20 Funktionen y är definierad för $x > 0$. Ange funktionens eventuella extrempunkter.

a) $y = x^2 - 2\ln x$ b) $y = 2\sqrt{x} - 6x$

20. a) $y' = 2x - \frac{2}{x}$

$y' = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \pm 1$

$y(1) = 1 - 0 = 1$ $\Rightarrow$ Extrempunkt i $(1,1)$

$y(2) =$ odefinierad

b) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 6$

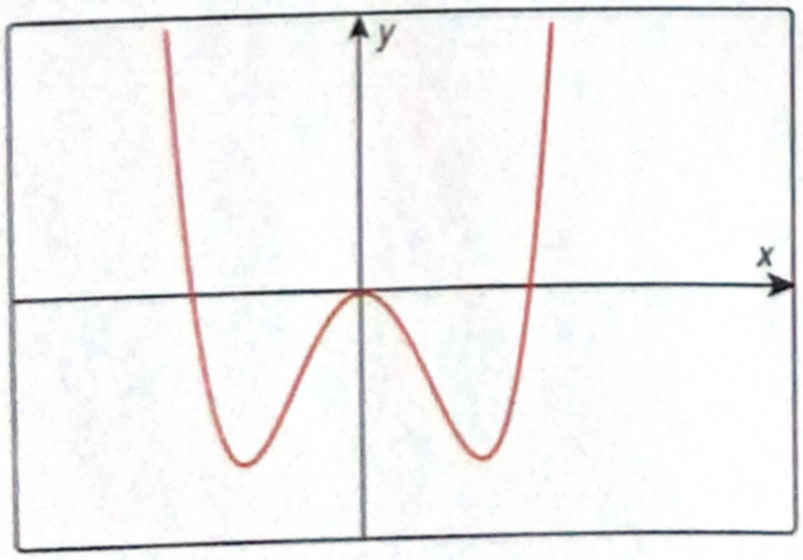
$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{36}$

$y(\frac{1}{36}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ Extrempunkt i $(\frac{1}{36}, \frac{1}{6})$

21 Vilken av funktionerna A–B har den graf som bilden visar.

A: $f(x) = x^4 + 4x^2$ B: $f(x) = x^4 - 4x^2$

C: $f(x) = 4x^2 - x^4$ D: $f(x) = -4x^2 - x^4$



$\underline{B:}$ $x^2(x^2-4) = 0 \Rightarrow$

$x = 0, \quad x = \pm 2$

---

22 Bestäm $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ då

$f(x) = x^2\,(x^2 + x)$

22. $f(x) = x^4 + x^3$

$f(x+h) = (x+h)^3(x+h+1) =$

$(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)(x+h+1) =$

$\cancel{x^4} + \cancel{x^3h} + \cancel{x^3} + \cancel{3x^3h} + \cancel{3x^2h^2} + \cancel{3x^2h} + \cancel{3x^2h^2} + \cancel{3xh^3} + 3xh^2 +$

$+ \cancel{h^3x} + h^4 + h^3 \Rightarrow$

$f(x+h) - f(x) = h\,(4x^3 + 3x^2 + 6x^2h + 4xh^2 + 3xh + h^2 + h^3)$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underline{4x^3 + 3x^2}$

---

23 Funktionen $y = 3x - x^2 + \ln x$ har en tangent då $x = 1$. Bestäm tangentens ekvation.

23.

$$y' = 3 - 2x + \frac{1}{x}$$

$$y'(1) = 3 - 2 + 1 = 2$$

$$y(1) = 3 - 1 + 0 = 2$$

Tangentens ekvation:

$$f - f(1) = k(x - 1)$$

$$k = y'(1) = 2$$

$$f(1) = y(1) = 2$$

$$\Rightarrow$$

$$f - 2 = 2(x - 1)$$

$$\underline{f = 2x}$$

---

24 Ange eventuella maximi,- minimi- och terrasspunkter till

a) $y = x^4 - 2x^2$ b) $y = x \cdot e^x$

24. a) $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$

$y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2-1)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm 1$

$y''(0) < 0 \Rightarrow$ maximum

$y''(-1) > 0 \Rightarrow$ minimum

$y''(1) > 0 \Rightarrow$ minimum

$y(0) = 0$ Maxpunkt i $(0,0)$

$y(-1) = 1 - 2 = -1$ Minpunkter i $(-1,-1)$ och $(1,-1)$

$y(1) = 1 - 2 = -1$

b) $y' = e^x(1+x)$

$y'' = e^x(2+x)$ $y(-1) = -\frac{1}{e}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1$ Minpunkt i $(-1, -\frac{1}{e})$

$y''(-1) > 0 \Rightarrow$ minimum

25 Bestäm $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ då $y = 2\sin x - \cos 5x$

25. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 2\cos x + 5\sin 5x$$

---

26 Grafen till funktionen $g(x) = 2\sin x + 3\cos x$ har en tangent där grafen skär y-axeln. Bestäm tangentens ekvation.

26.

$$g'(x) = 2\cos x - 3\sin x$$

$$g'(0) = 2$$

$$g(0) = 3$$

Tangentens ekvation:

$$f - f(0) = k(x - 0)$$

$$f(0) = g(0) = 3$$

$$k = g'(0) = 2 \quad \Rightarrow$$

$$f - 3 = 2(x - 0)$$

$$f = 2x + 3$$

---

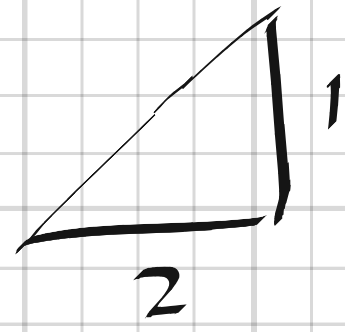
27 Lös ekvationen $y' = 0$ och svara med två värdesiffror.

a) $y = x^6 - 9x$ b) $y = 2\sin x + 4\cos x$

27. a) $y' = 6x^5 - 9$

$y' = 0 \Rightarrow 6x^5 - 9 = 0$

$\underline{x = \left(\frac{9}{6}\right)^{1/5} = 1{,}1}$



b) $y' = 2\cos x - 4\sin x$

$y' = 0 \Rightarrow 2\cos x = 4\sin x$

$\tan x = \frac{1}{2}$

$x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$\underline{x = 0.46 + k \cdot \pi}$

28 Lös ekvationen $f'(x) = f(\pi)$ då $f(x) = 0{,}1 + 0{,}5\cos x$.

28.

$$f'(x) = -0.5\sin x$$

$$f(\pi) = 0.1 - 0.5 = -0.4$$

$$-0.5\sin x = -0.4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin(0.8) + k \cdot 2\pi \\ x_2 = \pi - \arcsin(0.8) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.93 + k \cdot 2\pi \\ x_2 = 2.2 + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

29 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x \cdot \ln x$ i den punkt vars x-koordinat är 1.

29.

$$y' = \ln x + 1$$

$$y'(1) = 1$$

$$y(1) = 0$$

Tangentens ekvation:

$$f - f(1) = k(x - 1)$$

$$f(1) = y(1) = 0$$

$$k = y'(1) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$f - 0 = 1(x - 1)$$

$$\underline{f = x - 1}$$

30 Utgå från funktionen $f(x) = e^{-ax(x+1)}$

a) Visa hur du bestämmer $f'(0,5)$ då $a = 2$.

b) För vilket värde på a blir $f'(1) = 0$? Motivera.

30.

$$f(x) = e^{-ax(x+1)} = e^{-a(x^2+x)}$$

a) $a = 2 \Rightarrow$ $f(x) = e^{-2(x^2+x)}$

$$f'(x) = (-4x-2)e^{-2(x^2+x)}$$

$$f'(0.5) = -4e^{-1,5}$$

b)

$$f'(x) = (-2ax-a)e^{-a(x^2+x)}$$

$$f'(1) = -3ae^{-2a}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow -3ae^{-2a} = 0$$

$$e^{-2a} \neq 0 \Rightarrow a = 0$$

31 Bestäm $y'(0)$ då $y = \sin(x - \sin x)$.

31. $y' = (1 - \cos x) \cdot \sin(x - \sin x)$

$y'(0) = (1 - 1) \cdot \sin(0 - \sin 0) = 0$

---

32 Bestäm $g'(1)$ då

a) $g(x) = \sqrt{4x + x^2}$ b) $g(x) = \dfrac{2}{3x+1}$

32. a) $g(x) = (4x + x^2)^{1/2}$

$g'(x) = \frac{1}{2}(4x + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 + 2x) = \dfrac{4 + 2x}{2\sqrt{4x + x^2}}$

$g'(1) = \dfrac{4 + 2}{2\sqrt{4 + 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{3x+1} = 2(3x+1)^{-1}$

$g'(x) = -2(3x+1)^{-2} \cdot 3 = -\dfrac{6}{(3x+1)^2}$

$g'(1) = -\dfrac{6}{(3+1)^2} = -\dfrac{3}{8}$

---

33 Funktionen $g(x) = A + B \sin Cx$ har perioden 6π. Funktionens största värde är 17 och det minsta värdet är 9. Bestäm $g''(0{,}5\pi)$.

33.

$$C = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{17+9}{2} = 13 \quad \Rightarrow$$

$$B = 17 - 13 = 4$$

$$g(x) = 13 + 4\sin\frac{x}{3}$$

$$g'(x) = \frac{4}{3}\cos\frac{x}{3}$$

$$g''(x) = -\frac{4}{9}\sin\frac{x}{3}$$

$$g''(0.5\pi) = -\frac{4}{9}\cdot\sin\frac{0.5\pi}{3} = -\frac{4}{9}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{4}{9}\cdot 0.5 = \underline{\underline{-\frac{2}{9}}}$$

34 Bestäm det största värde som funktionen $y = C(e^{-px} - e^{-2px})$ kan anta för $x > 0$.

34. $$y' = -pCe^{-px} + 2pCe^{-2px} = pCe^{-px}(2e^{-px} - 1)$$

$$y' = 0,\ p \neq 0,\ C \neq 0 \Rightarrow 2e^{-px} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{p}$$

$$y\left(-\frac{\ln\frac{1}{2}}{p}\right) = C\left(e^{\ln\frac{1}{2}} - e^{2\ln\frac{1}{2}}\right) = C\left(e^{\ln\frac{1}{2}} - e^{\ln\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{C}{4}}$$

35 Kurvan $g(x) = x^2$ skär kurvan $y = ax^3 + bx$ i punkten (1, 1). Bestäm konstanterna a och b så att kurvorna skär varandra under rät vinkel.

35. Tangenten till $g(x) = x^2$ har $k = 2$ i $(1,1)$

Tangenten till $y = ax^3 + bx$ ska då ha $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$

$y' = 3ax^2 + b$

$y'(1) = 3a + b$

$y'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3a + b = -\frac{1}{2}$; $b = -3a - \frac{1}{2}$

$y(1) = a + b$

$y(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$

$a - 3a - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \underline{a = -\frac{3}{4}, \quad b = \frac{7}{4}}$

36 Funktionen $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ är definerad för $x \geq 0$. Bestäm funktionens värdemängd.

36.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2} =$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0 \;;\; x = (\pm)\sqrt{2}$$

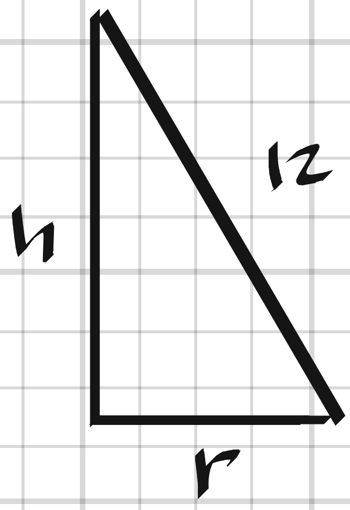
$$f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

37 Sidan *s* i en rak cirkulär kon är 12 cm.
För vilken radie får konen maximal volym?
Svara med två värdesiffror.

Formeln för konens volym $V = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

där r = radie och h = höjd.



37.

$$r^2 = 144 - h^2$$

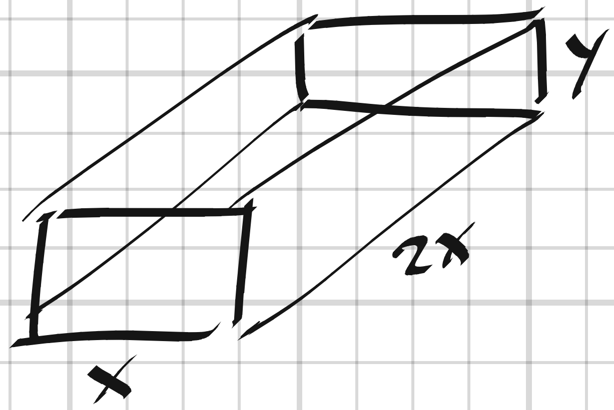
$$V(h) = \frac{\pi}{3}(144h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(144 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \quad h = (\pm)\sqrt{48}$$

$$r = \sqrt{144 - h^2} = \sqrt{144 - 48} = \sqrt{96} \approx 9{,}8 \text{ cm}$$

38 En låda (rätblock) med volymen 10 m^3 ska tillverkas av aluminiumplåt. Lådans bredd är dubbelt så stor som dess längd. Bestäm lådans längd, bredd och höjd så att materialåtgången blir så liten som möjligt. Lådan saknar lock.



38.

1,96
3,9
1,3

$$x \cdot 2x \cdot y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{x^2}$$

$$M(x) = 2x \cdot x + 2xy + 2 \cdot 2xy = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + \frac{30}{x}$$

$$M'(x) = 4x - \frac{30}{x^2}$$

$$M''(x) = 4 + \frac{30}{x^3}$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{30}{x^2} = 0 \; ; \; x^3 = \frac{30}{4} \; ; \; x = \left(\frac{30}{4}\right)^{1/3} = 1{,}96$$

$$2x = 2 \cdot 1{,}96 = 3{,}9 \; ; \; y = \frac{5}{1{,}96^2} = 1{,}3$$

Lådans sidor är 1,96, 3,9 och 1,3 m

39 Bestäm konstanten k så att funktionen $f(x) = 4 - 4x - kx^2$ får ett lokalt maximum i punkten $(2, 0)$. Motivera ditt svar.

39. $f'(x) = -4 - 2kx$

$f''(x) = -2k$

maximum $\Rightarrow$ $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ $k > 0$

$f'(2) = 0$ $\Rightarrow$ $-4 - 4k = 0$ $\Rightarrow$ $k = -1$ $\Rightarrow$ Går ej!

40 Två funktioner f och g ges av följande samband:

$f(x) = 2\sin x + \sin x \cos x \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

$g(x) = 2(\cos x)^2 + 2\cos x - 1 \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

a) Ekvationen $g(x) = 0$ har två rötter. Bestäm dessa med räknaren.

b) Bestäm nu rötterna genom att lösa ekvationen med substitution. Visa hur du gör!

c) Visa att $f'(x) = g(x)$

40 a) $x = \pm 1{,}196$

b) $2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = t \Rightarrow 2t^2 + 2t - 1 = 0$

$2(t^2 + t - \frac{1}{2}) = 0$

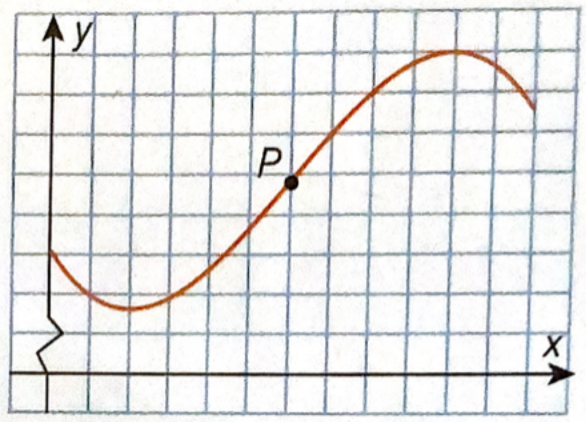
$t = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = -\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \pm 1{,}196$

c) $f(x) = 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$f'(x) = 2\cos x + \cos 2x = 2\cos x + 2\cos^2 x - 1$

41 Ett företags intäkter i miljoner kr kan beskrivas med sambandet
$I(x) = 35 - 15x + 9x^2 - x^3$
där x är antal år efter start.
I punkten P börjar intäktsökningen att minska. Bestäm punkten P:s koordinater.



41. $I'(x) = -15 + 18x - 3x^2$

$I''(x) = 18 - 6x$

Inflexionspunkt $\Rightarrow$ $I''(x_p) = 0$, $I''(x > x_p)$ och $I''(x < x_p)$ olika tecken

$I''(x) = 0 \Rightarrow x_p = 3$

$\left.\begin{array}{l} I''(x<3) > 0 \\ I''(x>3) < 0 \end{array}\right\}$ ok!

$I(3) = 35 - 45 + 81 - 27 = 44$

P:s koordinater = (3, 44)

42 Bestäm $f'(1)$ då $f(x)=\dfrac{x^2\cdot 3^x}{\ln(2x+1)}$

Svara med två värdesiffror.

42. $$f'(x)=\frac{2x\cdot\ln(2x+1)-x^2\cdot 2\cdot\frac{1}{2x+1}}{(\ln(2x+1))^2}\cdot 3^x+\frac{x^2}{\ln(2x+1)}\cdot 3^x\cdot\ln 3$$

$$f'(1)=\frac{2\cdot\ln 3-\frac{2}{3}}{(\ln 3)^2}\cdot 3+3=\frac{6\ln 3-2}{(\ln 3)^2}+3\ \underline{=6.8}$$

---

43 En funktion $h(x)=f(g(x))$ är given där $g(x)=2x^3$. Skriv ett uttryck för $h'(x)$ då du vet att $f'(x)=k(x)$.

43. $$h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

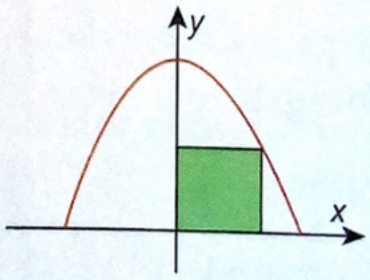
$$f'(x)=k(x)\implies f'(g(x))=k(g(x))=k(2x^3)$$

$$g'(x)=6x^2$$

$$\underline{h'(x)=k(2x^3)\cdot 6x^2}$$

---

44 Figuren visar en graf och en kvadrat vars ena hörn finns på grafen. Grafen skär y-axeln i punkten (0 ; 1,5). Redovisa hur du löser uppgifterna a) och b).



a) Bestäm kvadratens area genom att välja en andragradsfunktion vars graf liknar den ritade grafen.

b) Välj nu en trigonometrisk funktion vars graf liknar bildens graf. Hur stor blir kvadratens area?

44 a) $f(x) = -x^2 + 1.5$

kvadrat $\Rightarrow f(x) = x \Rightarrow -x^2 + 1.5 = x$

$$x^2 + x - 1.5 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

$$A = x^2 = \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{4} = \underline{0.677 \text{ a.e.}}$$

b) $f(x) = 1.5 \cos x$

$f(x) = x \Rightarrow x = 1.5 \cos x$

Löst i Geogebra med solve(x=1.5cosx)

$x = 0.915$, $A = x^2 = \underline{0.837 \text{ a.e.}}$