1 Ange en primitiv funktion till

a) $f(x) = 7x + 9$

b) $g(x) = 3 + e^{3x}$

1. a) $F(x) = \frac{7x^2}{2} + 9x$

b) $G(x) = 3x + \frac{e^{3x}}{3}$

---

2 Ange samtliga primitiva funktioner till

a) $f(x) = \frac{x-5}{2}$

b) $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$

2. a) $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + C$

b) $G(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{x} + C$

---

3 Vilka av funktionerna F, G, H och I är primitiv funktion till $f(x) = 6x^2 + 4x^3$?

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

✗ $G(x) = 2x^3 + x^4 + 2$

$H(x) = 2x^3 + x^4 + 2x$

✗ $I(x) = 2x^3 + x^4 - 7$

4 Bestäm F, den primitiva funktionen till f som uppfyller villkoret $F(0) = 3$.

a) $f(x) = x - x^2$

b) $f(x) = 5$

4. a) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$

$F(0) = 3 \Rightarrow 3 = 0 - 0 + C \Rightarrow C = 3$

$$\underline{F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 3}$$

b) $F(x) = 5x + C$

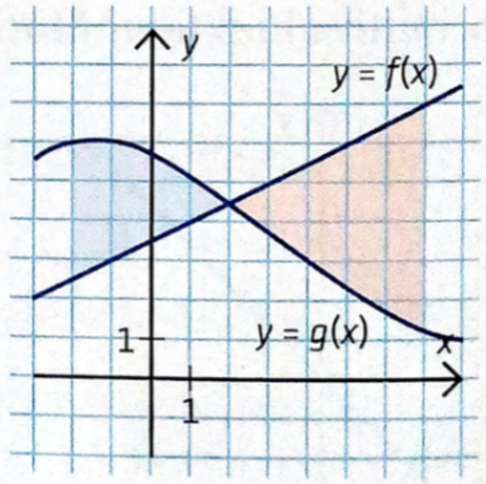
$F(0) = 3 \Rightarrow 3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$

$$\underline{F(x) = 5x + 3}$$

5 I figuren har vi ritat kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$. Teckna med hjälp av figuren den integral som beskriver

a) arean av det blå området

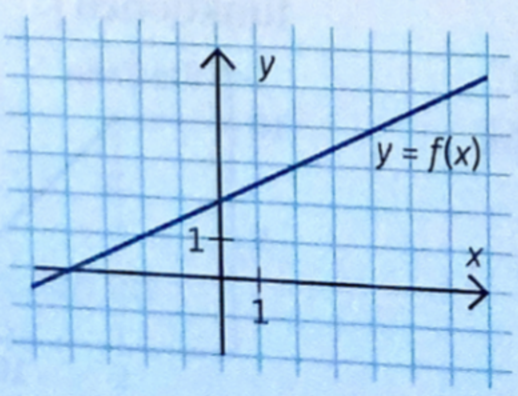
b) arean av det röda området



5. a) $\int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx$ b) $\int_{2}^{7} (f(x) - g(x))\,dx$

---

6 Figuren visar grafen $y = f(x)$. Bestäm $\int_{2}^{6} f(x)\,dx$ med hjälp av figuren.



6. $f(x) = 0{,}5x + 2$

$$\int_{2}^{6} f(x)\,dx = \left[0{,}25x^2 + 2x\right]_{2}^{6} = 0{,}25 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 - 0{,}25 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = \underline{16}$$

---

7 Bestäm värdet av $t > 0$ så att $\int_1^t \frac{6}{x^3}\,dx = 2$.

7.

$$\int_1^t \frac{6}{x^3}\,dx = 2 \Rightarrow \left[-\frac{3}{x^2}\right]_1^t = 2$$

$$-\frac{3}{t^2} + 3 = 2 \Rightarrow t = (\pm)\sqrt{3} = \underline{\sqrt{3}}$$

8 Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

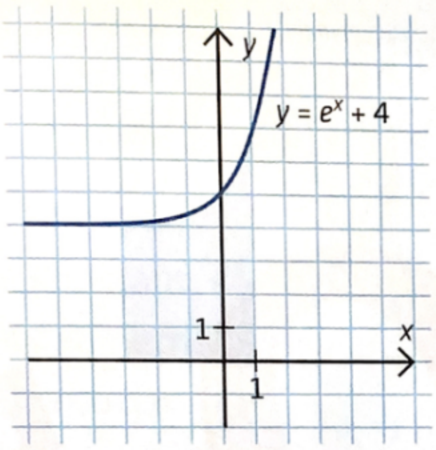
a) $\int_1^7 (x^3 - 4)\,dx$ b) $\int_0^6 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 3\right) dx$

8.

a) $$\int_1^7 (x^3 - 4)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4x\right]_1^7 = \frac{7^4}{4} - 4\cdot 7 - \frac{1}{4} + 4\cdot 1 = \underline{576}$$

b) $$\int_0^6 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 3\right) dx = \left[\frac{x\sqrt{x}}{3} + 3x\right]_0^6 = 2\sqrt{6} + 3\cdot 6 = \underline{22{,}9}$$

9



a) Beräkna arean av det skuggade området med hjälp av primitiva funktioner.

b) Beräkna arean med hjälp av räknaren och jämför sedan resultaten.

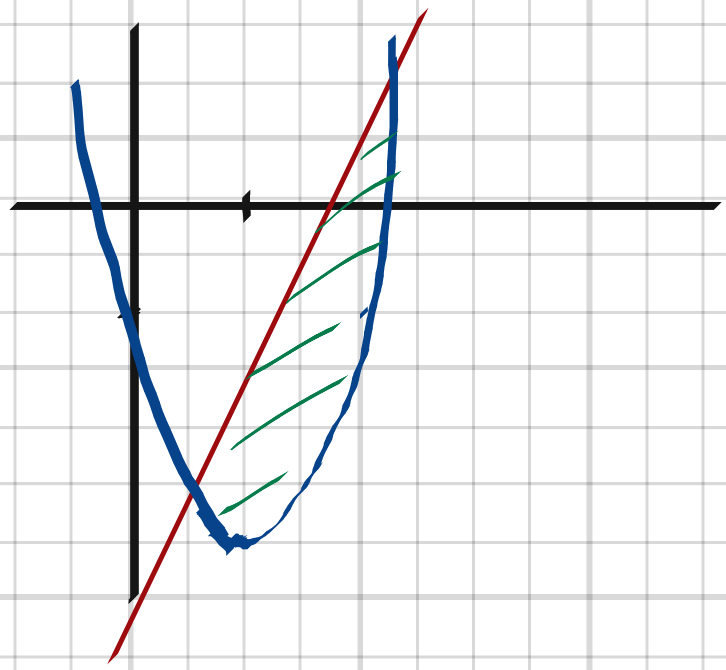
9. a)

$$\int_{-3}^{1}(e^x+4)\,dx = \Big[e^x+4x\Big]_{-3}^{1} = e+4-\frac{1}{e^3}+12 = 16+e-\frac{1}{e^3} \approx \underline{18{,}7 \text{ a.e}}$$

b) Geogebra: Integral$(y,-3,1) \approx \underline{18{,}7 \text{ a.e}}$

---

10 Beräkna med hjälp av primitiv funktion arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 2x - 7$ och $y = x^2 - 4x - 2$.



Skärningspunkter:

$$2x - 7 = x^2 - 4x - 2$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5$$

$$A = \int_1^5 (2x - 7 - x^2 + 4x + 2)\,dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = -\frac{125}{3} + 3\cdot 25 - 5\cdot 5 + \frac{1}{3} - 3\cdot 1 + 5\cdot 1 =$$

$$= \frac{-124 + 52\cdot 3}{3} = \frac{32}{3} = 10{,}67 \text{ a.e.}$$

11 Lite förenklat kan hastigheten $v(t)$ m/s hos en inbromsande spårvagn beskrivas av $v(t) = 1{,}5t^2 - 9{,}6t + 15{,}36$, där t är tiden i sekunder efter det att inbromsningen börjat och $0 \leq t \leq 3{,}2$. Hur lång sträcka färdas spårvagnen från det att inbromsningen börjat till det att den helt har stannat?

11.

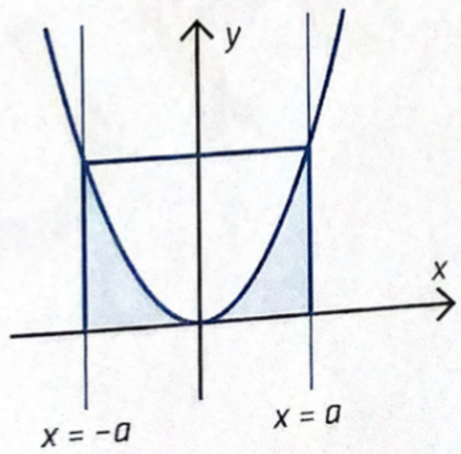
$$v(t) = 0 \Rightarrow 1{,}5(t^2 - 6{,}4t + 10{,}24) = 0$$

$$t = 3{,}2 \pm \sqrt{3{,}2^2 - 10{,}24} = 3{,}2$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = 0{,}5t^3 - 4{,}8t^2 + 15{,}36t$$

$$s(3{,}2) = 0{,}5 \cdot 3{,}2^3 - 4{,}8 \cdot 3{,}2^2 + 15{,}36 \cdot 3{,}2 = \underline{16{,}4 \text{ m}}$$

12 I figuren har vi ritat parabeln $y = 0{,}5x^2$ och en rektangel som har två hörn på parabeln och en sida efter x-axeln.



Välj $a = 1$ i figuren och bestäm

- arean av rektangeln i figuren.
- arean av området under parabeln, alltså det område som skuggats i figuren.

Axel påstår att oberoende av hur vi väljer värdet av konstanten a, så kommer alltid kvoten mellan arean av området under parabeln och arean av rektangeln att vara lika.

- Undersök om Axels påstående är sant.

12. $A_1 = 2 \cdot a \cdot 0{,}5a^2 = a^3$

$A_1(1) = 1$ a.e.

$$A_2 = 2 \cdot \int_0^a 0.5x^2\,dx = 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{3}$$

$A_2(1) = \frac{1}{3}$ a.e

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{a^3/3}{a^3} = \frac{1}{3}$$

Svar: Axel har fel, kvoten blir alltid $1/3$.