Ange samtliga primitiva funktioner till följande funktioner:

5109 a) $f(x) = \frac{x}{7} + 7$

b) $f(x) = 3e^x - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - x - 1$

d) $f(x) = kx^2 + 9$, där k är en konstant

5109. a) $\frac{x^2}{14} + 7x + C$

b) $3e^x - 3x + C$

c) $2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} - x + C$

d) $\frac{kx^3}{3} + 9x + C$

5110 a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{3}$

b) $f(t) = t + \sqrt{t}$

5110. a) $-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{9} + C$

b) $\frac{t^2}{2} + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + C$

5111 Förklara varför både

$F(x) = 2 \cdot x^{-2}$ och $G(x) = \frac{2}{x^2} + 12$

är primitiva funktioner till $f(x) = -\frac{4}{x^3}$

5111. $2 \cdot x^{-2} = \frac{2}{x^2}$

Konstanten 12 försvinner vid derivering.

5112 Bestäm en funktion $f(x)$ vars andraderivata är

ö $f''(x) = x + 1$.

5112. $f'(x) = \frac{x^2}{2} + x + C_1$

$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

ex. $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$

5113 Bestäm konstanterna a och b så att

$F(x) = a\sqrt{x} - \frac{b}{x^3}$

blir en primitiv funktion till

$f(x) = \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{15}{x^4}$

5113. $F(x) = 24\sqrt{x} - \frac{5}{x^3} \Rightarrow a = 24, \ b = 5$

5114 Funktionen F är en primitiv funktion till $f(x) = 4x - 12$.

Har F någon lokal extrempunkt i intervallet $1 < x < 5$? Motivera ditt svar.

5114. $f(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

Ja, $F(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 3$.

5120 Ange en primitiv funktion till

a) $f(x) = x^{11} + 12e^{2x}$ b) $f(x) = \frac{x^3 - 8x^4}{2x^2}$

c) $f(x) = \frac{5x^4 - 15x}{20x}$

5120. a) $F(x) = \frac{x^{12}}{12} + 6e^{2x}$

b) $f(x) = \frac{x}{2} - 4x^2$

$F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{4x^3}{3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3}{4}$

$F(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{3x}{4}$

5121 Ange samtliga primitiva funktioner till

a) $f(t) = \sqrt{t} + e^{-3t}$

b) $f(x) = \frac{e^x}{7} - \frac{7}{e^x}$

5121. a) $F(t) = \frac{2t\sqrt{t}}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} + C$

b) $F(x) = \frac{e^x}{7} + \frac{7}{e^x} + C$

5122 Ange samtliga primitiva funktioner till

a) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3}$

b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 12x + 9$

c) $f(x) = \frac{3\sqrt{x} + 5x}{\sqrt{x}}$

5122. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-3}$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{4}\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{8x^2} + C$

b) $f(x) = 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 12x + 9$

$F(x) = 8\sqrt{x} + 6x^2 + 9x + C$

c) $f(x) = 3 + 5\sqrt{x}$

$F(x) = 3x + \frac{10x\sqrt{x}}{3} + C$

5123 ö

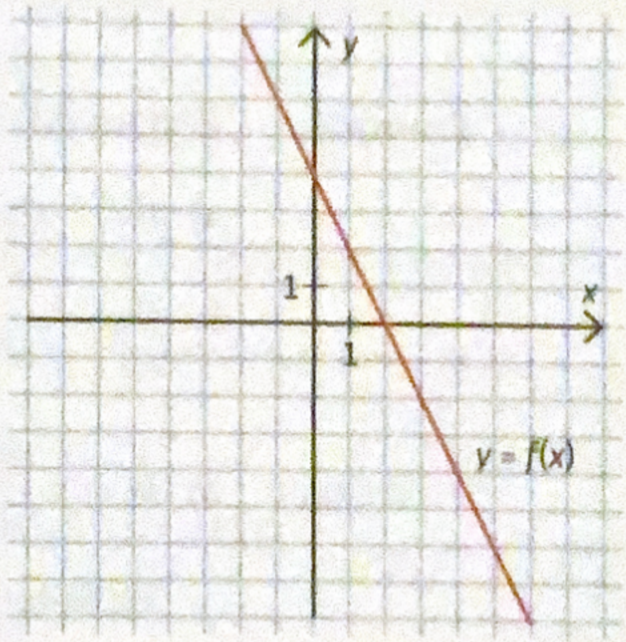
a) Ange en funktion f som är identisk med någon av sina primitiva funktioner.

b) Ange en annan funktion g som också är identisk med någon av sina primitiva funktioner.

5123. a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = 3e^x$

5124 I figuren är grafen till funktionen f ritad. Bestäm samtliga primitiva funktioner till f.



5124. $f(x) = -2x + 4$

$F(x) = -x^2 + 4x + C$

5125 Visa med hjälp av deriveringsreglerna att

$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$

är en primitiv funktion till $f(x) = a^x$.

5125. $F(x) = \frac{a^x}{\ln a} = \frac{(e^{\ln a})^x}{\ln a} = \frac{e^{x \cdot \ln a}}{\ln a}$

$f(x) = F'(x) = \ln a \cdot \frac{e^{x \cdot \ln a}}{\ln a} = e^{x \cdot \ln a} = a^x$

5126 Bestäm en funktion f vars andraderivata är

ö $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

5126. $f'(x) = 2\sqrt{x} + C_1$

$f(x) = \frac{4x\sqrt{x}}{3} + C_1 x + C_2$

ex. $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{4x\sqrt{x}}{3}$

5127 Funktionen F är en primitiv funktion till $f(x) = e^{2x} - 1$.

Har F någon lokal minimipunkt i intervallet $-1 < x < 1$? Motivera ditt svar.

5127.

$f(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \; ; \; 2x = \ln 1 = 0 \; ; \; x = 0$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ minimum.

Ja, F har lokalt minimum då $x = 0$.

5135 Ge exempel på två olika funktioner vars
ö primitiva funktioner antar värdet 0 för $x = 1$.

5135.

$f(x) = 2x - 1$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

5136 Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ till $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2x$ vars funktionskurva går genom punkten $(1, 9)$.

5136.

$F(x) = 6\sqrt{x} + x^2 + C$

$F(1) = 9 \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{1} + 1^2 + C = 9 \Rightarrow C = 9 - 1 - 6 = 2$

$F(x) = 6\sqrt{x} + x^2 + 2$

5137 Accelerationen $a(t)$ m/s^2 för ett flygplan kan under en tidsperiod beskrivas med $a(t) = 5t + 12$, där t är tiden i sekunder räknat från accelerationens början. Planets hastighet och position i början av tidsperioden är $v(0) = 82$ m/s respektive $s(0) = 620$ m. Bestäm funktionsuttrycket $s(t)$ som beskriver läget hos flygplanet vid tiden t.

5137. $v(t) = \frac{5t^2}{2} + 12t + C_1$

$s(t) = \frac{5t^3}{6} + 6t^2 + C_1x + C_2$

$v(0) = 82 \Rightarrow C_1 = 82$

$s(0) = 620 \Rightarrow C_2 = 620$ $\Rightarrow$

$$\underline{s(t) = \frac{5t^3}{6} + 6t^2 + 82t + 620}$$

5138 Bestäm $f(x)$ om

a) $f''(x) = 3x^2 - 4x$, $f(0) = 5$ och $f'(1) = 8$

b) $f''(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$, $f(1) = -3$ och $f'(9) = 20$

5138. a) $f'(x) = x^3 - 2x^2 + C_1$; $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C_1x + C_2$

$f'(1) = 8 \Rightarrow 1 - 2 + C_1 = 8$; $C_1 = 9$

$f(0) = 5 \Rightarrow C_2 = 5$

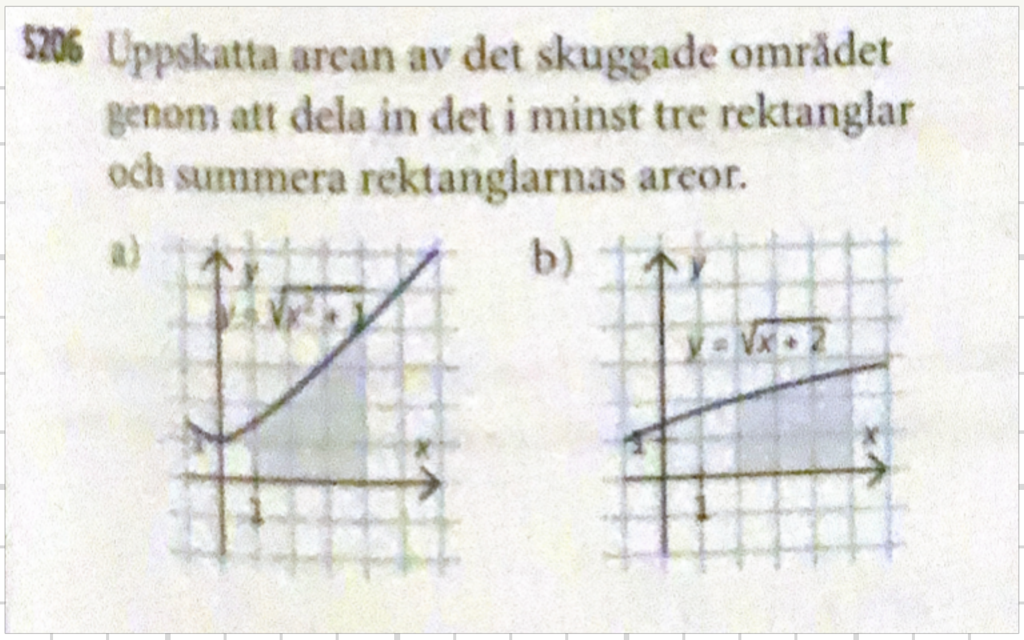
$\Rightarrow \underline{f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 9x + 5}$

b) $f'(x) = 6\sqrt{x} + C_1$; $f(x) = 4x\sqrt{x} + C_1x + C_2$

$f'(9) = 20 \Rightarrow 6 \cdot 3 + C_1 = 20$; $C_1 = 2$

$f(1) = -3 \Rightarrow 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + C_2 = -3$; $C_2 = -9$

$\Rightarrow \underline{f(x) = 4x\sqrt{x} + 2x - 9}$



5206 Uppskatta arean av det skuggade området genom att dela in det i minst tre rektanglar och summera rektanglarnas areor.

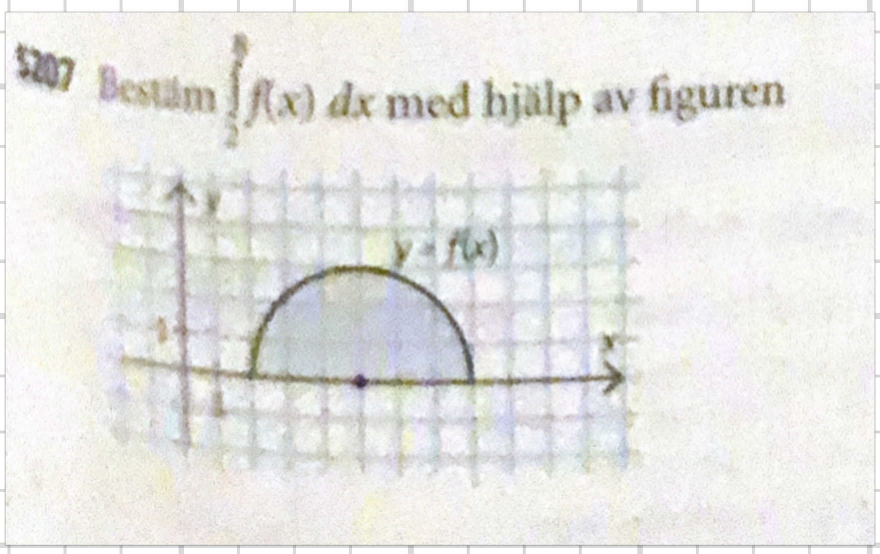
5206

a) $\int_1^4 \sqrt{x^2+1}\,dx \approx 1{,}8\cdot 1 + 2{,}5\cdot 1 + 3{,}5\cdot 1 = 7.8$ a.e

Geogebra ger: 8.15 a.e.

b) $\int_2^5 \sqrt{x+2}\,dx \approx 2{,}1\cdot 1 + 2{,}3\cdot 1 + 2{,}5\cdot 1 = 6.9$ a.e.

Geogebra ger: 7,01 a.e

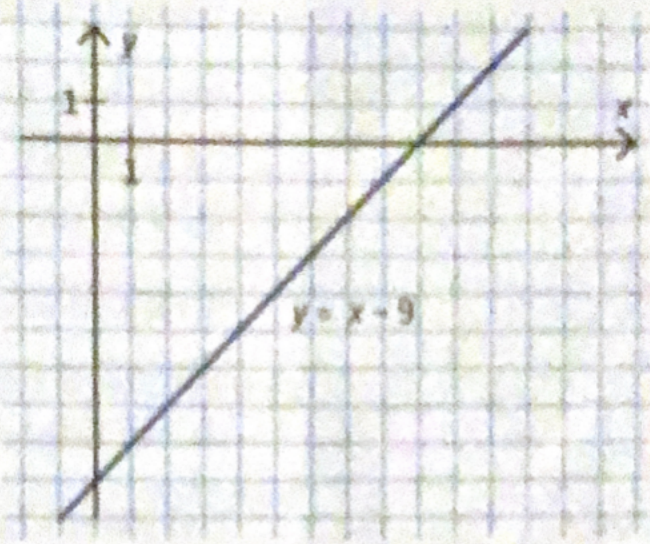


5207 Bestäm $\int_2^8 f(x)\,dx$ med hjälp av figuren

5207.

$$\int_2^8 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = 4.5\pi \approx 14.1 \text{ a.e}$$

5208 Linjen $y = x - 9$ bestämmer tillsammans med koordinataxlarna ett område i talplanet. Se figuren här nedanför.



a) Bestäm arean av det området.

b) Bestäm värdet av integralen $\int_0^9 (x-9)\,dx$ med hjälp av figuren.

c) Förklara skillnaden mellan att beräkna värdet av en integral och att beräkna arean av ett område med hjälp av en integral.

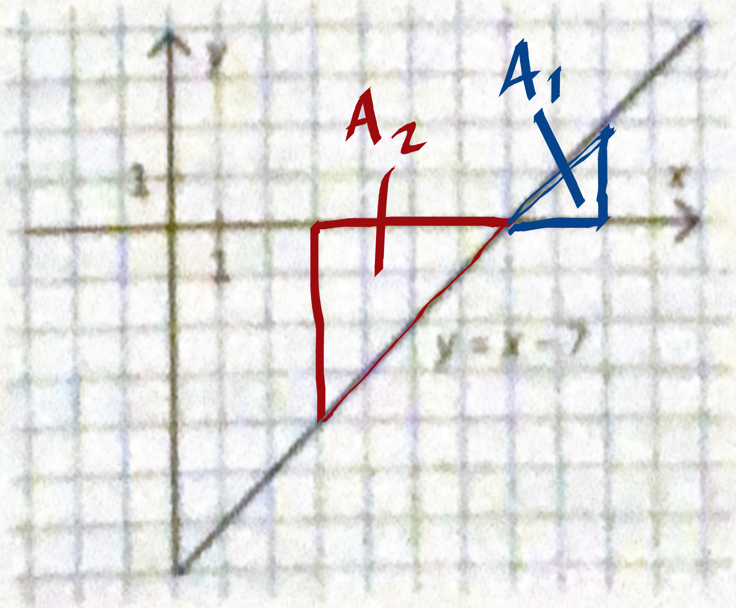
5208.

a) $A = -\int_0^9 (x-9)\,dx = -\left[\frac{x^2}{2} - 9x\right]_0^9 = -\left(\frac{81}{2} - 81\right) = \underline{40.5 \text{ a.e.}}$

b) $\int_0^9 (x-9)\,dx = \underline{-40.5}$

c) En integral kan bli negativ men aldrig dess area.

5209 Bestäm $\int_3^9 (x-7)\,dx$ med hjälp av figuren.



5209. Integralens värde blir $\underline{A_1 - A_2 = -6}$

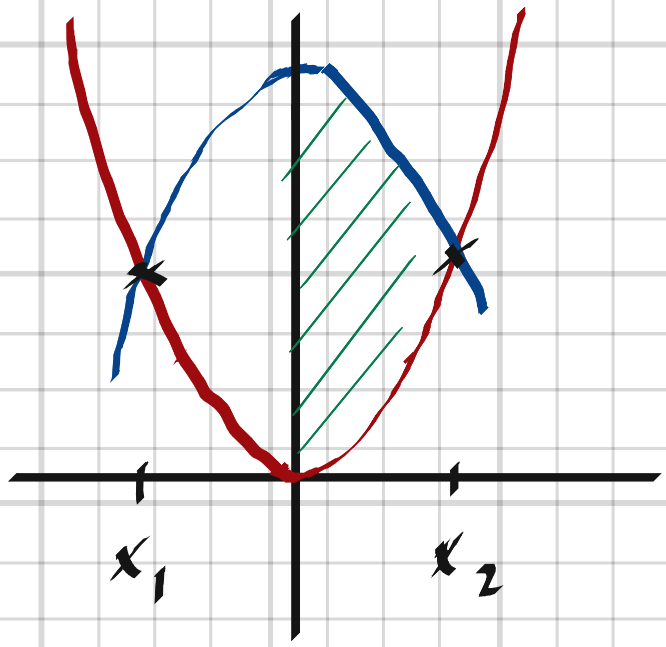
5210 Använd integraler för att skriva ett uttryck för arean som begränsas av y-axeln samt kurvorna.

a) $y = x^2$ och $y = 4 - x^2$

b) $y = e^x + x$ och $y = x + 2$

5210.

a)

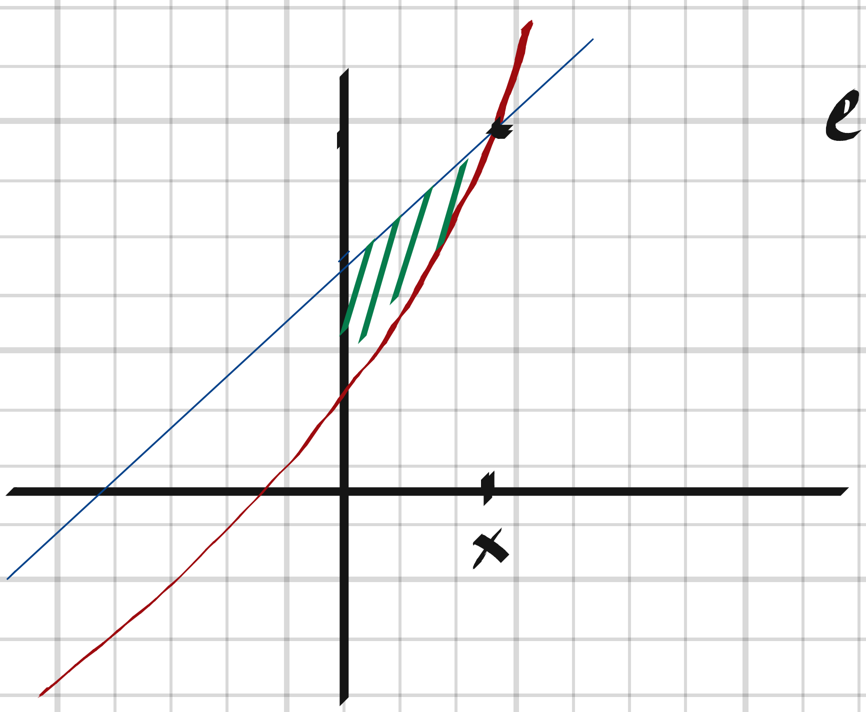


$x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow$

$x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)\,dx$$

b)



$e^x + x = x + 2 \Rightarrow$

$x = \ln 2$

$$A = \int_0^{\ln 2} (x + 2 - e^x - x)\,dx = \int_0^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx$$

5216 Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

a) $\int_0^1 (1-x)^2\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

5216.

a) $\int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)dx =$

$= \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1-1+\frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$

b) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 (x^{1/2} - x^{-1/2})dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - 2x^{1/2}\right]_1^2 =$

$= \frac{2\cdot 2^{3/2}}{3} - 2\cdot 2^{1/2} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 2 + 6}{3} =$

$= \underline{\frac{4-2\sqrt{2}}{3}}$

5217 Daniel påstår att om $f'(t)$ är kontinuerlig i $-1 \le t \le 2$, så är

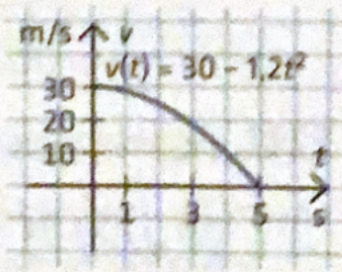
$$\int_{-1}^{2} f'(t)\,dt = f(2) - f(-1).$$

Har han rätt eller fel? Motivera ditt svar.

5217. Ja, Daniel har rätt.

Funktionen f är en primitiv funktion till f'.

5218 Grafen visar hastigheten v för en inbromsande bil, där t är tiden i sekunder räknat från inbromsningens början.



a) Vad bestämmer man genom att beräkna arean mellan grafen $v = v(t)$ och t-axeln?

b) Hur lång tid tar det för bilen att stanna?

c) Beräkna sträckan som bilen färdas under inbromsningen.

5218. a) Arean motsvarar bromssträckan.

b) 5 s

c) $$s = \int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 (30 - 1{,}2t^2)\,dt = \left[30t - 0{,}4t^3\right]_0^5 =$$

$$= 30 \cdot 5 - 0{,}4 \cdot 5^3 = 100 \text{ m}$$

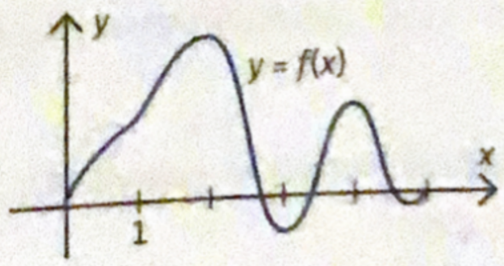
5219 Funktionen $f'(x)$ är derivatan av $f(x) = 2\sqrt{x} + 5$.

Bestäm $\int_1^9 f'(x)\,dx$.

5219.

$$\int_1^9 f'(x)\,dx = f(9) - f(1) = 2\cdot\sqrt{9} + 5 - 2\cdot\sqrt{1} - 5 = \underline{4}$$

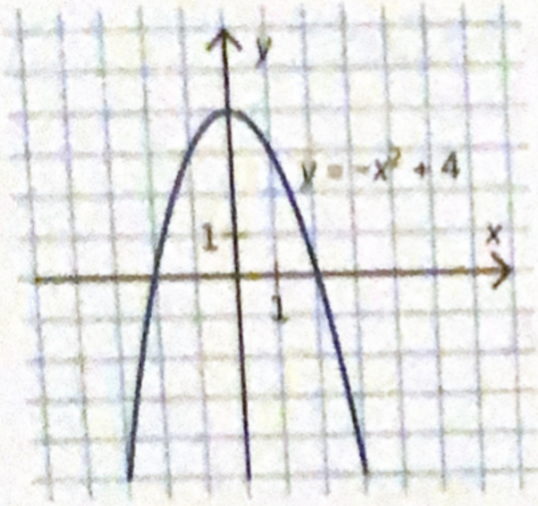
5220 Figuren visar grafen till funktionen f.



För vilket värde på a i intervallet $0 \le a \le 5$ antar $\int_0^a f(x)\,dx$ sitt största värde?

5220. Vid $\underline{a = 4,5}$

5221 Funktionen F är en primitiv funktion till f. Figuren visar kurvan $y = F(x)$.

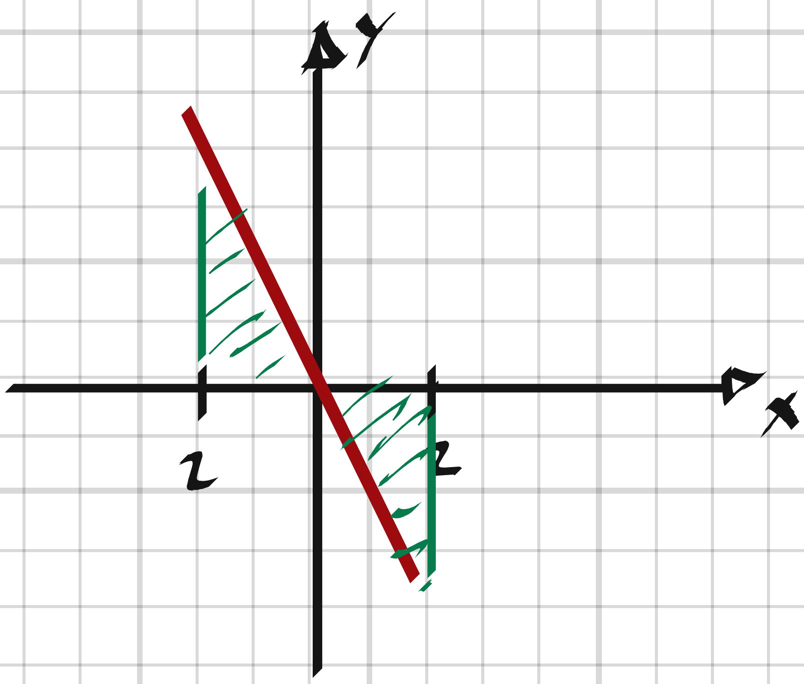


a) Beräkna $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

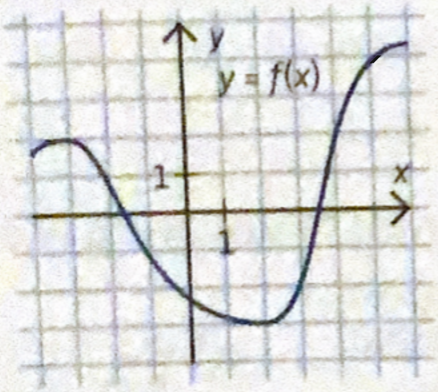
b) Skissa kurvan $y = f(x)$.

5221. a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(-2) = 0 - 0 = \underline{0}$

b)



5222 Bestäm integralen $\int_2^5 f'(x)\,dx$ med hjälp av figuren.



5222. $\int_2^5 f'(x)\,dx = f(5) - f(2) = 4 - (-3) = \underline{7}$

5223 Bestäm talet a i $f(x) = x^2 + ax + 3$ så att $\int_0^3 f(x)\,dx = f(0)$. Svara i exakt form.

5223. $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (x^2 + ax + 3)\,dx = 3 \Rightarrow$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 3x\right]_0^3 = 3$$

$$\frac{27}{3} + \frac{9a}{2} + 9 = 3$$

$$\frac{9}{3} + \frac{3a}{2} + 3 = 1$$

$$\frac{3a}{2} = -2 - \frac{9}{3}$$

$$\frac{3a}{2} = -\frac{15}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{a = -\frac{10}{3}}$$

5224 Bestäm ett tal a, så att $\int_0^3 f(x)\,dx = 4 \cdot f(a)$ om

a) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = e^{2x}$

Ange resultatet i exakt form.

5224. a) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(a) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \sqrt{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{3} \cdot \left[\sqrt{x}\right]_0^3 = 6$$

$$6 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \underline{a = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}}$$

b) $f(a) = e^{2a}$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^3 = \frac{1}{2}(e^6 - 1)$$

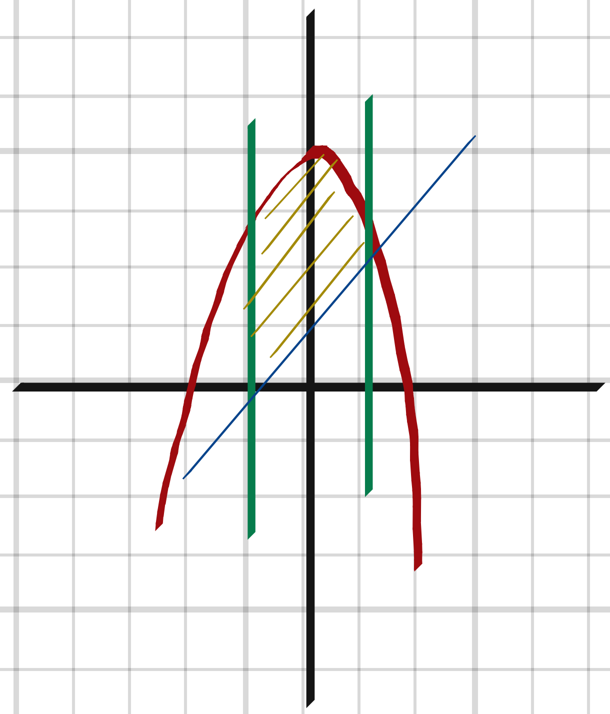
$$\frac{1}{2}(e^6 - 1) = 4e^{2a} \Rightarrow$$

$$\underline{a = \frac{\ln\left(\frac{e^6 - 1}{8}\right)}{2} = \ln\sqrt{\frac{(e^6 - 1)}{8}} = 1{,}96}$$

5225 Försök att beräkna $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ med din grafritande räknare. Förklara det resultat grafräknaren visar.

5225. Funktionen är diskontinuerlig och kan inte integreras över $x=0$.

5310 Beräkna arean av området som begränsas av linjen $y = x + 1$, kurvan $y = 4 - x^2$ samt de räta linjerna $x = -1$ och $x = 1$.



5310.

$$A = \int_{-1}^{1} (4-x^2)\,dx - \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 - \left(-4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) =$$

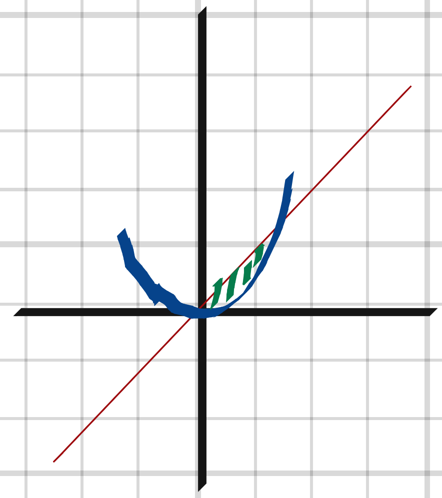
$$= 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \text{ a.e.}$$

5311 Beräkna arean av området som begränsas av kurvorna

a) $y = x$ och $y = x^2$

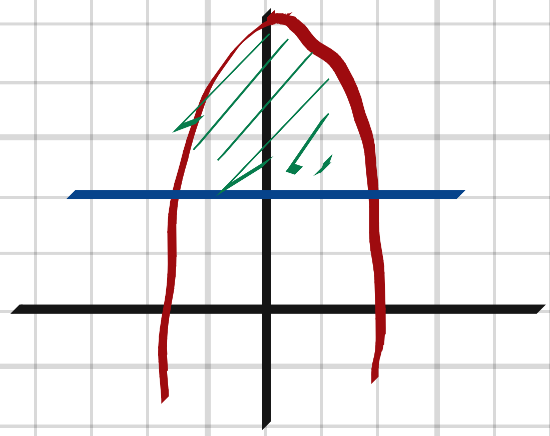
b) $y = 5 - x^2$ och $y = 2$

c) $y = 1 + 3x - x^2$ och $y = x^2 - 4$



5311. a) $x = x^2 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 1$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{6} \text{ a.e}}$$



b) $5 - x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (5 - x^2 - 2)\,dx = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - (-3\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \underline{4\sqrt{3} \text{ a.e}}$$

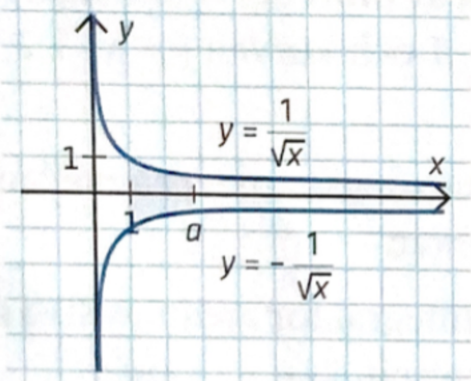
c) $1 + 3x - x^2 = x^2 - 4$; $2x^2 - 3x - 5 = 0$

$2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) = 0$

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{40}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}, \quad x_1 = -1, \; x_2 = 2{,}5$$

$$A = \int_{-1}^{2{,}5} (5 + 3x - 2x^2)\,dx = \left[5x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{2{,}5} = \underline{14{,}3 \text{ a.e.}}$$

5312 Bestäm talet a exakt, så att arean av det skuggade området blir 4 areaenheter.



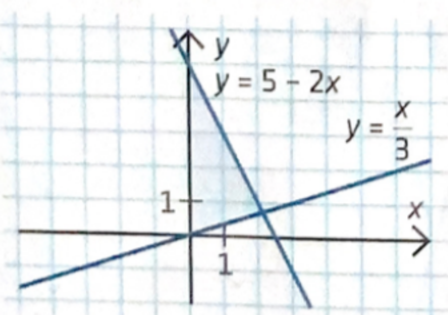
5312.

$$\int_1^a \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 4$$

$$\left[4\sqrt{x}\right]_1^a = 4$$

$$4\sqrt{a} - 4 = 4 \Rightarrow \underline{a = 4}$$

5313 Hur stor andel av triangeln som begränsas av linjen $y = 5 - 2x$ och de positiva axlarna är skuggad i figuren?



Skärningspunkter:

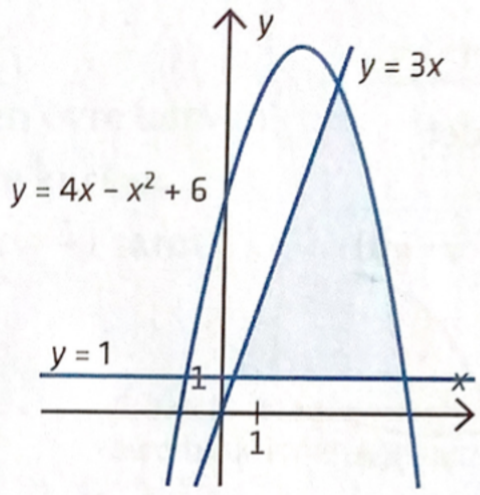
$$5 - 2x = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

$$5 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

5313.

$$\frac{\int_0^{15/7} \left(5 - 2x - \frac{x}{3}\right) dx}{5 \cdot 5/2/2} = \frac{\int_0^{15/7} \left(5 - \frac{7x}{3}\right) dx}{25/4} = \underline{0{,}86 = 86\,\%}$$

5314 Beräkna arean av de skuggade området i figuren.



5314. Första skärningspunkten:

$$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Andra skärningspunkten:

$$4x - x^2 + 6 = 3x \quad ; \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, (x_2 = -2)$$

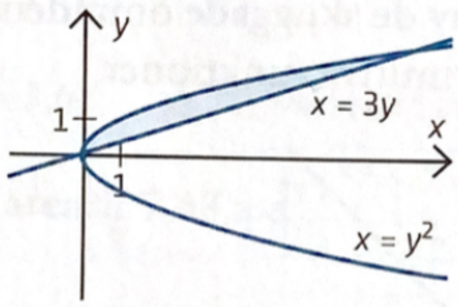
Tredje skärningspunkten:

$$4x - x^2 + 6 = 1 \quad ; \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0 \Rightarrow (x_1 = -1), \ x_2 = 5$$

$$A = \int_{1/3}^{3} 3x\,dx - \int_{1/3}^{3} dx + \int_{3}^{5} (4x - x^2 + 6)\,dx - \int_{3}^{5} dx = \underline{20 \text{ a.e.}}$$

5315 Teckna en integral för att beräkna arean av det skuggade området.



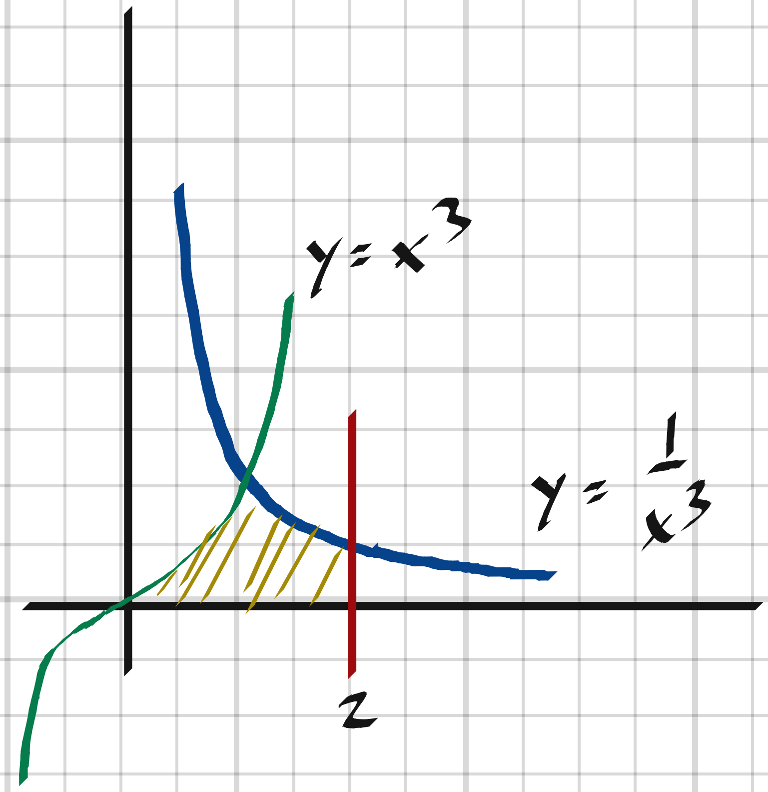
5315. $3y = y^2 \Rightarrow y = 3$

$$A = \int_0^3 (3y - y^2)\,dy = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = 4{,}5 \text{ a.e}$$

5316 Ett område begränsas av kurvorna $y = x^3$, $y = \frac{1}{x^3}$ den räta linjen $x = 2$ samt x-axeln.

a) Teckna en integral som beskriver arean av området.

b) Beräkna arean av området.



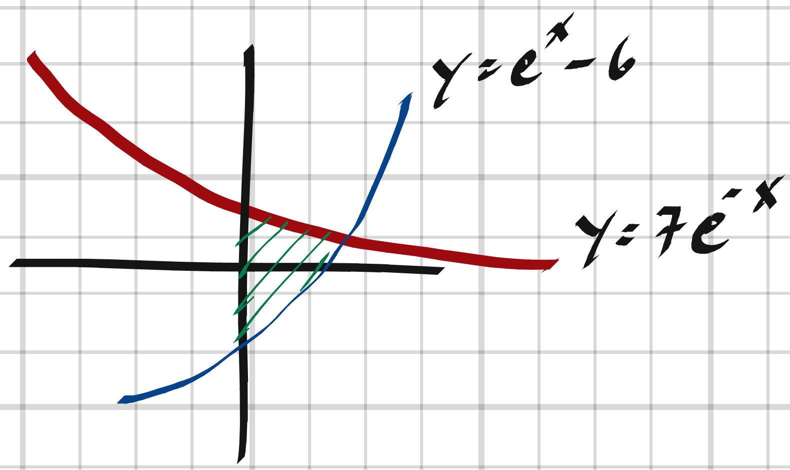
Skärningspunkt:

$$x^3 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow x = 1$$

$$A = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + -\frac{1}{2\cdot 2^2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{2-1+4}{8} = \underline{\frac{5}{8}\text{ a.e}}$$

5317 Kurvan $y = 7e^{-x}$ begränsar tillsammans med y-axeln och kurvan $y = e^x - 6$ ett område. Bestäm områdets area. Svara i exakt form.



5317. Skärningspunkt:

$$7e^{-x} = e^x - 6$$

$$7 = e^{2x} - 6e^x$$

$$e^x = t \Rightarrow 7 = t^2 - 6t$$

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$(t+1)(t-7) = 0$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 7$$

$e^x > 0 \Rightarrow t_1$ falsk lösning $\Rightarrow e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7$

$$A = \int_0^{\ln 7} (7e^{-x} - e^x + 6)\,dx = \left[-7e^{-x} - e^x + 6x\right]_0^{\ln 7} =$$

$$= -1 - 7 + 6\cdot\ln 7 - (-7 - 1 + 0) = \underline{6\cdot\ln 7 \text{ a.e}}$$

5322 Effekten P watt hos ett värmeelement kan beskrivas med $P(t) = 1\,200 + 4t - 1{,}5t^2$ där t är tiden i timmar. Energiförbrukningen E Wh mellan tidpunkterna t_1 och t_2 bestäms av integralen

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

Beräkna energiförbrukningen under de första 3 timmarna efter att elementet kopplades på.

5322. $E = \int_0^3 P(t)\,dt = \left[1200t + 2t^2 - 0{,}5t^3\right]_0^3 =$

$= 1200 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 0.5 \cdot 3^3 = \underline{3600 \text{ Wh}}$

5323 Om $K(x) = 550x - 0{,}5x^2$ beskriver hur kostnaden för ett företag förändras med avseende på antalet sålda produkter, så beskriver $K'(x)$ företagets marginalkostnad, dvs. kostnaden för att tillverka ytterligare en enhet. Beräkna och tolka följande värden

a) $K'(500)$ b) $K(501) - K(500)$

c) $\int_{200}^{400} K'(x)\,dx$ d) $K(400) - K(200)$

5323. $K'(x) = 550 - x$

a) $K'(500) = 550 - 500 = \underline{50}$

Då 500 enheter sålts är tillverkningskostnaden 50/enhet

b) $K(501) - K(500) = 550(501-500) - 0{,}5(501^2 - 500^2) =$

$= \underline{49{,}5}$

Marginalkostnaden vid 500 enheter (som i a)

c) $\int_{200}^{400} K'(x)dx = K(400) - K(200) = 550(400-200) - 0{,}5(400^2 - 200^2) =$

$= \underline{50\,000}$

Skillnaden i kostnad mellan att tillverka 400 o 200

d) Samma som c.

5324 Beskriv med ord vad man räknar ut med följande integraler:

a) $\int_{3}^{7} a(t)\,dt$, där $a(t)$ m/s^2 är en mopeds acceleration t sekunder efter starten.

b) $\int_{0}^{12} f(t)\,dt$, där $f(t)$ bakterier/sekund är hastigheten som en bakteriekultur växer med t sekunder efter starten.

c) $\int_{13}^{15} f(t)\,dt$, där $f(t)$ m^3/h är vattenflödet i en vattenpump t timmar efter midnatt.

5324. a) Hastighetsförändringen mellan 3 och 7 s.

b) Antal bakterier som bildas under 12 s.

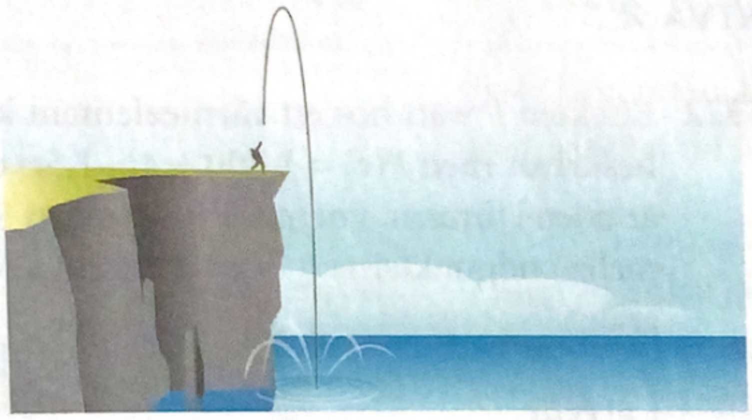
c) Vattenmängden genom pumpen mellan 13 och 15 h.

5325 Vattenflödet $f(t)$ m^3/min i en älv ges av $f(t) = 700 + 12t - 0{,}5t^2$. Bestäm vattenmängden V mellan tidpunkterna $t_1 = 10$ minuter och $t_2 = 12$ minuter.

5325.

$$\int_{10}^{12} f(t)\,dt = \left[700t + 6t^2 - \frac{0.5}{3}t^3\right]_{10}^{12} = 1500 \text{ m}^3$$

5326 Från en 19 meter hög klippa kastas en sten rakt upp i luften med en hastighet av 8 m/s enligt figuren. Vi bortser från luftmotståndet och räknar därför med en acceleration på $g = 9{,}8$ m/s^2 vid fritt fall.



a) Bestäm ett funktionsuttryck $h(t)$, där t är tiden i sekunder, som beskriver stenens höjd över vattenytan.

b) Hur lång sträcka faller stenen från sin högsta punkt till att den når vattenytan?

5326.

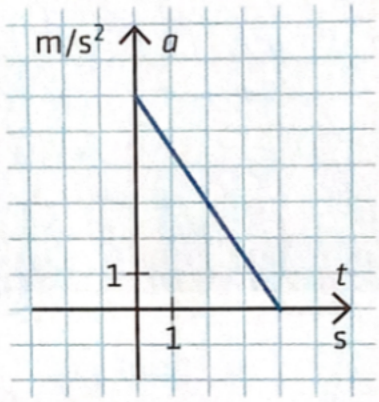
a) $h(t) = 19 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

b) $h'(t) = v_0 - g t$

$h'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{8}{9{,}8} = 0{,}8163 \text{ s}$

$h(0{,}8163) = 19 + 8 \cdot 0{,}8163 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}8163^2 = 22 \text{ m}$

5327 Grafen visar accelerationen a m/s^2 för en skateboardåkare under en tidsperiod. Vid $t = 1$ s befinner hon sig 5 m från startpunkten och hennes hastighet är då 6 m/s. Hur långt har hon färdats mellan $t_1 = 2$ s och $t_2 = 4$ s?



5327. $a(t) = 6 - \frac{3}{2}t$

$V(t) = A(t) = 6t - \frac{3t^2}{4} + C_1$

$V(1) = 6 \Rightarrow 6 = 6 - \frac{3}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{4}$

$S(t) = V(t) = 3t^2 - \frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4} + C_2$

$S(1) = 5 \Rightarrow 5 = 3 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$

$s = s(4) - s(2) = 3 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{4} + \frac{3 \cdot 4}{4} - 3 \cdot 2^2 + \frac{2^3}{4} - \frac{3 \cdot 2}{4} = \underline{23{,}5 \text{ m}}$

5328 En tennisboll släpps från Eiffeltornet på 300 meters höjd. Vi bortser från luftmotståndet och antar att bollens acceleration är 9,81 m/s^2.

a) Bestäm det funktionsuttryck $h(t)$ som beskriver bollens höjd över marken, där t är tiden i sekunder.

b) Efter hur lång tid tar bollen mark?

c) Bestäm bollens hastighet v i ögonblicket när den tar mark.

d) Bestäm funktionsuttrycket $h(t)$ om bollen kastas rakt ned med en hastighet av $v = 6$ m/s.

5328. a) $\underline{h(t) = 300 - \frac{1}{2}gt^2}$

b) $h(t) = 0 \Rightarrow t = \left(\frac{2 \cdot 300}{9.8}\right)^{1/2} = \underline{7.82 \text{ s}}$

c) $v(t) = h'(t) = -gt = -9.8 \cdot 7.82 = \underline{77 \text{ m/s}}$

d) $h(t) = \underline{300 - 6t - \frac{1}{2}gt^2}$