20. Under ett dygn i juli mättes temperaturen i Haparanda. Enligt en förenklad modell kan temperaturen under detta dygn beskrivas med sambandet
$y = 15 + 5\sin(0{,}26x)$
där y °C är temperaturen och x är antalet timmar efter klockan 08.00.

Bestäm förändringshastigheten för temperaturen när klockan är 12.00. (2/0/0)

20.

$y'(x) = 5 \cdot 0.26 \cos(0.26x)$

$y'(4) = 1.3 \cos(0.26 \cdot 4) = \underline{0.66 \text{ °c/h}}$

---

21. Bestäm talet a så att $y = a \cdot e^{2x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y' + y = e^{2x}$ (2/0/0)

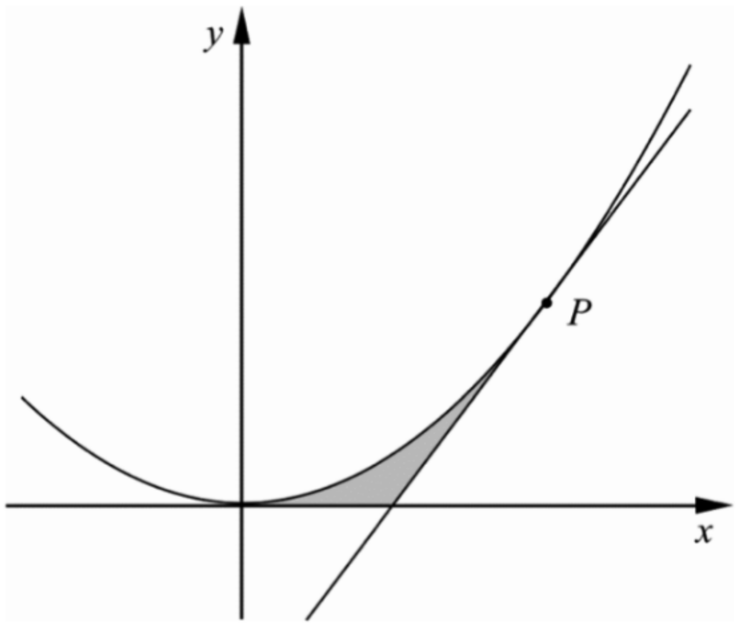
21.

$y' = 2ae^{2x}$

$2a \cdot e^{2x} + ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{3}}$

---

22. Figuren nedan visar parabeln $f(x)=x^2$ och linjen $g(x)=4x-4$
Linjen tangerar parabeln i punkten P. Parabeln och linjen innesluter tillsammans med x-axeln ett område som skuggats i figuren.



Bestäm arean av det skuggade området. (2/1/0)

22. Skärningspunkter:

1) $x_p^2 = 4x_p - 4$

$(x_p-2)^2 = 0 \Rightarrow x_p = 2$

2) $4x-4=0 \Rightarrow x=1$

$$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^{x_p=2} (x^2-4x+4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \frac{8-2\cdot 3}{3} = \frac{2}{3} \text{ a.e.}$$

23. Ange en funktion som har två lodräta asymptoter. *Endast svar krävs* (0/2/0)

23.

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

---

24. Som ett led i ett bageris kvalitetskontroll vägs ett antal bakade kanelsnäckor. Kvalitetskontrollen visar att vikten är normalfördelad med medelvikten 120 gram och standardavvikelsen 4,0 gram.

Hur många kanelsnäckor kan förväntas väga mellan 115 gram och 130 gram om man en dag bakar 450 kanelsnäckor? (0/2/0)

24.

$$f(x) = \int_{115}^{130} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-120}{4}\right)^2} = 0{,}89 = 89\,\%$$

Antal mellan 115 och 130 gram $= 450 \cdot 0{,}89 = 400$ st.

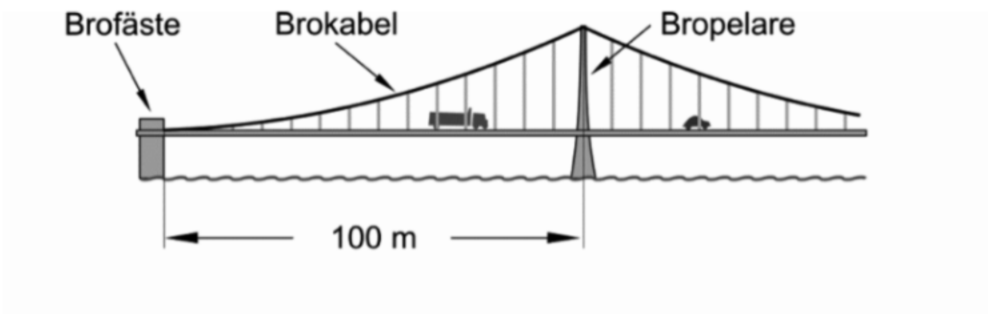
---

25. Enligt en förenklad modell kan formen av brokabeln i figuren nedan beskrivas med funktionen

$f(x) = 0{,}040x^{3/2}$ i intervallet $0 \le x \le 100$, där

f är höjden över vägbanan i meter och

x är avståndet i meter längs vägbanan mätt från brofästet.



Faktaruta:

Längden s av en kurva $y = f(x)$ i intervallet $a \le x \le b$ ges av sambandet

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Bestäm längden av brokabeln mellan brofästet och bropelaren. (0/2/0)

25. $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 0{,}040 \cdot x^{1/2} = 0{,}06\sqrt{x}$

$$s = \int_0^{100} \left(1 + (0{,}06\sqrt{x})^2\right)^{1/2} dx = \underline{109 \text{ m}}$$

16. Skriv det komplexa talet $z = 2 + 2i$ på polär form. (2/0/0)

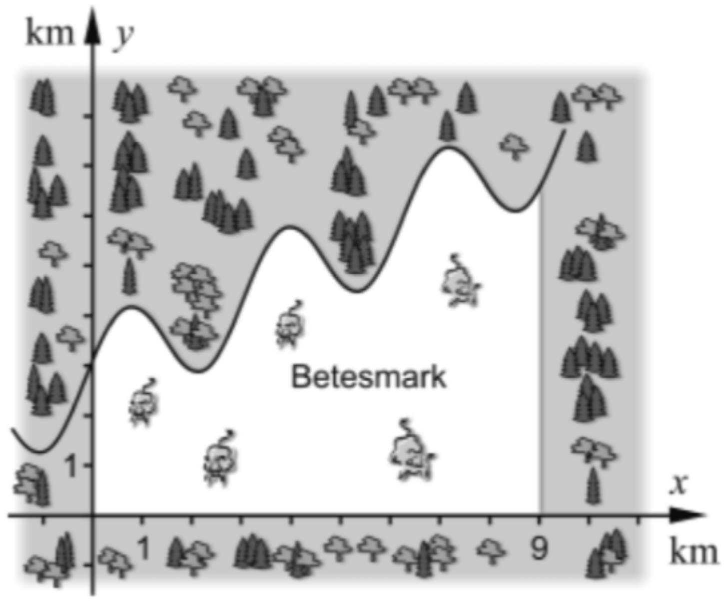
16.

$$r = (2^2 + 2^2)^{1/2} = \sqrt{8}$$

$$\arg z = \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{8}\, e^{i \cdot \pi/4} = \sqrt{8}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

17. En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen
$f(x) = 0{,}5x + \sin 2x + 3$

Beräkna betesmarkens area. (2/0/0)

17.

$$A = \int_0^9 f(x)\,dx = \left[0.25x^2 - 0.5\cos 2x + 3x\right]_0^9 =$$

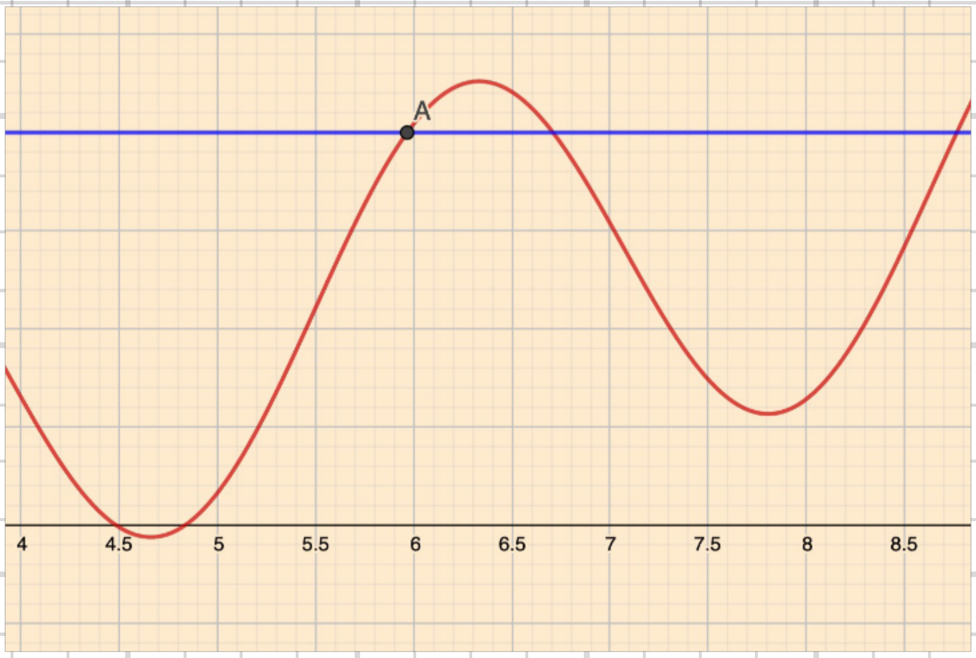
$$= 0.25 \cdot 81 - 0.5 \cdot \cos(18) + 3 \cdot 9 + 0.5 = \underline{47 \text{ km}^2}$$

18. Ekvationen $\frac{x}{5} + \cos 2x = 2$ har flera lösningar.
Samtliga lösningar ligger i intervallet $-20 \leq x \leq 20$

a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror. (1/0/0)

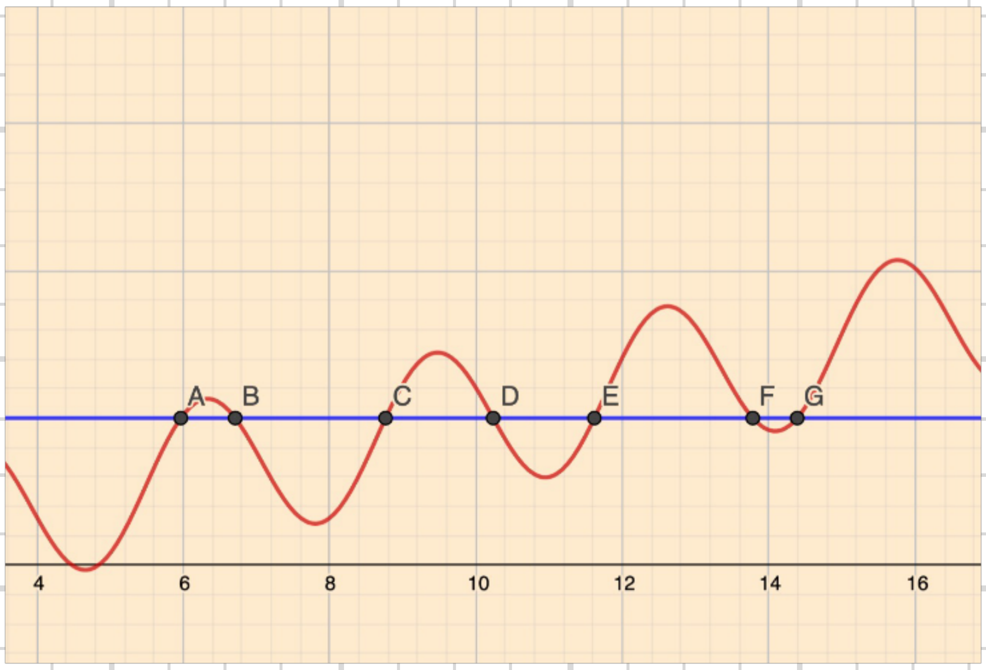
b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen. (1/0/0)

18. a)



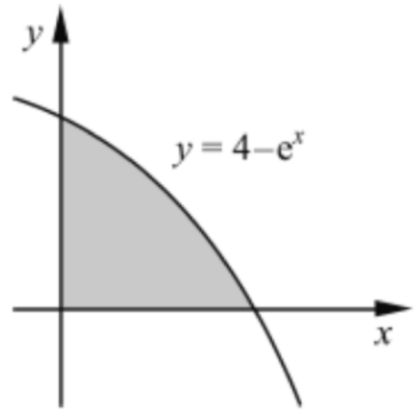
$x_{min} = 5.97$

b)



7 st lösningar.

19. I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror. (0/3/0)

19. Skärningspunkt:

$$4 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi (4 - e^x)^2 dx = \pi (16 - 8e^x + e^{2x})$$

$$V = \int_0^{\ln 4} dV = \int_0^{\ln 4} \pi (16 - 8e^x + e^{2x}) dx =$$

$$= \pi \left[16x - 8e^x + 0{,}5e^{2x} \right]_0^{\ln 4} = \pi (16 \ln 4 - 32 + 8 + 8 - 0{,}5) =$$

$$= \pi (16 \ln 4 - 16{,}5) \approx 17{,}8 \text{ v.e.}$$

20. En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

$\frac{dv}{dt} + 5v = 10$ där v är fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder.

a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

b) Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m. (0/3/0)

20. a) $\frac{dv}{dt} = 10e^{-5t}$

$VL = 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t}) = 10 = HL.$

b) $s = \int_0^t v(t)\,dt = 2t + \frac{2}{5}e^{-5t} - \frac{2}{5}$

$2t + \frac{2}{5}e^{-5t} - \frac{2}{5} = 8 \Rightarrow \underline{t \approx 4,2\,s.}$

21. Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6}e^{-t/6}$, $t \geq 0$

a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)

b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: ”Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter.”
Bestäm värdet på x. (0/2/0)

21. a)

$$P(t) = \int_0^t f(t)\,dt = \left[-e^{-t/6}\right]_0^t = 1 - e^{-t/6}$$

$$P(10) = 1 - e^{-\frac{10}{6}} = 0.81 = \underline{81\ \%}$$

b)

$$1 - e^{-t/6} = 0.5 \Rightarrow$$

$$t = -\ln(0.5)\cdot 6 = \underline{4.2 \text{ min}}$$

22. Hur många grader är 1,4 radianer? *Endast svar krävs* (1/0/0)

22. $1{,}4 \cdot 180/\pi \approx 80^\circ$

---

23. Tidvatten är ett fenomen som uppstår på grund av månens dragningskraft på havsvattnet. Under ett dygn uppstår det både ebb (lågvatten) och flod (högvatten). De största skillnaderna mellan ebb och flod på jorden finns vid Newfoundland på Kanadas ostkust.

Enligt en förenklad modell kan vattennivån under ett visst dygn vid Newfoundland beskrivas med funktionen

$y = 8{,}0 + 8{,}0\cos 0{,}52x$

där y är vattnets höjd i meter jämfört med lägsta vattennivån och x är antalet timmar efter klockan 03.00

a) Bestäm höjdskillnaden mellan högsta och lägsta vattennivån enligt modellen ovan. *Endast svar krävs* (1/0/0)

b) Utgå från modellen ovan och bestäm med vilken hastighet vattnets höjd ändras då klockan är 13.00 (1/1/0)

23. a) $y_{max} = 8+8 = 16$ m

$y_{min} = 8-8 = 0$ m

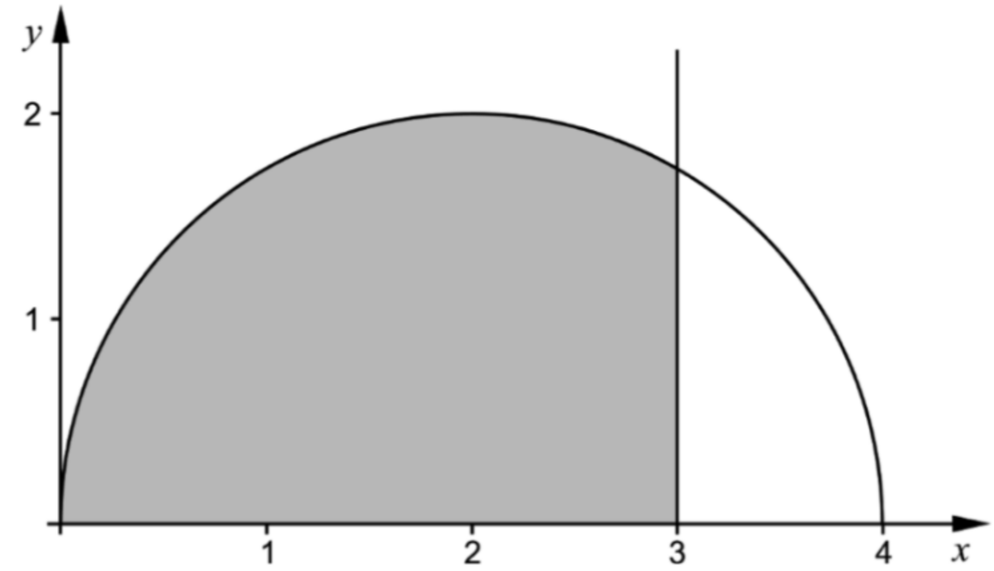
$\Delta y = y_{max} - y_{min} = 16$ m

b) $y' = -8 \cdot 0{,}52 \cdot \sin 0{,}52x$

$y'(10) = -8 \cdot 0{,}52 \cdot \sin 5{,}2 = 3{,}7$ m/h

---

24. I figuren nedan visas ett skuggat område som begränsas av kurvan $y = \sqrt{4x - x^2}$, linjen $x = 3$ och x-axeln.



När det skuggade området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp. Beräkna rotationskroppens volym och svara med minst tre värdesiffror. (2/0/0)

24.

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(4x - x^2)dx$$

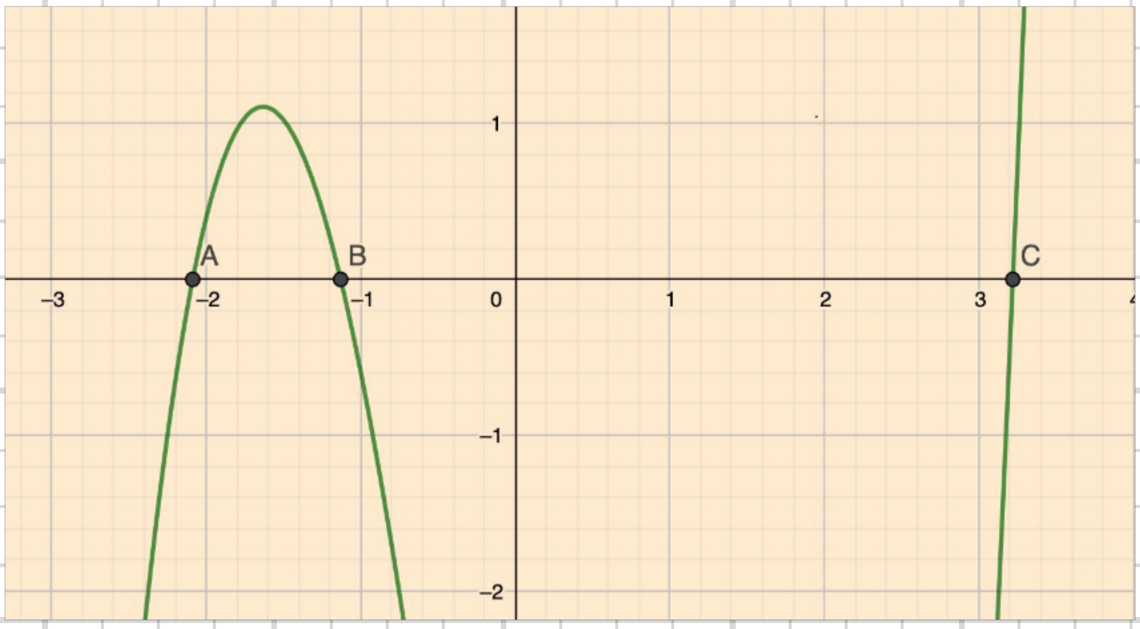
$$V = \int_0^3 dV = \pi \int_0^3 (4x - x^2)dx = \pi\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \pi\left(2 \cdot 9 - \frac{3^3}{3}\right) = \pi \cdot \frac{18 \cdot 3 - 27}{3} = 9\pi \text{ v.e.}$$

25. Bestäm samtliga rötter till ekvationen $x^3 - 8x = 7{,}6$
Svara med minst tre värdesiffror. *Endast svar krävs* (2/0/0)

25.

$x_1 \approx -2{,}09, \quad x_2 \approx -1{,}13, \quad x_3 \approx 3{,}22$



26. En vattentank som innehåller 18 500 liter töms med hastigheten $v(t)$ liter/minut, där $v(t) = 890 - 12t$ och t är tiden i minuter från tömningens början.

Hur många liter rinner ut ur tanken under de första 15 minuterna? (0/2/0)

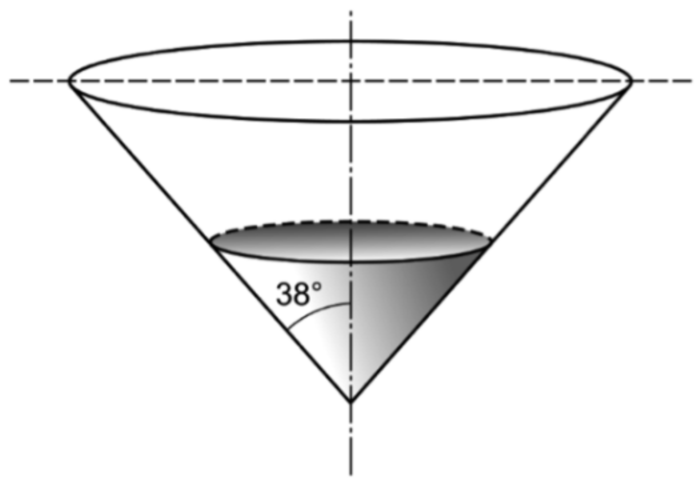
26.

$$V(t) = \int_0^t v(t)\,dt = 890t - 6t^2$$

$$V(15) = 890 \cdot 15 - 6 \cdot 15^2 = 12000 \text{ liter.}$$

27. Anna har fått i uppgift att lösa följande problem:

En behållare har formen av en rät cirkulär kon, se figur.
Vatten rinner in i behållaren med hastigheten 15 liter/min.
Med vilken hastighet ökar vattennivåns höjd då den är 3,0 dm?



Anna kommer fram till sambandet $V = 0{,}64h^3$, där V är volymen i liter och h är vattennivåns höjd i dm. Sedan vet hon inte hur hon ska fortsätta.

a) Hjälp Anna att fullfölja lösningen. (0/2/0)

b) Visa hur Anna kan ha gjort för att komma fram till sambandet $V = 0{,}64h^3$ (0/3/0)

27.

a) $$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = 1{,}92h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 15 \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{15}{1{,}92h^2}$$

$$\frac{dh}{dt}(3) = \frac{15}{1{,}92 \cdot 3^2} = \underline{0{,}87 \text{ dm/min}}$$

b) $$V = \frac{bh}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot (h \cdot \tan 38°)^2 \cdot h = 0{,}64\, h^3$$