23 Visa, utan att rita, att funktionen $y = 1 - 2(\sin x - \cos x)^2$ har perioden 180°.

23.

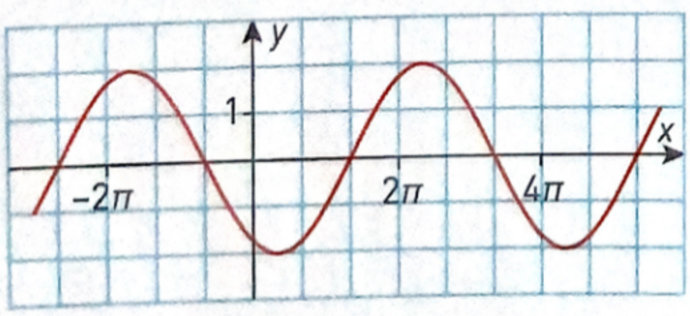
$$y = 1 - 2(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x) =$$

$$= 1 - 2(1 - \sin 2x) = 2\sin 2x - 1 =$$

$$= 2\sin kx - 1 \quad \text{där } k = 2.$$

$$T = \frac{360^\circ}{k} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

24 Bestäm ekvationen för grafen i bilden.



24.

$$y = A \cdot \sin k(x + \varphi)$$

$$A = 2, \quad k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = -\frac{4\pi}{3}$$

$$y = 2\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$$

25 Funktionen $g(x) = 3 + 4\sin(x + \pi)$ gäller för $0 < x < 0{,}5\pi$.

a) Beräkna $g(1)$

b) Lös ekvationen $g(x) = 1$

25. a) $g(1) = 3 + 4\sin(1+\pi) = \underline{-0.366}$

b) $3 + 4\sin(x+\pi) = 1$

$$\sin(x+\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 + \pi = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_2 + \pi = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$0 < x < 0.5\pi \Rightarrow \underline{x = \frac{\pi}{6}}$

26 Lös ekvationen $h(x) = 2$ då $h(x) = 4\cos 3x$. Svara i radianer på exakt form.

26.

$$4\cos 3x = 2$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$3x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

---

27 Lös ekvationen $f(x) = g(x)$ då $f(x) = \sin x$ och $g(x) = \cos x$. Svara i radianer på exakt form.

27.

$$\sin x = \cos x \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

28 Lös ekvationen $5\sin^2 x - 9\sin x - 2 = 0$ då $0° < x < 360°$.

28. $t = \sin x \Rightarrow 5t^2 - 9t - 2 = 0$

$5\left(t^2 - \frac{9}{5}t - \frac{2}{5}\right) = 0$;

$t = \sin x = \frac{9}{10} \pm \left(\frac{81+40}{100}\right)^{1/2} = \frac{9}{10} (\pm) \frac{11}{10} = -\frac{1}{5}$

$\sin x = -\frac{1}{5}$

$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) + k \cdot 360° \approx -11.5° + k \cdot 360°$

$x_2 = 180° - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) + k \cdot 360° \approx 192° + k \cdot 360°$

$0° < x < 360° \Rightarrow$ $\underline{x = 192° \text{ eller } x = 348.5°}$

29 a) Bestäm de x för vilka $h(x) = 6$ då $h(x) = 5 + 2\sin(3x + 60°)$ och $0° < x < 180°$.

b) För vilka x-värden i intervallet $0° < x < 180°$ gäller att $h(x) > 6$?

29. a) $5 + 2\sin(3x + 60°) = 6$

$\sin(3x + 60°) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3x_1 + 60° = 30° + k \cdot 360° \\ 3x_2 + 60° = 150° + k \cdot 360° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x_1 = -10° + k \cdot 120° \\ x_2 = 30° + k \cdot 120° \end{cases}$$

$0 < x < 180° \Rightarrow$ $\underline{x = 30°, 110° \text{ eller } 150°}$

b) $\underline{0 < x < 30°, \quad 110° < x < 150°}$

---

30 Lös ekvationen $2\sin x + 4\sin x = 3$. Svara exakt och i radianer.

$6\sin x = 3$; $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

31 Temperaturen y °C varierade under ett dygn enligt $y = 10 + 20 \sin 0{,}2618t$
där t = antal timmar efter klockan 07.00.

a) Vilken var den högsta temperaturen?

b) Bestäm den lägsta temperaturen.

Bestäm temperaturen klockan

c) 07.00 d) 13.00 e) 22.00

f) Lös ekvationen $10 + 20 \sin 0{,}2618t = 30$ för $0 < t < 24$

g) Vid vilka tider under dygnet var temperaturen noll grader?

h) Bestäm perioden.

i) Hur lång tid under dygnet var det minusgrader?

31. a) $10 + 20 \cdot 1 = \underline{30°C}$

b) $10 - 20 \cdot 1 = \underline{-10°C}$

c) $t = 0 \Rightarrow \underline{y = 10°C}$

d) $t = 6 \Rightarrow y = 10 + 20\sin(0.2618 \cdot 6) = \underline{30°}$

e) $t = 15 \Rightarrow y = 10 + 20 \cdot \sin(0.2618 \cdot 15) = \underline{-4.1°}$

f) $\sin(0.2618t) = 1 \Rightarrow 0.2618t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$t = 6 + k \cdot 24, \quad 0 < t < 24 \Rightarrow \underline{t = 6}$

g) $\sin(0.2618t) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0.2618t_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ 0.2618t_2 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 + k \cdot 24 \\ t_2 = 14 + k \cdot 24 \end{cases} \Rightarrow$$

<u>Kl. 21 och Kl. 05</u>

h) <u>24h</u>

i) <u>8h</u>

32 Ludde och Lina har löst samma ekvation, men kommit fram till olika svar:

Luddes svar:

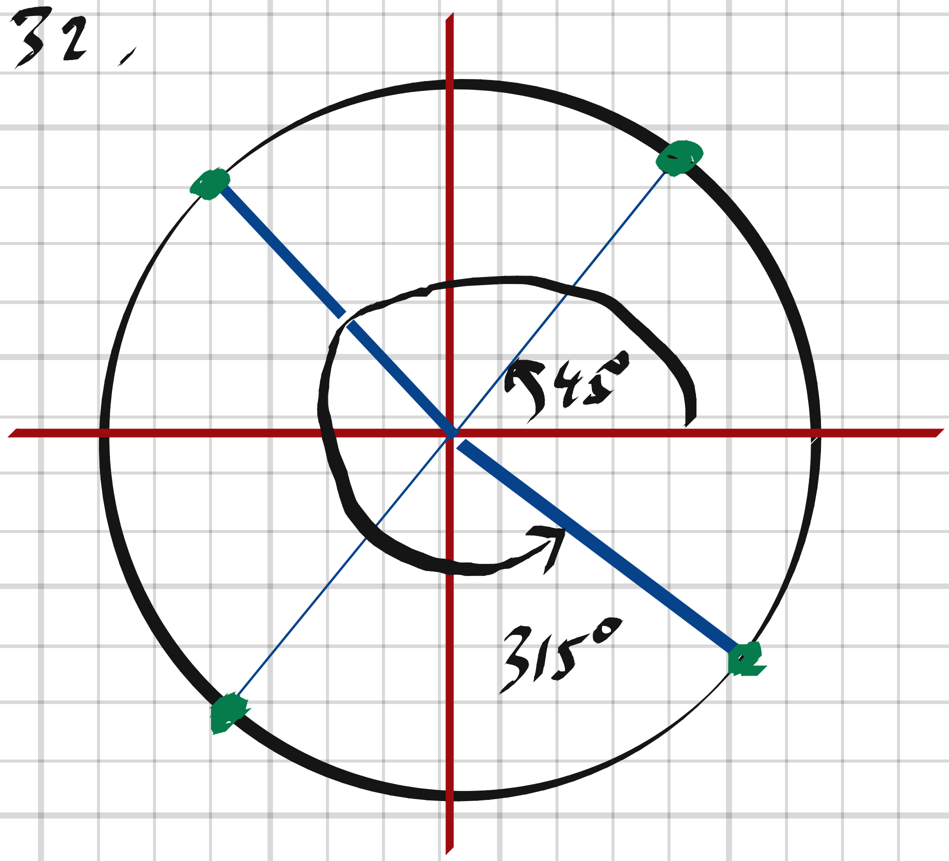
$x = 45° + n \cdot 180°$ eller $x = 315° + n \cdot 180°$

Linas svar:

$x = 45° + n \cdot 90°$

Visa med en enhetscirkel att båda svaren betyder "samma sak", dvs att svaren innehåller samma vinklar.

32.

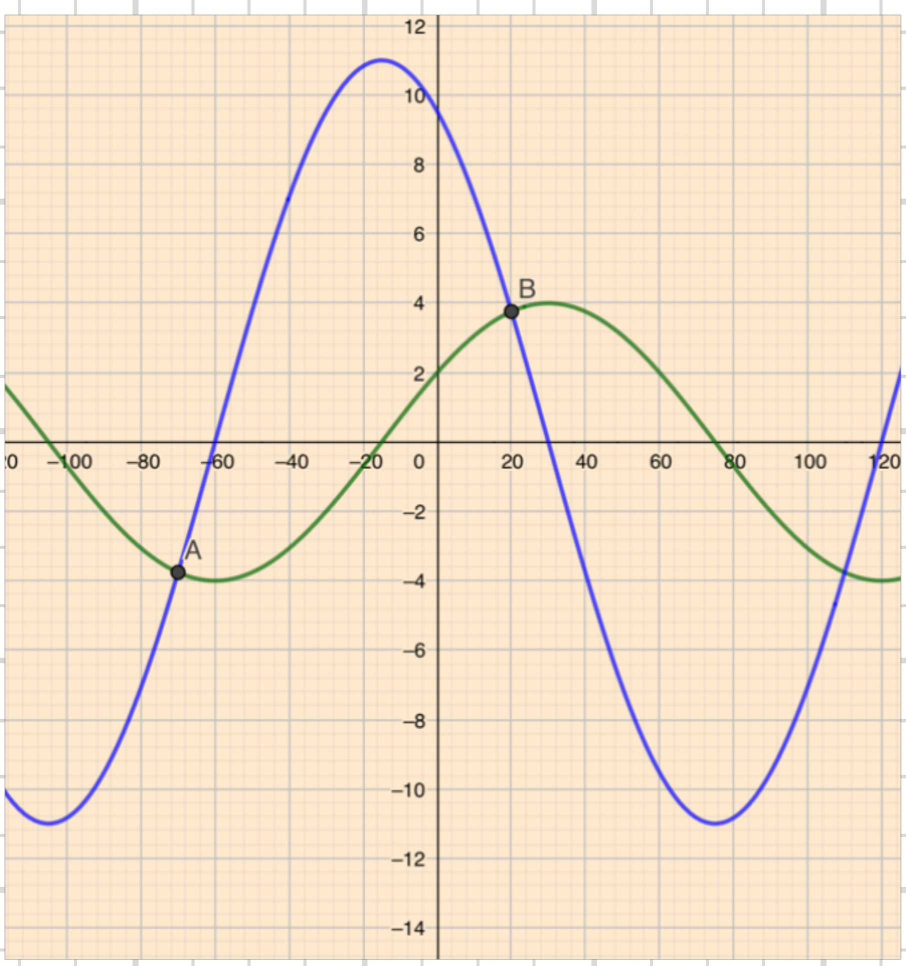


33 Lös grafiskt ekvationen

$4 \sin(2x + 30°) = 11 \cos(2x + 30°)$

i intervallet $-90° < x < 90°$.

33.



$x_A = -70°$

$x_B = 20°$

34 Lös ekvationen $5\sin^2 x - 9\sin x - 2 = 0$ för $0° < x < 360°$.

34.

$$t = \sin x \implies 5t^2 - 9t - 2 = 0$$

$$5\left(t^2 - \frac{9}{5}t - \frac{2}{5}\right) = 0 \ ;$$

$$t = \sin x = \frac{9}{10} \pm \left(\frac{81+40}{100}\right)^{1/2} = \frac{9}{10} \overset{(+)}{-} \frac{11}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\sin x = -\frac{1}{5}$$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) + k \cdot 360° \approx -11.5° + k \cdot 360°$$
$$x_2 = 180° - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) + k \cdot 360° \approx 192° + k \cdot 360°$$

$$0° < x < 360° \implies \underline{x = 192° \text{ eller } x = 348.5°}$$

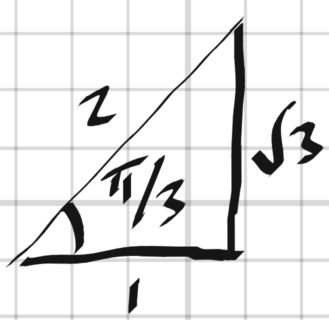
---

35 Beräkna det exakta värdet av $\tan \dfrac{100\pi}{3}$

35.

$$\tan x = \tan(x + k \cdot \pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan\left(\frac{100\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{100\pi}{3} - 33\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\sqrt{3}}$$



---

36 Lös ekvationerna.

a) $\sin^2 x = 0{,}75$ b) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$

36. a) $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= -60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_3 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_4 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned}\right\} \quad \underline{x = \pm 60 + k \cdot 180^\circ}$$

b) $2 \sin x \cos x = 1$

$\sin 2x = 1$

$2x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\underline{x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ}$

37 Visa att $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

37. $VL = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x =$

$= 1 - \sin 2x = HL.$

---

38 Visa att $1 - \sin 2x \cdot \tan x = \cos 2x$

38. $VL = 1 - \sin 2x \cdot \tan x = 1 - 2\sin x \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} =$

$= 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x = HL.$

---

39 Vinkeln v är spetsig och $\tan v = 2\sqrt{2}$.
Beräkna det exakta värdet av $\cos v$.

39. $\dfrac{\sin v}{\cos v} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = 8$

$\dfrac{\sin^2 v}{\cos^2 v} + \dfrac{\cos^2 v}{\cos^2 v} = 9$

$\dfrac{1}{\cos^2 v} = 9 \Rightarrow \cos v = (\pm)\dfrac{1}{3} = \underline{\dfrac{1}{3}}$

40 Vilka av följande samband är korrekta?

a) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

b) $\cos x \cdot \tan x = \sin x$ R

c) $\sin 2x = 2\sin x$

d) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ R

e) $\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{180° - x}{2}$ R

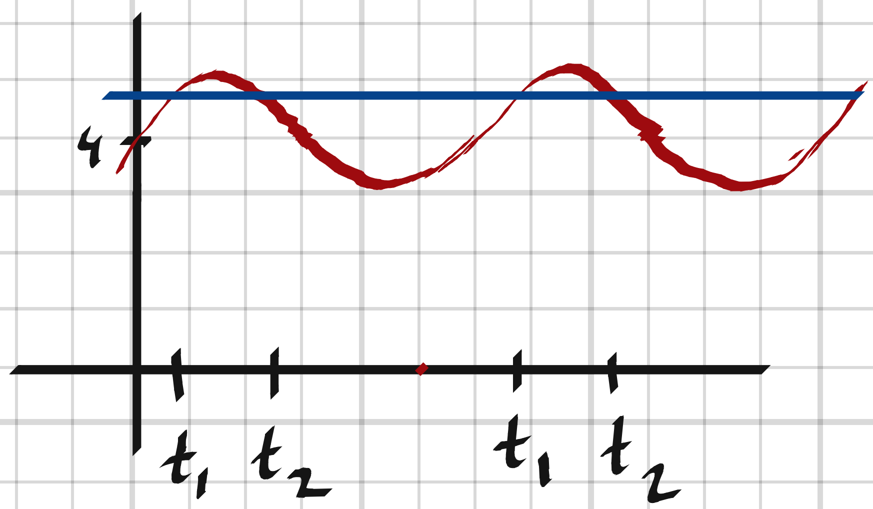
f) $\cos 3x = \cos x + \cos 2x$

---

41 Vattendjupet h (meter) i en hamnbassäng varierar enligt $h = 4 + 1{,}5\sin 0{,}5236t$ där t är tiden i timmar efter klockan 06.00.

Vilka tider på dygnet är vattendjupet i bassängen mer än 4,8 m?

$$T = \frac{2\pi}{0{,}5236} = 12\ h$$



41. $4 + 1{,}5\sin 0{,}5236t > 4{,}8$

$\sin 0.5236t > 0.5333$

$0.5236t_1 > 0.5625 + k \cdot 2\pi$

$0.5236t_1 < 2.5791 + k \cdot 2\pi$

$k=0$: $t_1 > 1.0743 = 1\ h\ 4\ min$

$t_2 < 4.9257 = 4\ h\ 56$

$7.04 < t < 10.56$

$k=1$: $t_1 > 13.0743 = 13\ h\ 4\ min$

$t_2 < 16.9257 = 16\ h\ 56\ min$

$19.04 < t < 22.56$

42 Dagens längd i Anchorage, Alaska, kan bestämmas med följande modell:
$f(t) = 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167t - 1{,}303) + 12{,}2$
där $f(t)$ är dagens längd mätt i timmar och t är tiden i dygn efter 1 januari.
Använd modellen för att bestämma när den längsta dagen inträffar på året.

42. $f'(t) = 0.1104 \cos(0.0167t - 1.303)$

$f'(t) = 0 \Rightarrow \quad 0.0167t - 1.303 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$t = 172 + k \cdot 188$

Den längsta dagen inträffar 172 dgr efter 1 jan.

43 Lös ekvationen $\frac{\sin x \cos x}{2} = \frac{1}{4}$

Svara exakt och i radianer.

43.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$2\sin x \cos x = 1$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi}$$

---

44 Använd grafräknare och rita kurvorna $y = \sin x + \cos x$ samt $y = \sqrt{2}\sin(x + 45°)$.

a) Formulera en slutsats.

b) Visa att din slutsats stämmer.

44.

a) $$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x + \arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$a=1, b=1 \Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+45°)$$

b)

$$HL = \sqrt{2}\sin(x+45°) = \sqrt{2}\cdot\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin x + \cos x = VL$$

---

45 Lös ekvationen $\cos^2 3x = \sin^2 3x$
$0° < x < 90°$.

45.

$$\cos^2 3x - \sin^2 3x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\cos 6x = 0$$

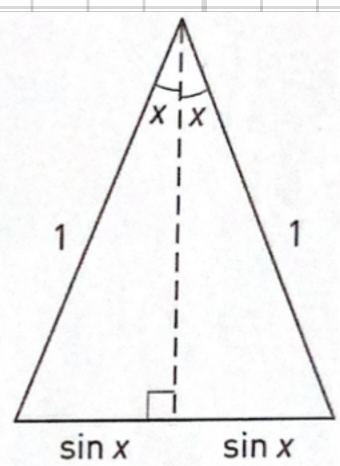
$$6x = 90° + k \cdot 180°$$

$$x = 15° + k \cdot 30°$$

$$0° < x < 90° \Rightarrow \underline{x_1 = 15°,\ x_2 = 45°,\ x_3 = 75°}$$

---

46 Vilken formel för $\cos 2x$ får man genom att tillämpa cosinussatsen på bildens likbenta triangel?



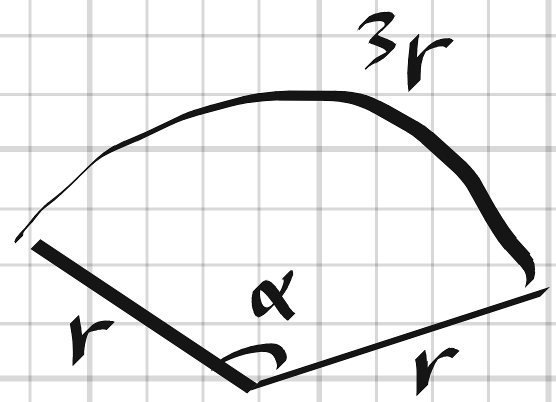
46.

$$(2\sin x)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 2x$$

$$\underline{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$$

---

47 I en cirkel med radie r finns en cirkelsektor vars omkrets är $5r$. Hur stor är cirkelsektorns medelpunktsvinkel? Svara i radianer.



47

$$b = v \cdot r$$

$$3r = \alpha \cdot r \Rightarrow \underline{\alpha = 3 \text{ rad}}$$

---

48 För funktionen $g(x) = A + B\cos 3x$ gäller att $g(\pi) = 2$ och $g(10\pi) = 1$.
Bestäm konstanterna A och B.

48.

$$g(\pi) = A - B = 2$$

$$g(10\pi) = A + B = 1$$

$$B = A - 2$$

$$A + A - 2 = 1 \Rightarrow \underline{A = \frac{3}{2}}$$

$$\underline{B = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}}$$

---

49 Bestäm ett närmevärde på konstanten p så att grafen till $f(x) = p + 4\sin 3x$ går genom punkten $(1, 3p)$. Svara med tre värdesiffror.

49.

$$f(1) = 3p \Rightarrow p + 4\sin 3 = 3p$$

$$\underline{p = 2\sin 3 = 0{,}282}$$

---

50 Lös ekvationen $\frac{2}{\sin x} - 2\sin x = 3$. Svara i grader.

50.

$$2 - 2\sin^2 x = 3\sin x$$

$$t = \sin x \Rightarrow 2 - 2t^2 = 3t$$

$$2(t^2 + \tfrac{3}{2}t - t) = 0$$

$$t = -\frac{3}{4} \pm \left(\frac{9}{16} + \frac{16}{16}\right)^{1/2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$t_1 = -2 \Rightarrow \sin x = -2 \text{ (falsk lösning)}$$

$$t_2 = 1/2 \Rightarrow \sin x = 1/2 \Rightarrow \underline{x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ}$$

---

51 Lös algebraiskt ekvationen $2\sin x = \tan x$. Ange svaret i radianer.

51.

$$2\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin 2x = \sin x$$

$$\underline{x_1 = k \cdot \pi}$$

$$2x_2 = \pi - x_2 + k \cdot 2\pi$$

$$\underline{x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}}$$

52 Visa att $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

52.

$VL = \cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$

$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x =$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x =$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x = HL.$

---

53 Lös ekvationen $(\sin x)^3 = 0{,}25 \sin x$
i intervallet $0° < x < 360°$.

53. $\sin x(\sin^2 x) = 0{,}25 \sin x$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180°$

$\sin^2 x = 0{,}25$

$\sin x = \pm 0{,}5$

$x = 30° + k \cdot 360° \qquad x = -30° + k \cdot 360°$

$x = 150° + k \cdot 360° \qquad x = -150 + k \cdot 360$

$0° < x < 360° \Rightarrow \underline{x_1 = 30°,\ x_2 = 150°,\ x_3 = 180°,\ x_4 = 210°,\ x_5 = 330°}$

54 Bestäm samtliga rötter till ekvationen

$$\frac{3}{\sin x} = 4\sin x$$ i intervallet $0 < x < 2\pi$.

Svara exakt.

54.

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$0 < x < 2\pi \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{2\pi}{3},\ x_3 = \frac{4\pi}{3},\ x_4 = \frac{5\pi}{3}$$