 =$

$= 174$ v.e