8. Ange *alla* funktioner som har egenskapen att $f(x) = f'(x)$ där $f(x) \neq 0$

ke^x (0/1/1)

9. Bestäm

a) $\lim_{x \to 0} (e^x + 7)$

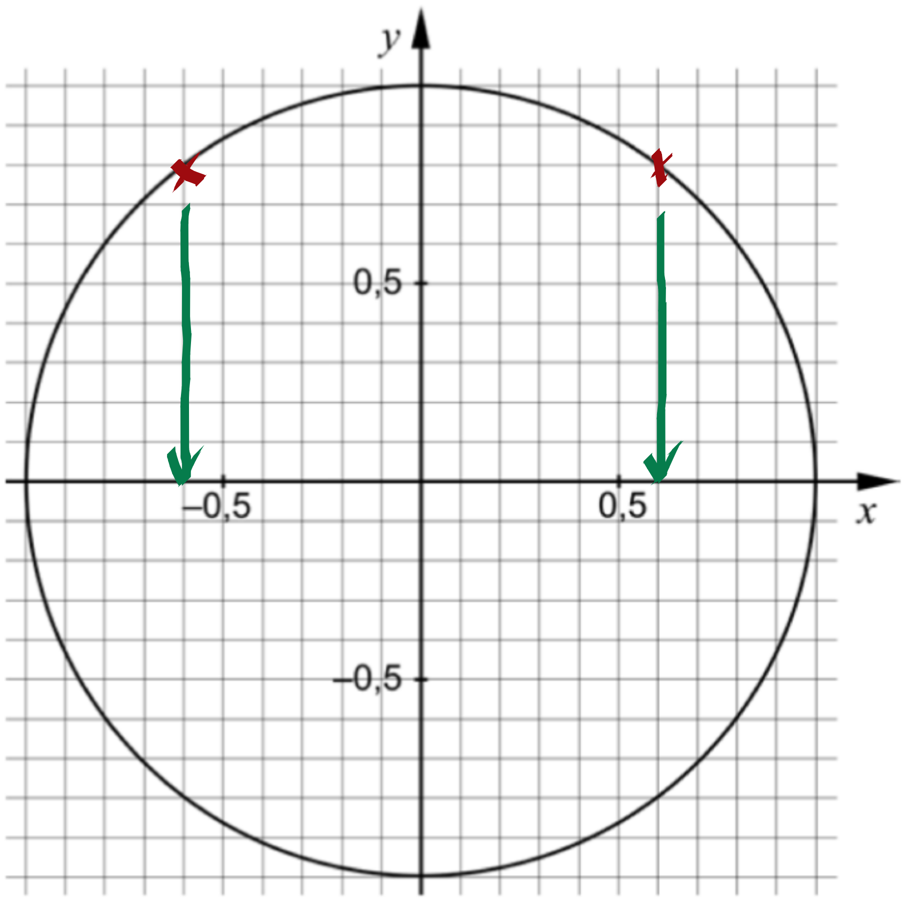
8 (1/0/0)

b) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{16x}{4x+9}}$

$\dfrac{16}{4+\frac{9}{x}}$

2 (0/0/1)

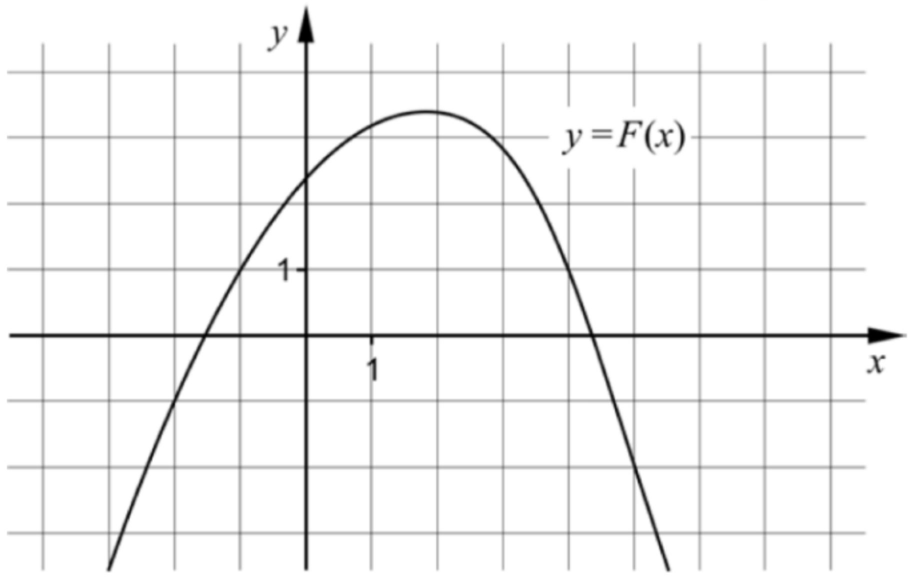
10. Använd enhetscirkeln nedan och bestäm $\cos(180° - v)$ om $\sin v = 0{,}8$



$\pm 0{,}6$ (0/0/2)

15. F är en primitiv funktion till funktionen f.

I figuren visas grafen till funktionen F. Bestäm $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ (0/0/1)



15.

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = F(5) - F(-2) = -2-(-1) = \underline{-1}$$

---

16. Bestäm derivatan till $f(x)=\frac{A}{x}$ med hjälp av derivatans definition. (0/2/2)

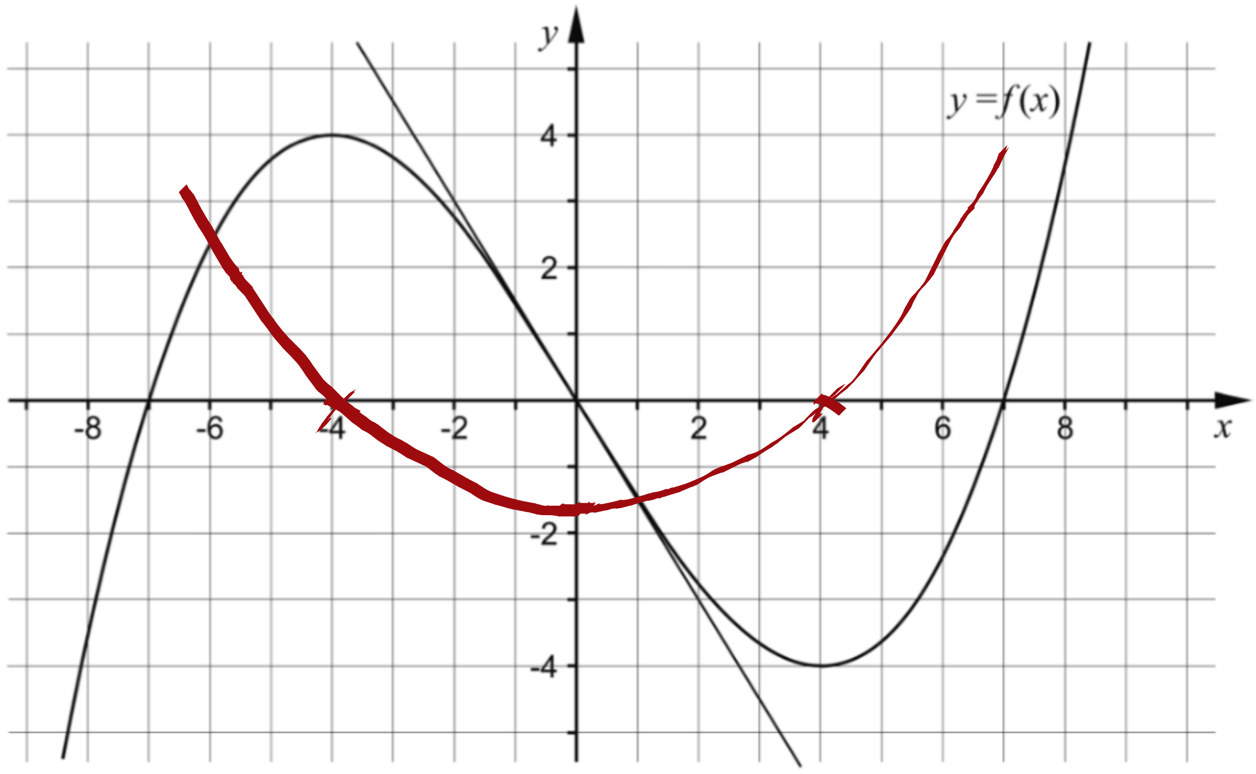
16.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{A}{x+h}-\frac{A}{x}}{h} = \frac{Ax-A(x+h)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{-Ah}{hx(x+h)} = -\frac{A}{x^2+xh}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} -\frac{A}{x^2+xh} = -\frac{A}{x^2}$$

6. Figuren nedan visar grafen till en tredjegradsfunktion f och en tangent som tangerar grafen i origo.

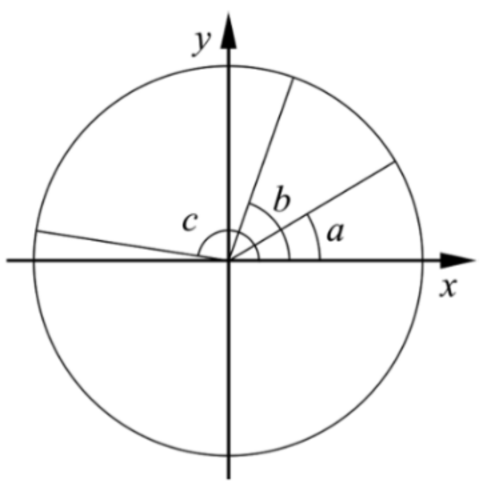


a) Bestäm derivatans nollställen. $x_1 = -4,\ x_2 = 4$ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(0)$. $-3/2$ (1/0/0)

c) Skissa grafen till funktionens derivata i koordinatsystemet ovan. (0/1/1)

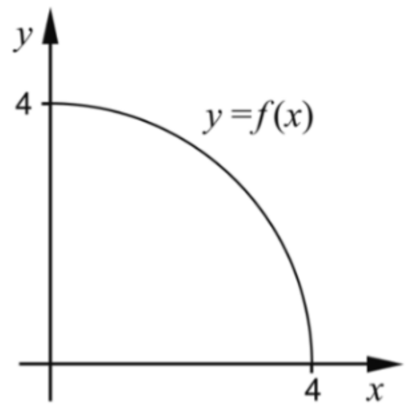
7. I enhetscirkeln nedan är tre vinklar a, b och c markerade.



Ordna $\sin a$, $\cos b$ och $\sin c$ i storleksordning. Börja med det minsta värdet.

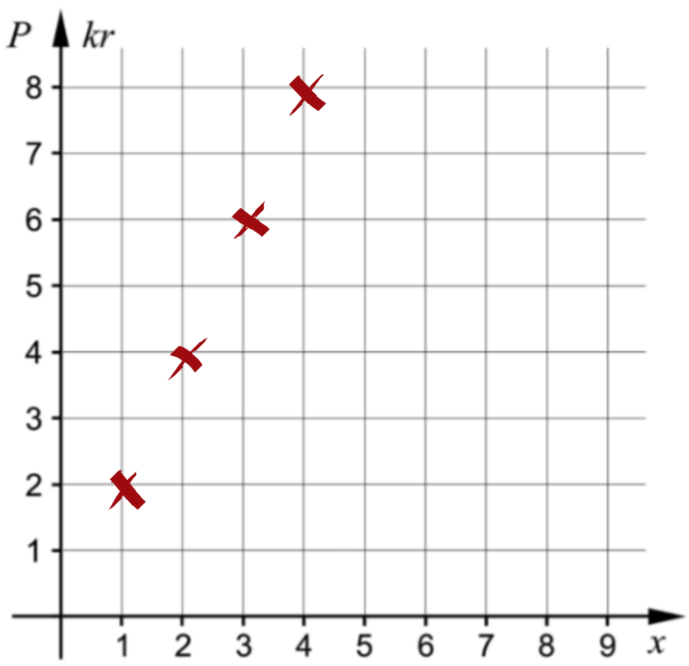
$\sin c$, $\cos b$, $\sin a$ (0/1/0)

8. Grafen till funktionen f bildar en kvartscirkel i första kvadranten.



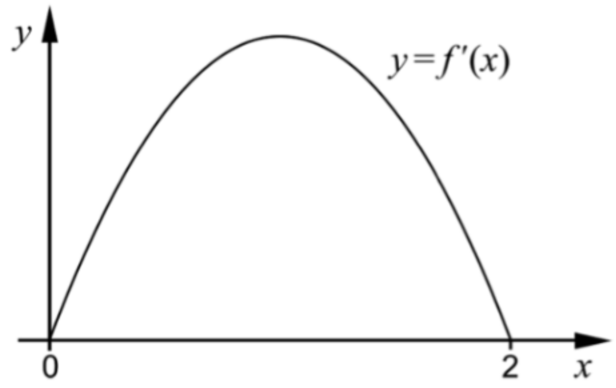
Bestäm $\int_0^4 f(x)\,dx$. Svara exakt. $\frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi$ (0/1/0)

9. I Hagaskolans cafeteria kostar bananer 2 kr per styck. Priset P kr är en funktion av antalet bananer x. Rita in grafen till funktionen i intervallet $1 \leq x \leq 4$ i koordinatsystemet nedan.



(0/1/0)

10. Funktionen f har derivatan f'. Figuren nedan visar grafen till f'.
Avgör vilket påstående A-F som *alltid* är sant.



A. $f(2)$ är positiv

B. $f(2) - f(0)$ är positiv

C. $f(1)$ är noll

D. $f(0)$ är noll

E. $f(1) - f(2)$ är positiv

F. $f(0) - f(1)$ är positiv

B (0/0/1)

15. Bestäm konstanten A så att $\lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{4x + A} = \frac{1}{7}$ (0/0/3)

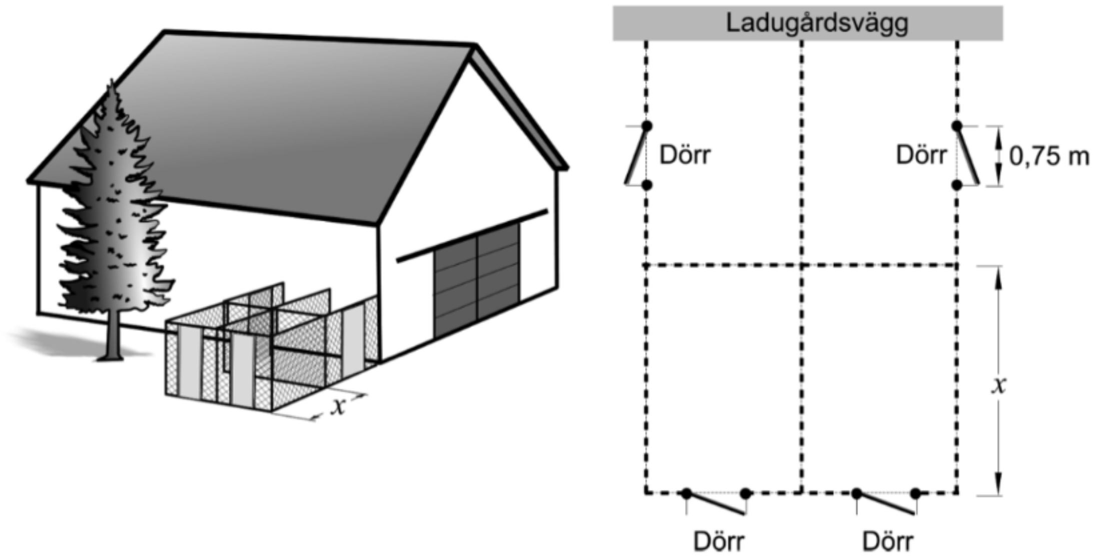
15.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{4x+A} = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{4 + \frac{A}{x}} = \frac{A}{4}$$

$$\frac{A}{4} = \frac{1}{7} \Rightarrow A = \frac{4}{7}$$

12. Karin ska bygga fyra rektangulära rastgårdar till sina hundar. Alla fyra rastgårdar ska ha samma mått och inhägnas med stängsel.

Karin har 45 m stängsel och fyra dörrar som hon ska använda till rastgårdarna. Två av rastgårdarna byggs mot en ladugårdsvägg. Därför behövs inte stängsel på den sida som utgörs av ladugårdsväggen. Dörrarna är 0,75 m breda, lika höga som stängslet och ska placeras enligt figuren.



Arean för var och en av rastgårdarna ges av funktionen $A(x) = 12x - 1{,}5x^2$ där A är arean i m^2 och x är längden av rastgårdens ena sida i m, se figur.

a) Bestäm med hjälp av derivata det värde på x som ger varje rastgård så stor area som möjligt. (2/0/0)

b) Visa att arean av en rastgård ges av funktionen $A(x) = 12x - 1{,}5x^2$ (0/0/3)

12. a) $A'(x) = 12 - 3x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 4}$

(−1.5 framför x^2-term => maxpunkt)

b) y = gaveln till en rastgård =>

$6x - 1.5 + 4y - 1.5 = 45 \Rightarrow$

$y = \frac{48 - 6x}{4} = 12 - 1.5x$

$A = xy = 12x - 1.5x^2$

9. a) Ge ett exempel på en polynomfunktion f av fjärde graden för vilken det gäller att $f(1) = 4$

$x^4 + 3$ (0/1/0)

b) Det finns flera rationella uttryck som uppfyller följande villkor:

- Uttrycket får värdet 0 då $x = -1$
- Uttrycket är inte definierat för $x = 3$
- Uttrycket är inte definierat för $x = -4$

Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som uppfyller alla tre villkor.

$\dfrac{x+1}{(x-3)(x+4)}$ (0/1/1)

10. I en sjö planterar man in fiskar av en art som inte funnits där tidigare. Fiskpopulationen kan beskrivas med sambandet

$N(t) = \dfrac{15000}{3 + 2e^{-0,5 \cdot t}}$ där N är antalet fiskar och t är tiden i år efter inplanteringen.

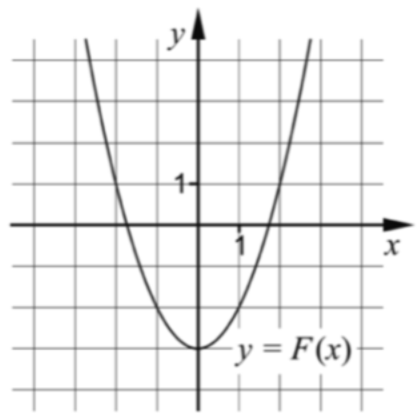
a) Hur många fiskar planterades in i sjön från början?

3000 (0/1/0)

b) På grund av olika miljöfaktorer kan antalet fiskar inte bli hur stort som helst. Bestäm den övre gränsen för antalet fiskar med hjälp av sambandet.

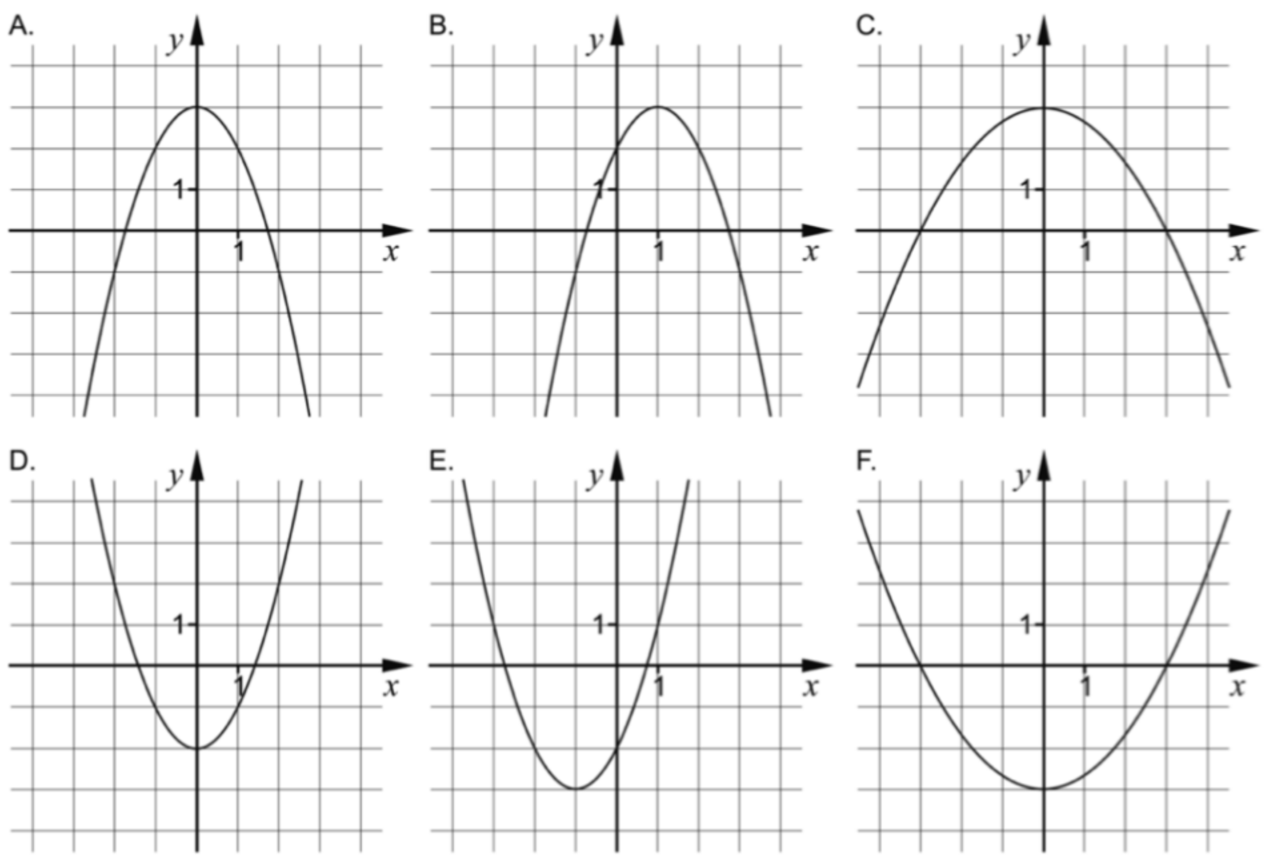
5000 (0/0/1)

11. Funktionen f har en primitiv funktion F. Grafen till F visas i figuren nedan.



a) Vilken av graferna A-F visar en annan primitiv funktion till f ?

D ______ (0/1/0)

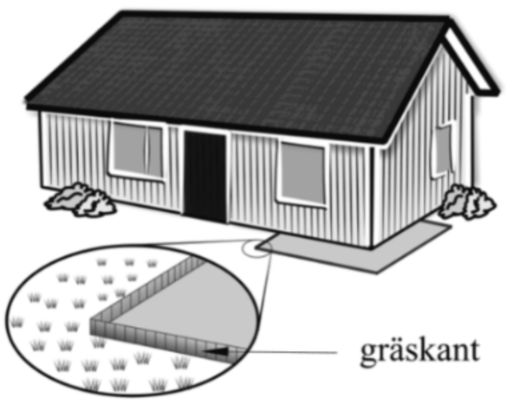


En annan funktion g har en primitiv funktion G. En av graferna A-F visar den primitiva funktionen G.

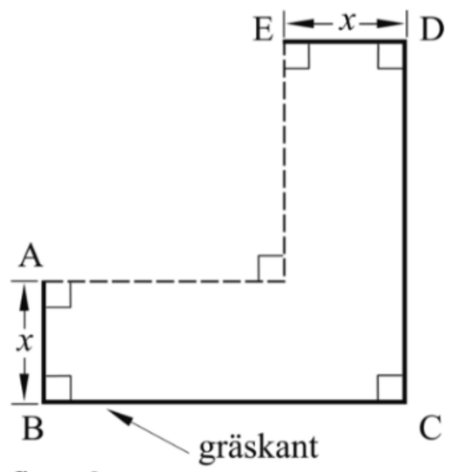
b) Vilken av graferna A-F visar G om $\int_0^1 g(x)\,dx = 3$?

E ______ (0/0/1)

13. En trädgårdsmästare ska göra en blomrabatt runt hörnet på ett hus. Längs sidorna som inte angränsar mot huset kommer hon att sätta gräskant, se figur 1. Hon vill utforma rabatten så att sidorna BC och CD är lika långa, se figur 2.



figur 1



figur 2

I trädgårdsmästarens förråd finns en rulle med 6 m gräskant och hon tänker använda hela rullen. Arean för blomrabatten blir då

$A(x) = 6x - 3x^2$

där x är blomrabattens bredd i meter, se figur 2.

a) Trädgårdsmästaren vill att blomrabatten ska ha så stor area som möjligt. Beräkna med hjälp av derivata bredden x så att arean blir maximal. (2/0/0)

b) Vilka värden kan arean A anta i detta sammanhang? (1/2/0)

c) Visa att arean för blomrabatten i figur 2 kan beskrivas av $A(x) = 6x - 3x^2$ om trädgårdsmästaren använder 6 m gräskant. (0/1/2)

13. a) $A'(x) = 6 - 6x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 1 \text{ m}}$

b) $A(0) < A \leq A(1) \Rightarrow \underline{0 < A \leq 3}$

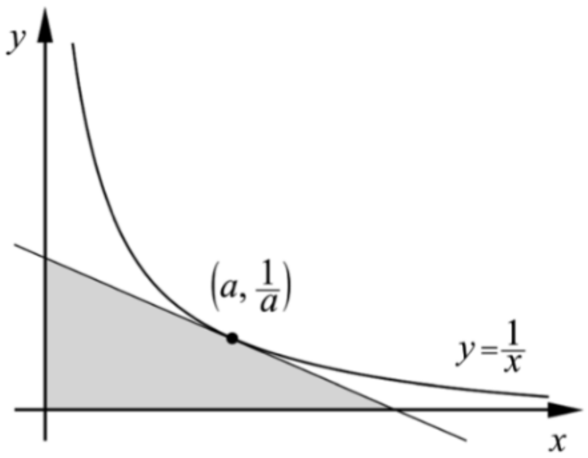
c) $y = BC$

$2x + 2y = 6 \Rightarrow y = 3 - x$

$A = xy + x(y - x) = 2x(3 - x) - x^2 = 6x - 2x^2 - x^2 \Rightarrow$

$A(x) = 6x - 3x^2$

16. Bevisa att den triangel som innesluts av de positiva koordinataxlarna och en tangent till kurvan $y = \frac{1}{x}$ har arean 2 areaenheter *oavsett* var tangenten tangerar kurvan.



Utgå från att tangeringspunkten har koordinaterna $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ (0/1/3)

16.

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

Tangentens ekvation:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \text{ där } k = y'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

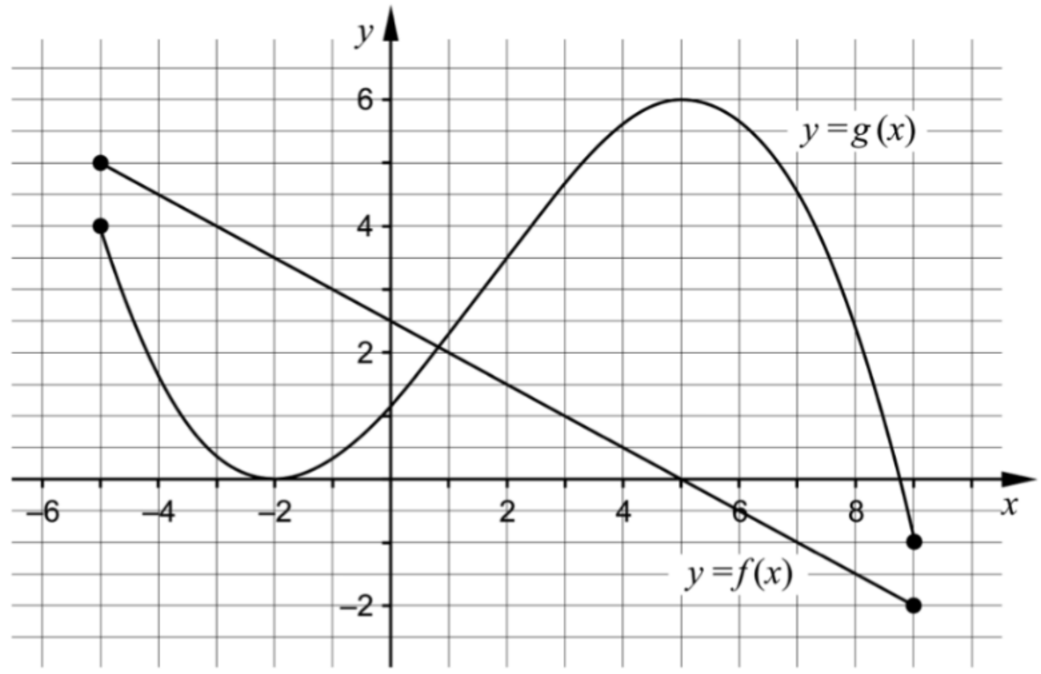
$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$$y(x) = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

$$y(x) = 0 \Rightarrow x = 2a$$

$$A = \int_0^{2a} y(x)\,dx = \left[\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\right]_0^{2a} = \frac{4a}{a} - \frac{4a^2}{2a^2} = 4 - 2 = 2$$

11. Figuren visar graferna till funktionerna f och g som är definierade i intervallet $-5 \le x \le 9$
Funktionen h bildas som summan av f och g, det vill säga $h(x) = f(x) + g(x)$.



Använd graferna för att lösa följande uppgifter.

a) Bestäm $h(2)$ 5 (0/1/0)

b) Bestäm största värdet för funktionen h i intervallet $-5 \le x \le 9$ 9 (0/0/1)

c) Bestäm $h'(5)$ -0.5 (0/0/1)

a) $h(2) = f(2) + g(2) = 1{,}5 + 3{,}5 = 5$

b) $h_{max} = h(-5) = 4 + 5 = 9$

c) $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

$f(x) = -0.5x + 2{,}5 \Rightarrow f'(x) = -0.5 \Rightarrow f'(5) = -0{,}5$

$g'(5) = 0 \Rightarrow$

$h'(5) = -0{,}5 + 0 = -0{,}5$