1. Ange ett komplext tal z på formen $z = a + bi$ så att

a) $\text{Im}\, z = 4$ $z = 3 + 4i$ (1/0/0)

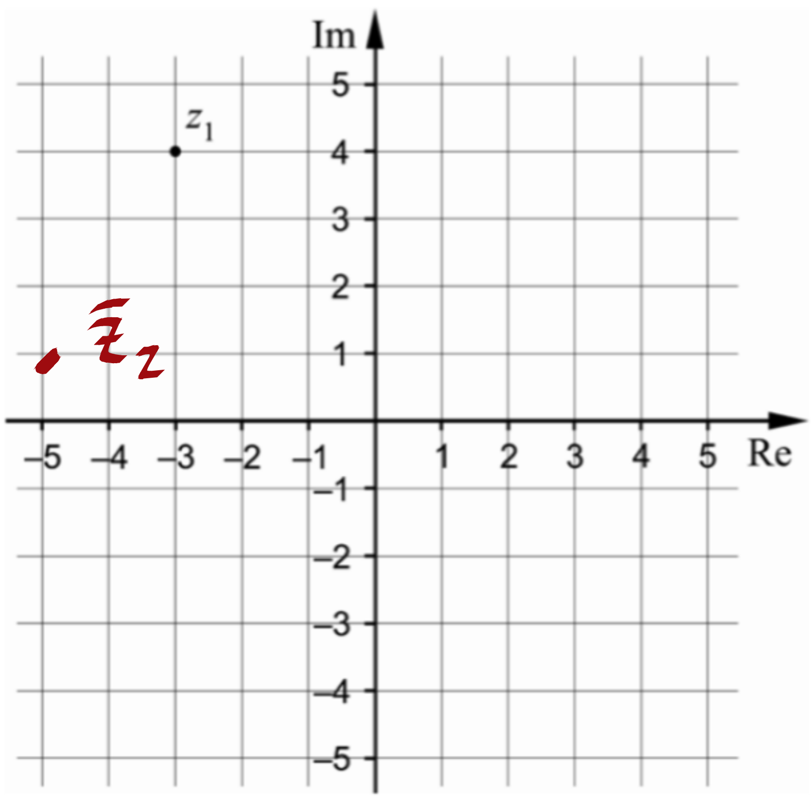
b) $\arg z = 45°$ $z = 2 + 2i$ (1/0/0)

2. Derivera

a) $f(x) = \cos 5x$ $-5\sin 5x$ (1/0/0)

b) $g(x) = x \cdot e^x$ $e^x(1 + x)$ (1/0/0)

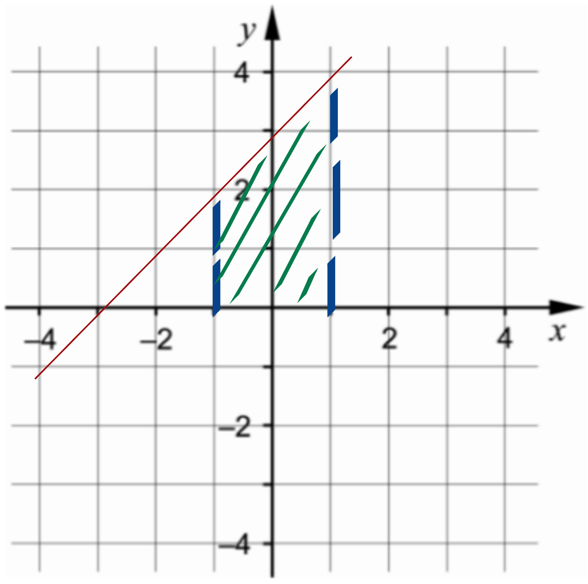
3. Figuren nedan visar ett komplext talplan där talet z_1 är markerat.



a) Beräkna $|z_1|$ $|z_1| = 5$ (1/0/0)

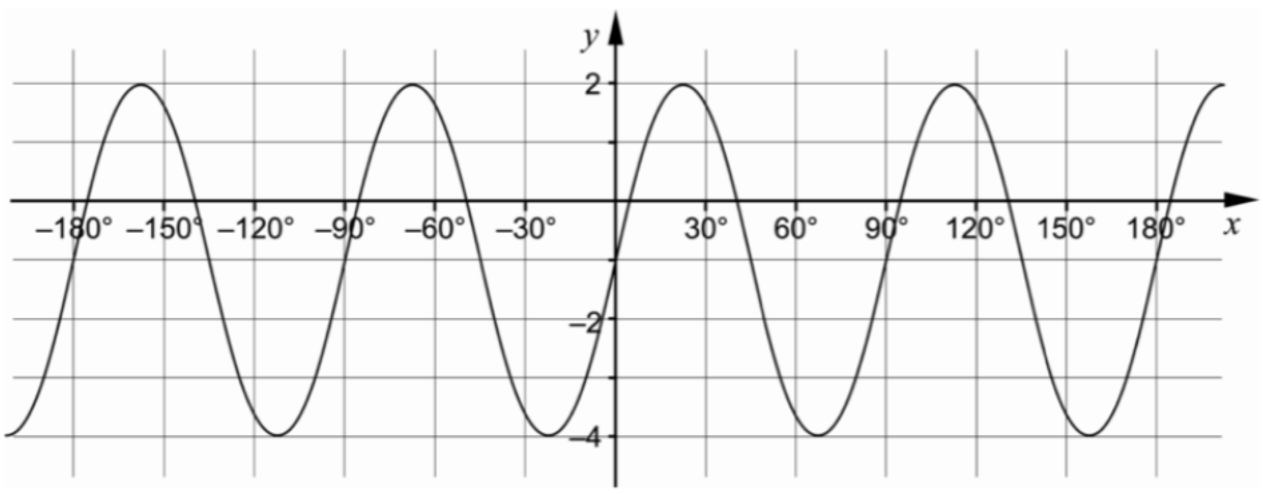
b) Markera talet $\bar{z}_2$ i det komplexa talplanet ovan då $z_2 = -5 - i$ (1/0/0)

4. a) Använd koordinatsystemet nedan och markera ett område vars area kan beräknas med $\int_{-1}^{1}(3+x)\,dx$ (1/0/0)



b) Bestäm värdet av $\int_{-1}^{1}(3+x)\,dx$ 6 (1/0/0)

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = A\sin kx + B$



Bestäm konstanterna A, B och k

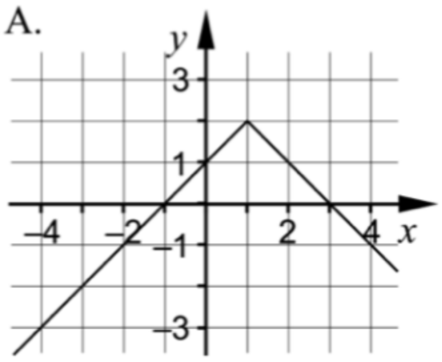
$A =$ 3

$B =$ -1

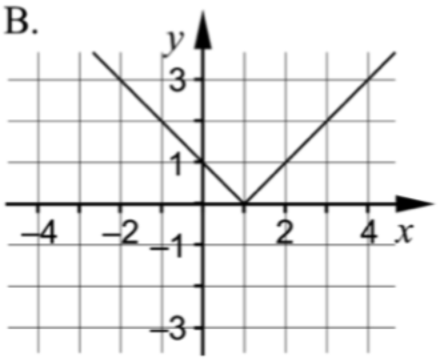
$k =$ 4 (1/1/0)

6. Ange vilken av följande figurer A-H som visar grafen till funktionen
$f(x) = 2 - |x - 1|$

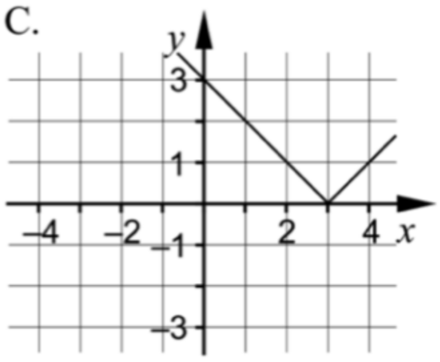
A.



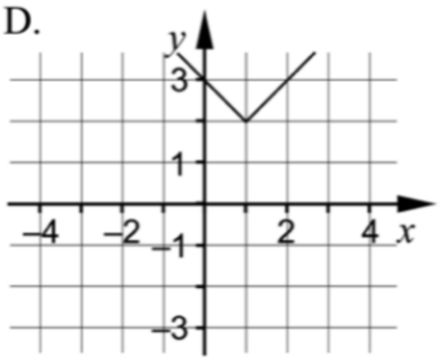
B.



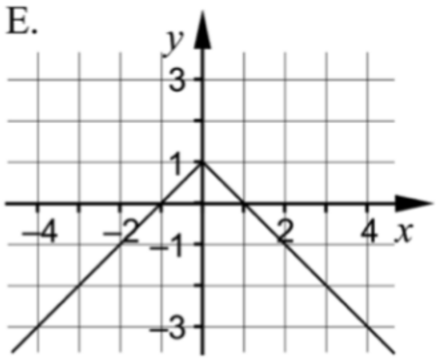
C.



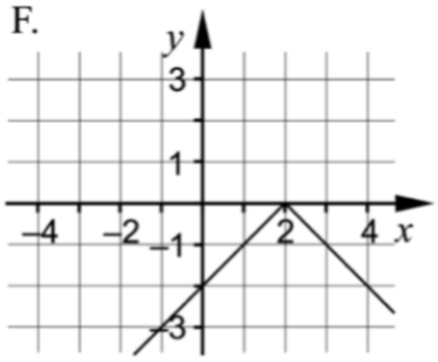
D.



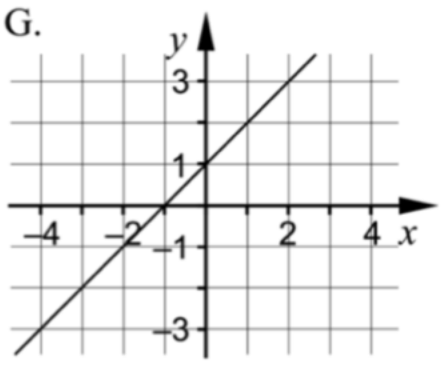
E.



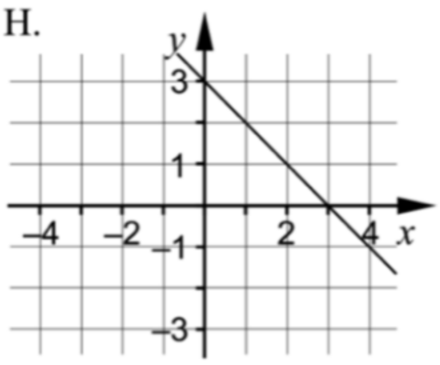
F.



G.

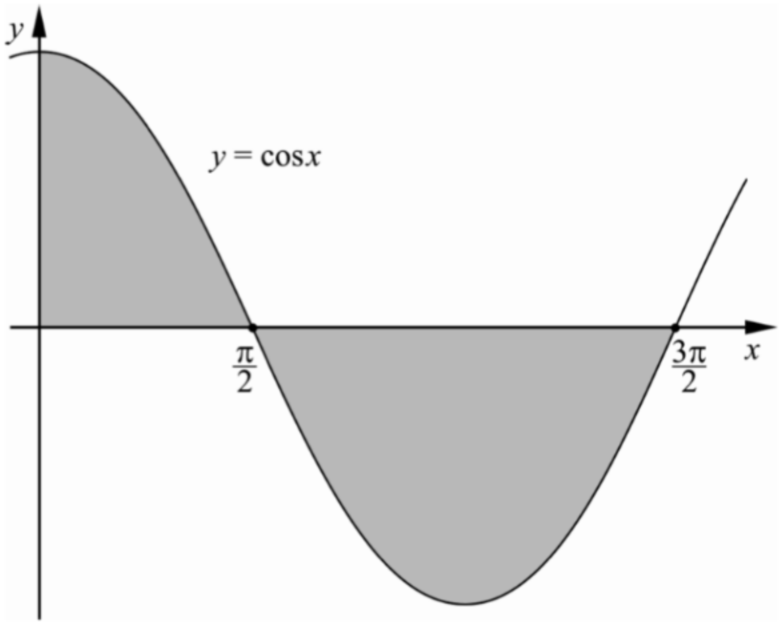


H.



A ____________ (0/1/0)

11. Beräkna den sammanlagda arean av de skuggade områdena i figuren nedan.



(2/0/0)

11.

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx =$$

$$\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} - \left[\sin x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 1 - 0 - (-1 - 1) = 1 + 2 = 3 \text{ a.e.}$$

12. Visa att $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \sin^2 51° + \cos^2 51°$ (2/0/0)

12. Trigonometriska ettan: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$VL = HL = 1$.

---

13. Bestäm det komplexa talet $z = a + bi$ så att $\bar{z} + 3z = iz + 9$ (1/1/0)

13. $a - bi + 3a + 3bi = ai - b + 9$

$$+4\cdot\begin{cases} 4a + b = 9 \\ -a + 2b = 0 \end{cases}$$

$9b = 9 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2b = 2$

$\underline{z = 2 + i}$

14. Ekvationen $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$ är given.

a) Visa att $x = 2$ är en rot till ekvationen. (1/0/0)

b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (0/2/0)

14.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 18$$

a) $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 18 = 8 + 8 + 2 - 18 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ rot

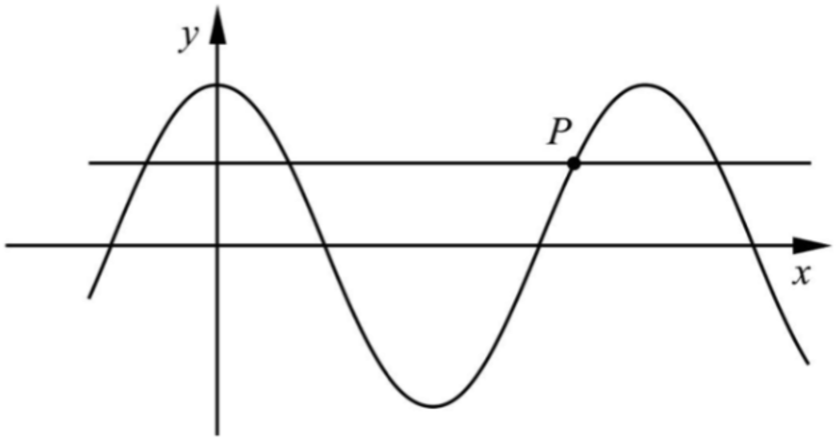
b)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 4x + 9 \\ \hline x - 2 & x^3 + 2x^2 + x - 18 \\ & -\;(x^3 - 2x^2) \\ \hline & 4x^2 + x - 18 \\ & -\;(4x^2 - 8x) \\ \hline & 9x - 18 \\ & 9x - 18 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 4x + 9 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 - 9} = -2 \pm i\sqrt{5}$$

$$\underline{x_2 = -2 - i\sqrt{5}, \quad x_3 = -2 + i\sqrt{5}}$$

15. Figuren nedan visar kurvan $y = \cos 2x$ och linjen $y = \frac{1}{2}$



Bestäm x-koordinaten för skärningspunkten P (1/2/0)

15.

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$\frac{3\pi}{4} < P < \pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \underline{\frac{5\pi}{6}}$$

16. Lös ekvationen $z^3 + 27i = 0$ (0/3/0)

16.

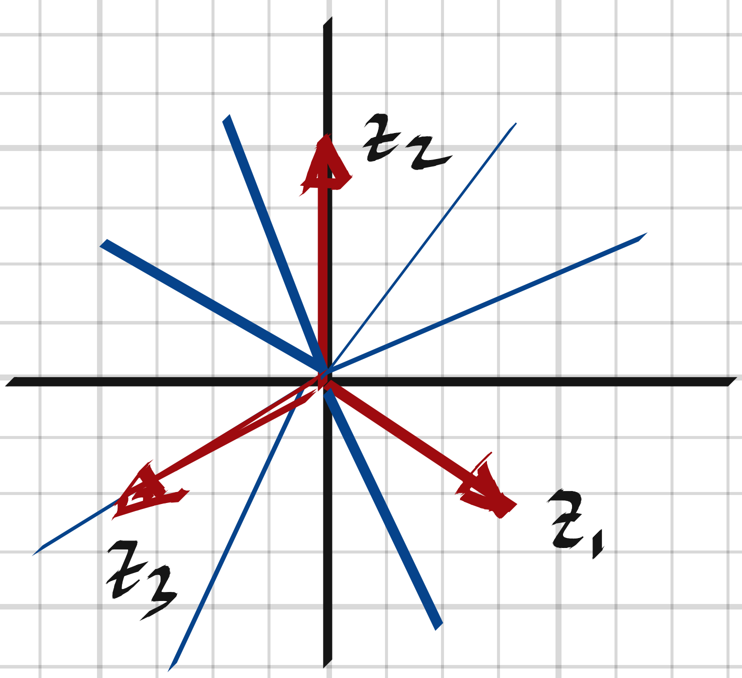
$$z^3 = -27i = 27e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi} \quad , k = 0, 1, 2$$

$$z = 27^{1/3} e^{-\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{4\pi}{6}}$$

$$k=0: \quad z_1 = 3e^{-\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$k=1: \quad z_2 = 3e^{\frac{3\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$k=2: \quad z_3 = 3e^{\frac{7\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

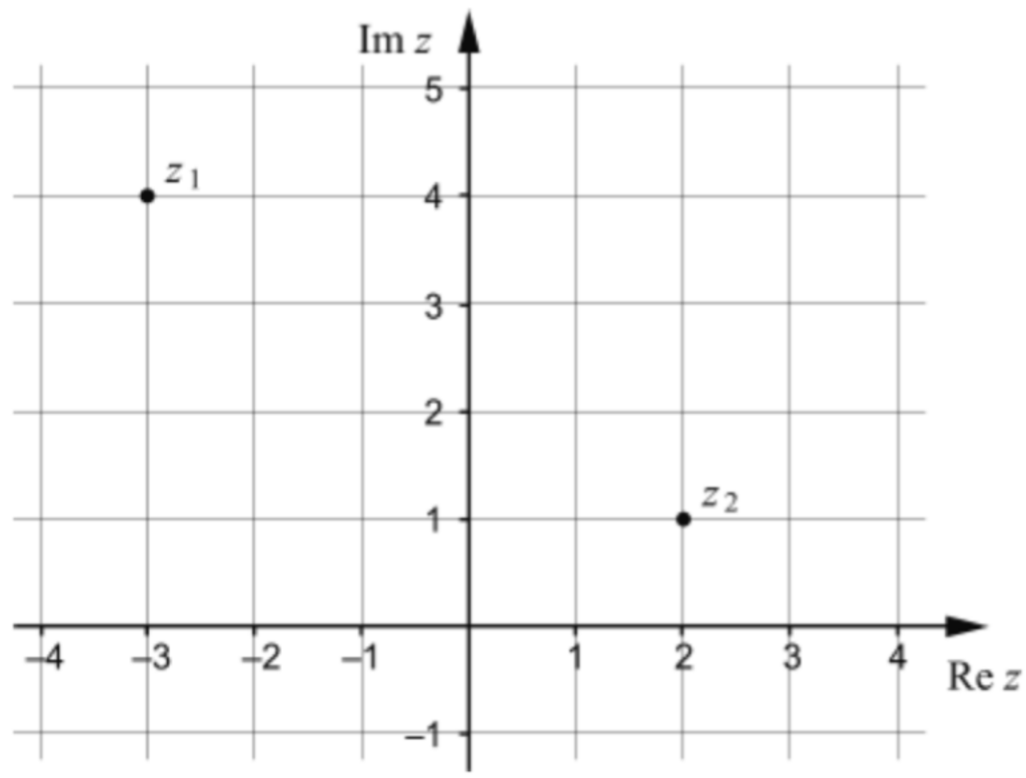


1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ $2\cos 2x$ (1/0/0)

b) $g(x) = (4x+1)^5$ $20(4x+1)^4$ (1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talen z_1 och z_2 är markerade.

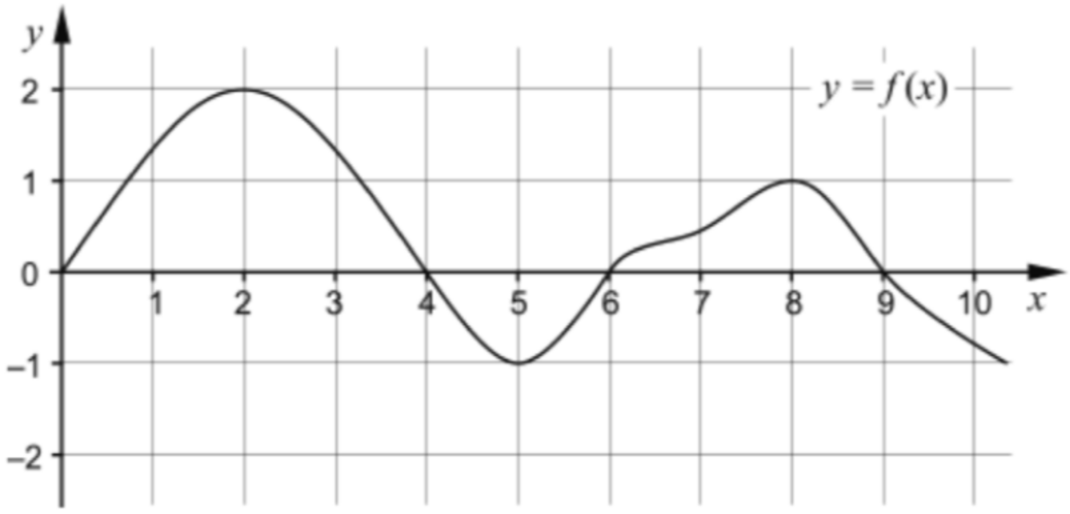


a) Bestäm $\bar{z}_2$ $\bar{z}_2 = 2 - i$ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 + z_2$ $z_1 + z_2 = -1 + 5i$ (1/0/0)

3. Ange den lodräta asymptoten till $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ $x = -2$ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen f.



För vilket värde på a i intervallet $0 \le a \le 10$ antar $\int_0^a f(x)\,dx$ sitt största värde? $a = 9$ (0/1/0)

5. För vilka vinklar i intervallet $0° < v < 90°$ gäller att $\sin 3v < \frac{1}{2}$?

$0° < v < 10°$ (0/1/1)

$50° < v < 90°$

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \le f(x) \le 7$

$4\sin x + 3$ (0/0/1)

7. Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x}dx$

Agnes får svaret e
Ingela får svaret 0
Kerstin får svaret 1

Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar. (2/0/0)

7. $\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = \underline{1}$

$\Rightarrow$ Kerstin har rätt.

---

8. För två komplexa tal z_1 och z_2 gäller att:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$
- $z_1 = 3 - i$

Bestäm z_2 på formen $a + bi$ (2/0/0)

8. $(3-i)(a+bi) = 7+i$

$3a + 3bi - ai + b = 7 + i$

$$\begin{cases} 3a + b = 7 \\ -a + 3b = 1 \quad {\cdot 3} \end{cases}$$

$10b = 10 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$\underline{z_2 = 2 + i}$

9. a) Visa att $\cos^2 x\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

b) Visa att $\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$ (0/2/0)

9.

a)

$$VL=\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)=$$

$$=\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)=1=HL.$$

b)

$$VL=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\cos x-\sin x=HL.$$

---

10. Lös ekvationen $\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1/1/0)

10.

$$2x=\pm\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\underline{x=\pm\frac{\pi}{12}+k\cdot\pi}$$

11. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

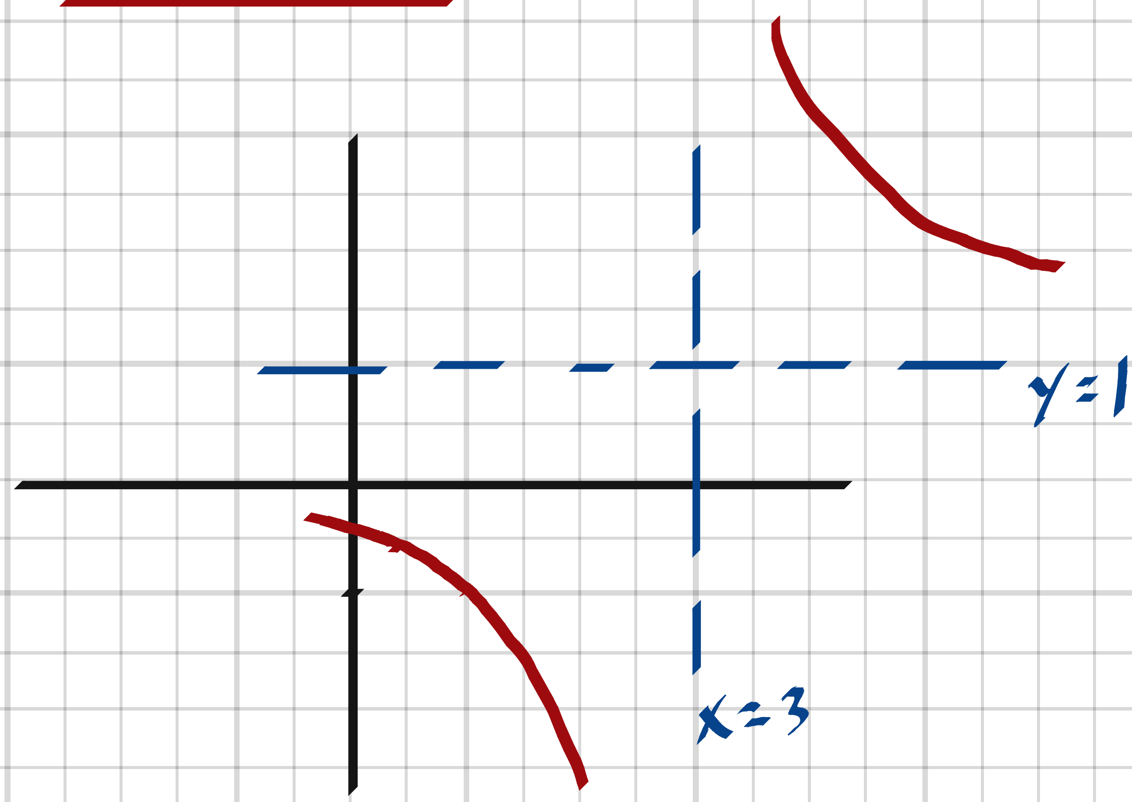
a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)

b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)

c) Lös olikheten $|f(x)| > 3$ där $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)

11. a) $\underline{x = 3 \ , \ y = 1}$

b)



c) $\left| \dfrac{x+1}{x-3} \right| > 3 \quad , \quad x \neq 3 \quad \Rightarrow$

$\underline{3 < x < 5 \quad , \quad 2 < x < 3}$

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ $\quad$ $2\cos 2x$ $\quad$ (1/0/0)

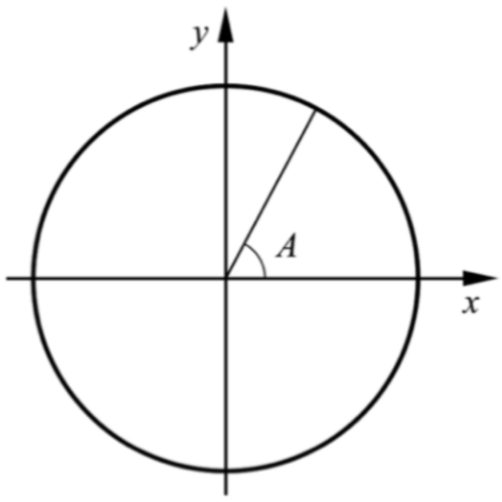
b) $f(x) = x \cdot e^{x}$ $\quad$ $e^{x}(1+x)$ $\quad$ (1/0/0)

2. Funktionen f är definierad genom $f(z) = 2z - z^2$, där z är en komplex variabel.

a) Bestäm $f(\mathrm{i})$ $\quad$ $1+2i$ $\quad$ (1/0/0)

b) Bestäm z så att $f(z) = 10$ $\quad$ $1 \pm 3i$ $\quad$ (1/0/0)

3. I enhetscirkeln nedan är vinkeln A markerad där $A = 70°$



Ange två andra vinklar, v_1 och v_2, i intervallet $0° \leq v \leq 720°$ som har samma cosinusvärde som vinkeln A.

$v_1 =$ $290°$

$v_2 =$ $430°$ $\quad$ (2/0/0)

4. Ange

a) $\bar{z}_1$ om $z_1 = -2 - 3\mathrm{i}$ $\quad$ $\bar{z}_1 = -2+3i$ $\quad$ (1/0/0)

b) ett komplext tal z_2 så att $\operatorname{Re} z_2 = 3$ och $|z_2| > 4$ $\quad$ $z_2 = 3+3i$ $\quad$ (0/1/0)

5. Ange det minsta värde som funktionen $g(x) = 3 + |x - 1|$ kan anta.

3 (1/0/0)

6. Vilket av alternativen A-F är lika med $\cos 25°$?

A. $1 - \sin^2 25°$ B. $\dfrac{\sin 25°}{\tan 25°}$ C. $\dfrac{\cos 75°}{3}$

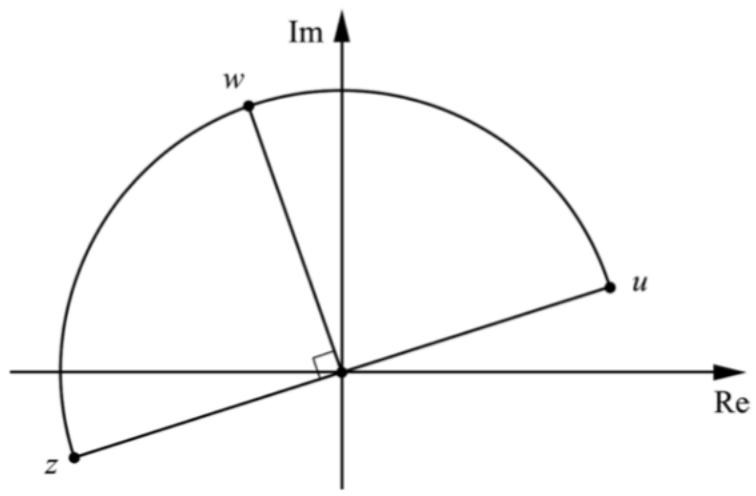
D. $\cos 75° - \cos 50°$ E. $\dfrac{\sin 50°}{2\cos 25°}$ F. $\dfrac{\tan 25°}{\sin 25°}$

B (0/1/0)

7. Ange hur många lösningar ekvationen $\tan 2v = 0{,}7$ har i intervallet $0° \le v \le 360°$

4 (0/1/0)

8. I figuren är tre komplexa tal z , u och w markerade på en halvcirkel.



Vilka två av alternativen A-F beskriver talet u ?

A. iz B. $i^2 z$ C. $\dfrac{z}{i}$

D. iw E. $i^2 w$ F. $\dfrac{w}{i}$

B , F (0/1/0)

9. Vilka två av alternativen A-F är primitiva funktioner till $g(x)=\frac{2}{x}$ för $x>0$?

A. $G(x)=\frac{2}{x^2}$ B. $G(x)=1-\frac{2}{x^2}$ C. $G(x)=-2x^{-2}$

D. $G(x)=2\ln x+1$ E. $G(x)=\ln x^2$ F. $G(x)=(\ln x)^2$

D, E (0/1/0)

10. Bestäm $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$ om $g(x)=4x^2+\sin 3x$ 3 (0/0/1)

11. Vilka två av följande linjer A-F är asymptoter till $y=\frac{x^2-2x+1}{x}$? $= x-2+\frac{1}{x}$

A. $x=0$

B. $y=0$

C. $x=1$

D. $y=-2x+1$

E. $y=x-2$

F. $y=2x-2$

A, E (0/0/1)

12. För de komplexa talen z_1 och z_2 gäller att $z_1=3i$ och $|z_2|=7$

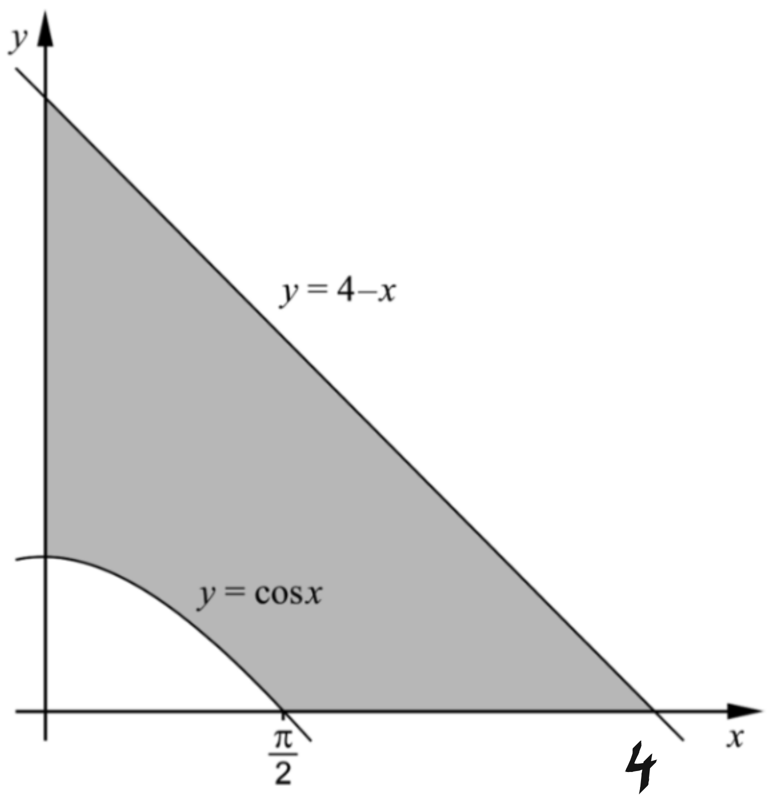
Bestäm det minsta värde som $|z_1+z_2|$ kan anta.

4 (0/0/1)

13. Ange en primitiv funktion till $f(x)=\cos^2 3x-\sin^2 3x$

$\frac{1}{6}\cdot\sin 6x$ (0/0/1)

14. Figuren nedan visar ett skuggat område som begränsas av kurvan $y = 4 - x$, kurvan $y = \cos x$ och de positiva koordinataxlarna.



Beräkna arean av det skuggade området. (2/1/0)

14.

$$A = \frac{4 \cdot 4}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 8 - \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 8 - \sin\frac{\pi}{2} + \sin 0 =$$

$$= 8 - 1 + 0 = \underline{7 \text{ ae}}.$$

---

15. Visa att $\dfrac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

15.

$$VL = \frac{\sin 2x}{2\cos x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\cos x} = \sin x = HL.$$

16. Beräkna $\frac{9+2i}{2+i}$ och svara på formen $a+bi$ (2/0/0)

16. $\frac{(9+2i)(2-i)}{4+1} = \frac{18-5i+2}{5} = \underline{4-i}$

---

17. Lös ekvationen $\cos(x-30°)-\cos(x+30°)=1$ (0/2/0)

17. $\cos x \cdot \cancel{\cos 30°} + \sin x \cdot \sin 30° - \cos x \cdot \cancel{\cos 30°} + \sin x \cdot \sin 30° = 1$

$\sin x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1$

$\sin x = 1$

$\underline{x = 90° + k \cdot 360°}$, $k \in \mathbb{Z}$

---

18. Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter för funktionen f där
$f(x) = -x \ln x, \quad x > 0$ (0/1/1)

18. $f'(x) = -(\ln x + 1)$

$f''(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

$f''\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0 \Rightarrow$ maximum

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \ln e = \frac{1}{e}$

Funktionen har en maxpunkt i $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$