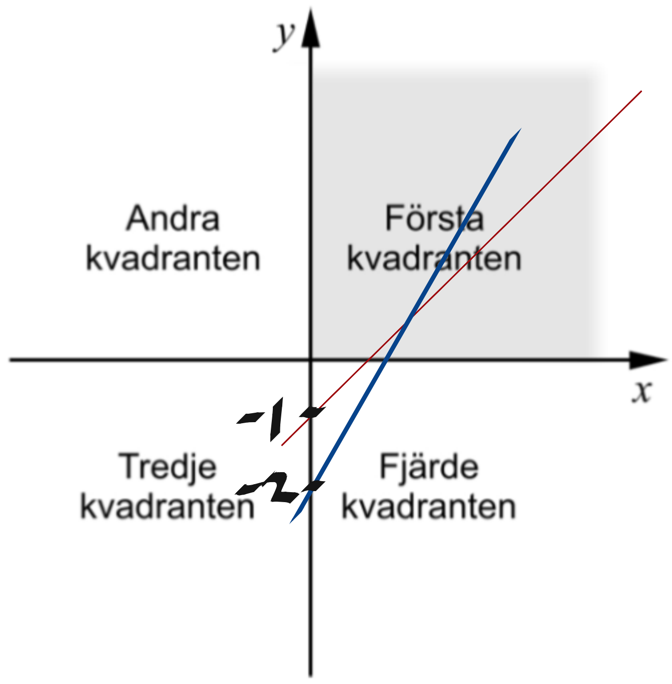
23. De två räta linjerna $y = ax - 2$ och $y = x - 1$, där a är en konstant, skär varandra i första kvadranten.



Undersök vilka värden som är möjliga för konstanten a. (0/1/2)

23.

$$ax - 2 = x - 1 \quad , \quad x \geq 0 \,,\, y \geq 0$$

$$x(a-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{a-1}$$

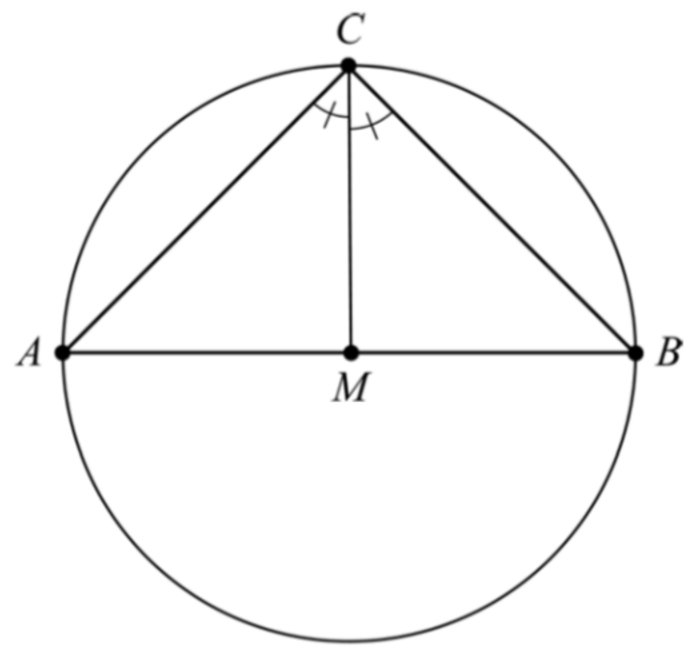
$$x > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$y = \frac{1}{a-1} - 1 = \frac{1-a+1}{a-1} = \frac{2-a}{a-1}$$

$$y > 0 \Rightarrow a < 2$$

Svar: $1 < a < 2$

24. Figuren visar en triangel *ABC* som är inskriven i en cirkel. Sidan *AB* går genom cirkelns medelpunkt *M*. Vinklarna *ACM* och *BCM* är lika stora.



Visa att sträckan *CM* är vinkelrät mot sträckan *AB*. (1/1/2)

24. Thales sats ger att $\angle C = 90^\circ$, dvs

$\angle ACM = \angle BCM = 45^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} AM = BM = CR = \text{Cirkelns radie} \\ \Delta ACM \text{ och } \Delta CMB \text{ är likbenta} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\angle CAM = \angle CBM = 45^\circ$

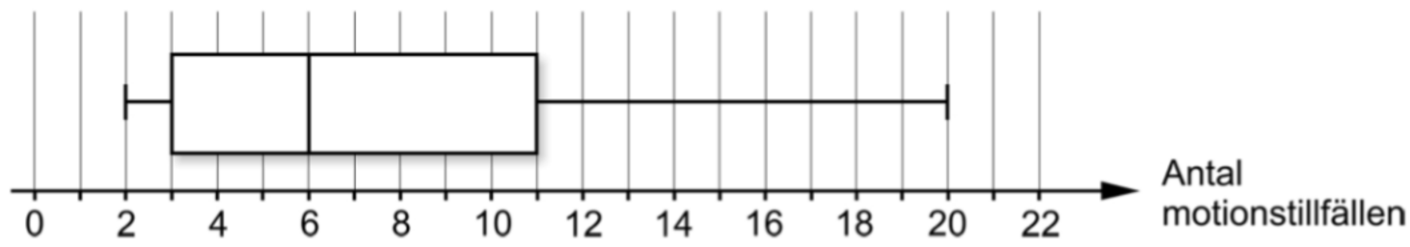
Vinkelsumman $= 180^\circ$ i varje triangel $\Rightarrow$

$\angle AMC = \angle CMB = 90^\circ$

25. I en statistisk undersökning fick 11 personer svara på frågan:

”Hur många gånger har du motionerat den senaste månaden?”

Resultatet av undersökningen sammanställdes i ett lådagram.



Mellan vilka värden kan medelvärdet av antalet motionstillfällen ligga? (0/1/3)

25.

En siffra = x

Medianen = 6
Minvärde = 2
Maxvärde = 20
Undre kvartil = 3 (=median för undre halvan)
Övre kvartil = 11 (=median för övre halvan)

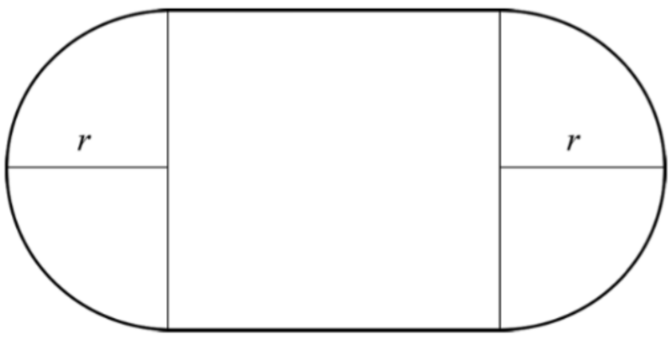
Fördelning: 2 x 3 2x 6 2x 11 x 20

$S_{min} = 2+2+3+3+3+6+6+6+11+11+20 = 73$

$S_{max} = 2+3+3+6+6+6+11+11+11+20+20 = 99$

Svar: $\frac{73}{11} \leq \bar{x} \leq \frac{99}{11}$ $(6,6 \leq \bar{x} \leq 9)$

23. Figurerna nedan visar en travbana. Banan där hästarna springer är 800 m lång. Området innanför banan har formen av en rektangel och två halvcirklar och har arean 43 000 m^2.



Bestäm halvcirklarnas radie r. (0/0/4)

23.

$$r \cdot \begin{cases} 2x + 2\pi r = 800 & (1) \\ 2rx + \pi \cdot r^2 = 43000 & (2) \end{cases}$$

$$-$$

$$2\pi r^2 - \pi r^2 = 800r - 43000$$

$$r^2 - \frac{800}{\pi} r + \frac{43000}{\pi} = 0$$

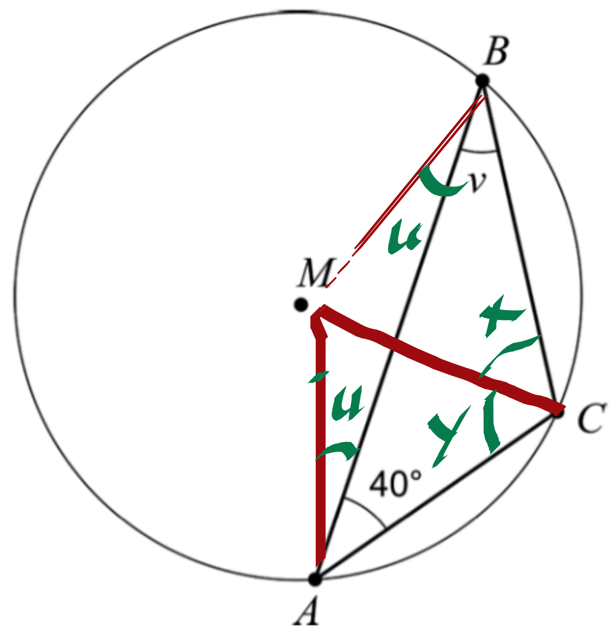
$$r = \frac{400}{\pi} \pm \frac{\sqrt{160000 - 43000\pi}}{\pi} = 127{,}3 \pm 50{,}2$$

$$r_1 = 178, \quad r_2 = 77$$

r_1 falsk lösning då insättning i (2) $\Rightarrow x < 0$

Svar: $r = 77$ m

24. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel med medelpunkten M. Sträckan AC är lika lång som cirkelns radie. Vinkeln $BAC = 40°$, se figur.



Bestäm vinkeln v. (0/0/2)

ΔACM liksidig $\Rightarrow$ $u = 20°$, $y = 60°$

ΔBCM likbent $\Rightarrow$ $x = u + v = 20° + v$

$40° + x + y + v = 180°$

$40° + 20° + v + 60° + v = 180°$

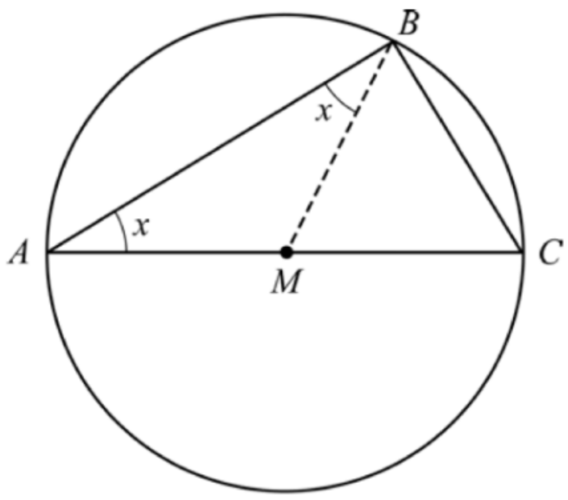
$2v = 60°$

Svar: $v = 30°$

13. Thales från Miletos var en grekisk matematiker som levde för 2600 år sedan. Han formulerade en sats med följande innebörd:

Varje triangel som är inskriven i en cirkel har en rät vinkel om en av triangelns sidor är diameter i cirkeln.

Triangeln ABC är inskriven i en cirkel på ett sådant sätt. Sidan AC är en diameter i cirkeln. Punkten M är mittpunkt på sträckan AC. I figuren är även sträckan BM inritad.

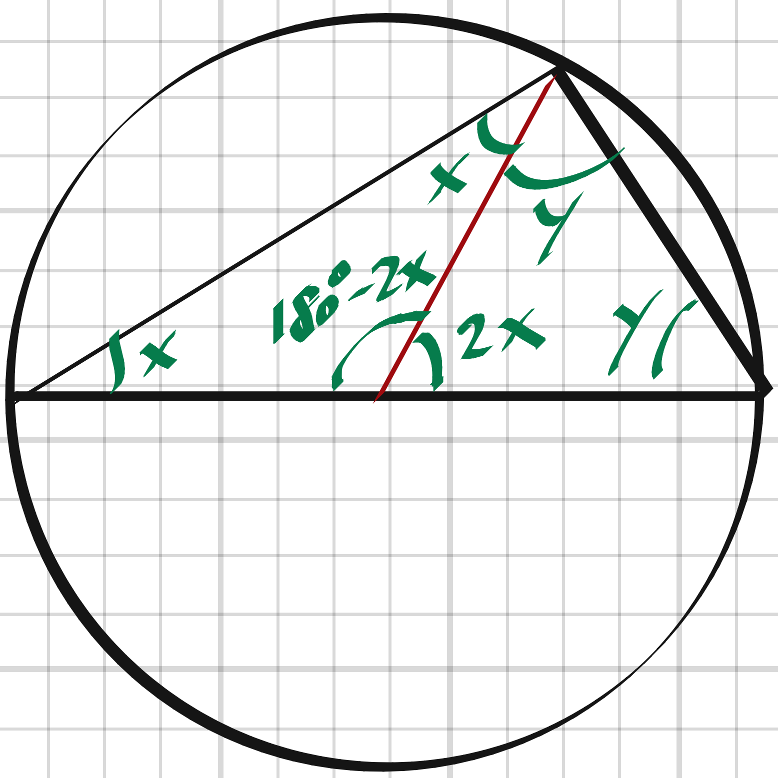


a) Förklara varför de två vinklarna betecknade med x är lika stora. (1/1/0)

b) Visa, utan att använda randvinkelsatsen, att Thales sats är korrekt. (0/2/2)

13. a) ΔABM likbent med 2 sidor = R

b)



$2x + 2y = 180°$

$x + y = 90°$

14. I ekvationen $x^2-(a-1)^2=0$ är a en konstant.
Lös ekvationen och svara på så enkel form som möjligt. (0/0/2)

14.

$$x^2=(a-1)^2$$

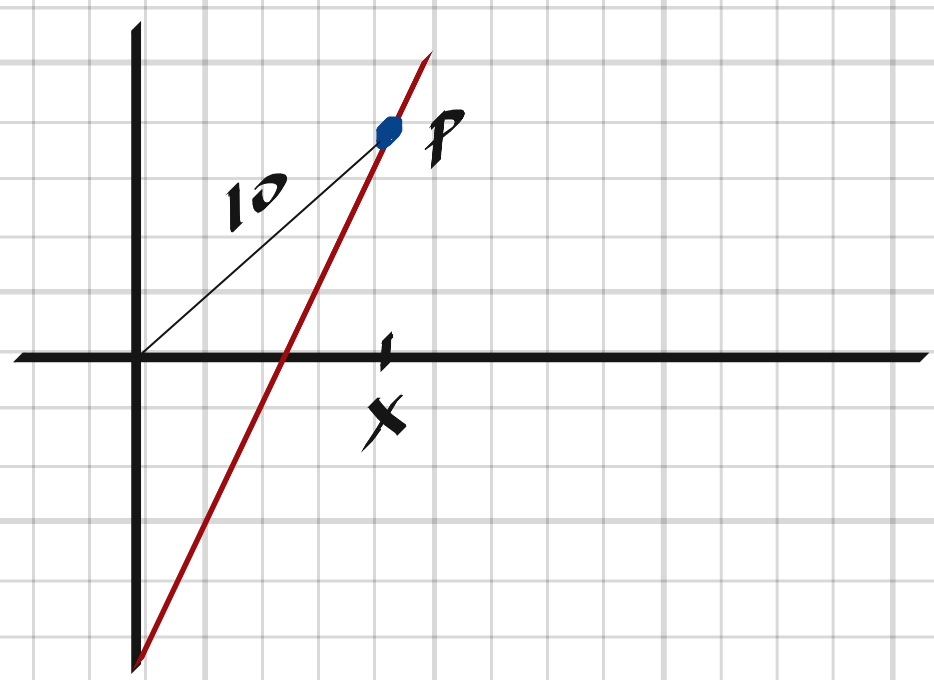
$$x=\pm(a-1)$$

Svar: $x_1=a-1$, $x_2=1-a$

---

15. På linjen $y=2x-5$ ligger en punkt P i första kvadranten. Avståndet mellan punkten P och origo är 10 längdenheter. Bestäm x-koordinaten för punkten P. Svara exakt. (0/0/4)

15.



$$x^2+y^2=10^2$$

$$x^2+(2x-5)^2=100$$

$$x^2+4x^2-20x+25=100$$

$$x^2-4x=15$$

Svar: $x=2\pm\sqrt{4+15}=2+\sqrt{19}$

21. Alice och Moa diskuterar medelvärde och median.

Alice påstår:
"Medelvärdet av tre på varandra följande heltal är alltid lika med talens median."
Moa svarar:
"Nej, det gäller inte alltid."

Vem har rätt, Alice eller Moa? Motivera ditt svar. (1/1/1)

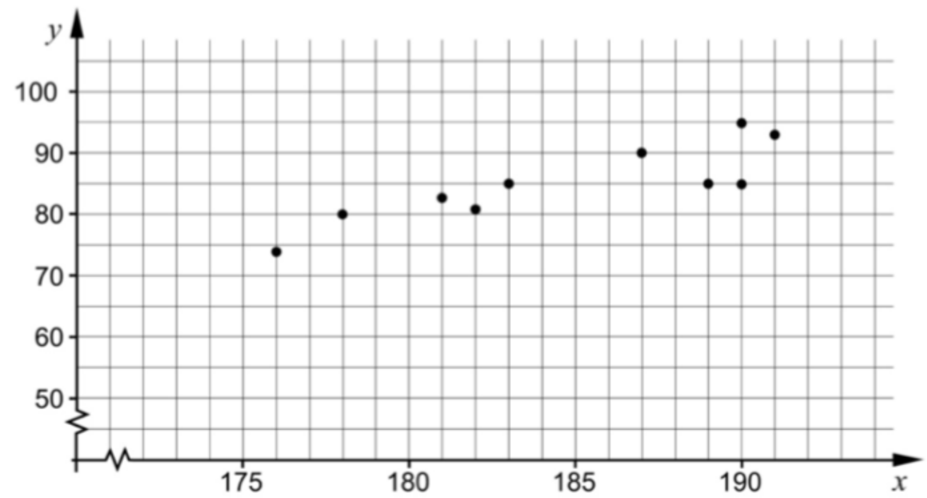
21. $x+(x+1)+(x+2) = 3x+3$

$$\bar{x} = \frac{3x+3}{3} = x+1$$

Svar: Ja, det gäller alltid

22. I tabellen och diagrammet visas längd och vikt för tio män från samma arbetsplats.

Namn	Längd (cm)	Vikt (kg)
Anders	187	90
Leif	183	85
Göte	190	85
Bengt	189	85
Per	190	95
Stig	191	93
Lennart	176	74
Torgny	182	81
Bertil	181	83
Ingemar	178	80



a) Bestäm ett linjärt samband mellan vikten y kg och längden x cm. (0/1/0)

b) Utgå från det linjära samband du bestämde i a). Tolka vad riktningskoefficienten betyder i detta sammanhang. (0/0/2)

22. a) Geogebra: FitPoly(L1,1) $\Rightarrow$

$$\underline{y = 0.99x - 98.3}$$

b) k = ökningen i kg per längdenhet

I ovanstående exempel motsvarar detta ~1 kg ökning per kg vikt.

23. Ett tunt snöre är 24 m långt. Snöret kan formas till olika geometriska figurer.

Figur 1

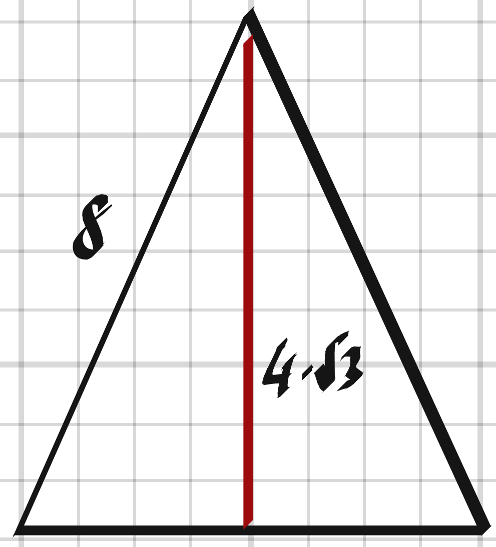
Figur 2

a) Hela snöret formas till en liksidig triangel, se Figur 1.
Bestäm triangelns area. (0/3/0)

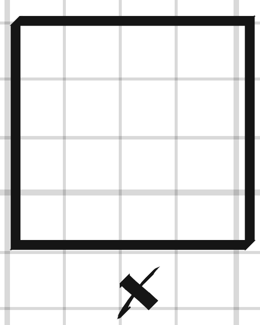
b) Snöret delas sedan i två olika långa delar. Av varje del formas en kvadrat, se Figur 2.
Undersök om det är möjligt att kvadraterna tillsammans får arean 17 m^2. (0/0/4)

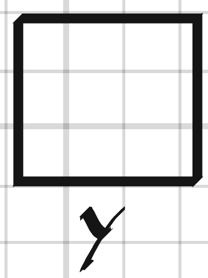
23. a)

$$A = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \underline{16 \cdot \sqrt{3} \text{ a.e}}$$



b)





$$\begin{cases} 4x + 4y = 24 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

$$x + y = 6 \Rightarrow x^2 + (6-x)^2 = 17$$

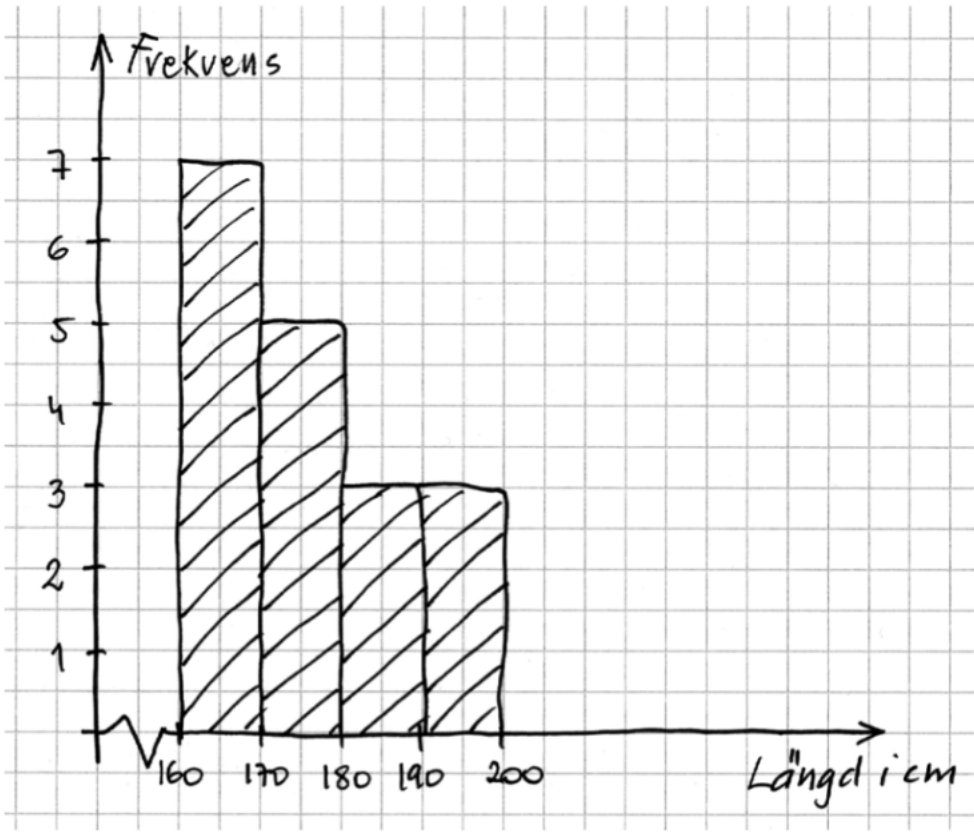
$$2x^2 - 12x + 36 = 17$$

$$x^2 - 6x + 9{,}5 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 9{,}5}$$ (saknar reella rötter)

Svar: Nej, det är inte möjligt

23. Emelie gör en statistisk undersökning om sina 18 klasskamraters längd. Hon beräknar sedan medelvärdet av längderna och får det till 175,5 cm.
Emelie presenterar sina resultat i ett histogram. Se nedan.



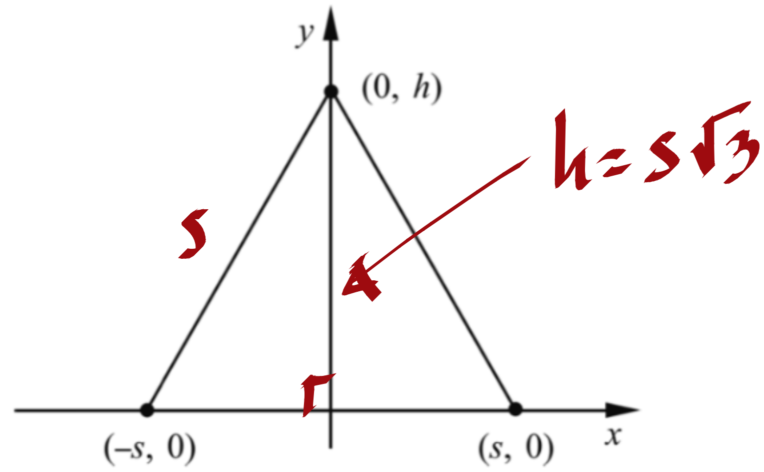
Emelie visar histogrammet för Anton. Han beräknar medelvärdet med hjälp av histogrammet och får då medelvärdet till 176,1 cm. Både Emelie och Anton räknar rätt men får olika medelvärden.

Förklara varför medelvärdet blir olika med de olika metoderna. (0/1/1)

23.

Anton räknar bara med 4 olika längder med olika frekvens. Emelies uträkning blir något mer korrekt då hon använder alla längderna.

24. En liksidig triangel är ritad i ett koordinatsystem. Den har sina hörn i punkterna $(0,\ h), (-s,\ 0)$ och $(s,\ 0)$



Bestäm den liksidiga triangelns area A uttryckt endast i s. (0/0/3)

24.

Liksidig triangel $\Rightarrow h = s \cdot \sqrt{3}$

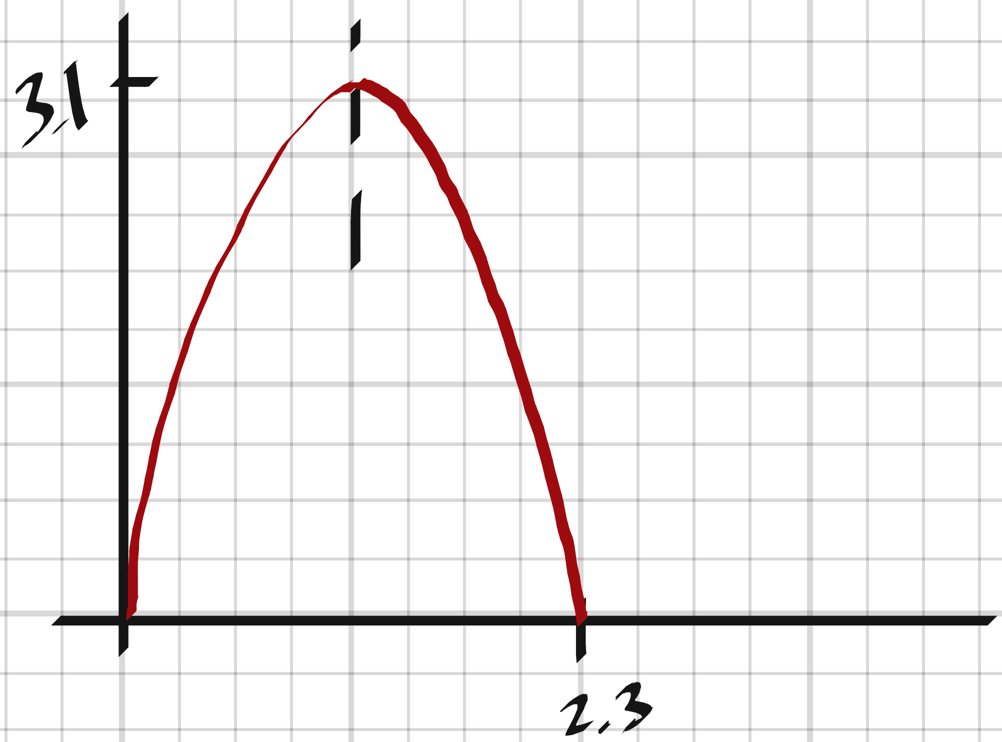
Svar: $A = \frac{2s \cdot s\sqrt{3}}{2} = s^2 \cdot \sqrt{3}$

25. Bilden visar en fontän i Sydkoreas huvudstad Seoul.

Avståndet längs vattenytan från en stråles start till dess att strålen träffar vattnet är ungefär 2,3 m. Strålens högsta höjd över vattenytan är ungefär 3,1 m. Anta att strålens bana har samma form som grafen till en andragradsfunktion.

Bestäm en funktion som beskriver strålens bana. (0/0/3)

25.



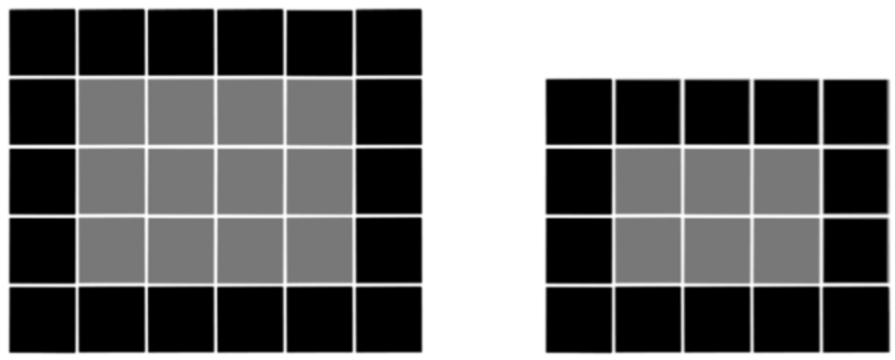
$y(x) = kx(x-2{,}3)\ ,\ y(1{,}15) = 3{,}1 \Rightarrow$

$3{,}1 = k \cdot 1{,}15(1{,}15-2{,}3) \Rightarrow k = -2{,}34$

Svar: $y = -2{,}34x^2 + 5{,}39x$

22. En plattläggare gör rektangulära uteplatser genom att lägga kvadratiska trädgårdsplattor enligt ett visst mönster. Han använder grå och svarta plattor, alla med samma storlek.

I figuren nedan visas uteplats A och uteplats B som plattläggaren lagt. För uteplats A är den totala kostnaden för plattorna 1422 kr. För uteplats B är den totala kostnaden för plattorna 1000 kr.



Uteplats A   Uteplats B

a) Beräkna priset för en grå respektive en svart platta. (0/3/0)

22 a)

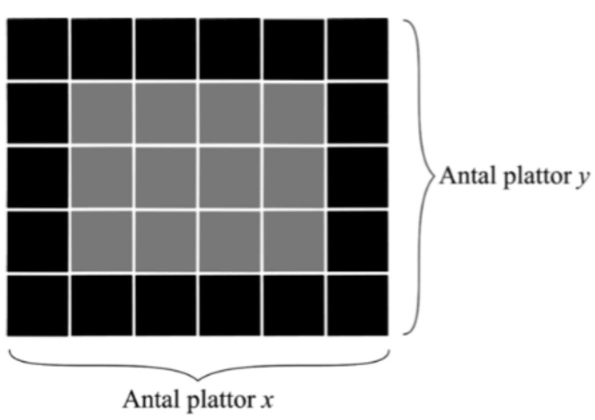
$$\begin{cases} 18s + 12g = 1422 \\ 14s + 6g = 1000 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$-10s = -578$$

$$\Rightarrow \underline{s = 57{,}80 \text{ kr}}$$

$$g = \frac{1000 - 14 \cdot 57{,}80}{6} \Rightarrow \underline{g = 31{,}80 \text{ kr}}$$

Plattläggaren vill snabbt kunna göra kostnadsberäkningar för plattor vid beställning av uteplatser. Han betecknar antalet plattor utmed uteplatsens ena sida med x och antalet plattor utmed uteplatsens andra sida med y, se figur nedan.



b) Visa att den totala kostnaden för plattorna kan bestämmas med formeln $K_{tot} = 52x + 52y + 31{,}80xy - 104$ för alla rektangulära uteplatser som är möjliga att lägga. Uteplatserna innehåller *alltid* både svarta och grå plattor där de svarta plattorna ligger som en ram. (0/0/2)

22 b) Antal grå plattor $= (x-2)(y-2)$

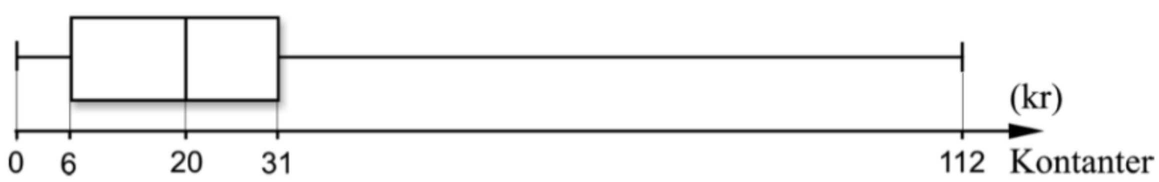
Antal svarta plattor $= xy - (x-2)(y-2)$

$$K_{tot} = 31.8(x-2)(y-2) + 57.8(xy - (x-2)(y-2)) =$$

$$31.8 \cdot (xy - 2x - 2y + 4) + 57.8(xy - xy + 2x + 2y - 4) =$$

$$= 52x + 52y + 31.8xy - 104$$

23. Demy och Oskar diskuterar hur mycket pengar i kontanter ungdomar i deras egen ålder har med sig till skolan. De bestämmer sig för att göra en undersökning i en klass. Demy och Oskar lämnar ut en lapp med frågan ”Hur mycket pengar har du med dig idag?” och får svar från alla 19 eleverna i klassen. Resultatet redovisar de i lådagrammet nedan.



Undersök i vilket/vilka intervall A-D medelvärdet M kan ligga. Motivera.

A. $0 \le M < 6$
B. $6 \le M < 20$
C. $20 \le M < 31$
D. $31 \le M \le 112$ (0/2/1)

23. x = antalet siffror

0 3x 6 4x 20 4x 31 3x 112

$$S_{min} = 0 + 3\cdot 0 + 6 + 4\cdot 6 + 20 + 4\cdot 20 + 31 + 3\cdot 31 + 112 = 366$$

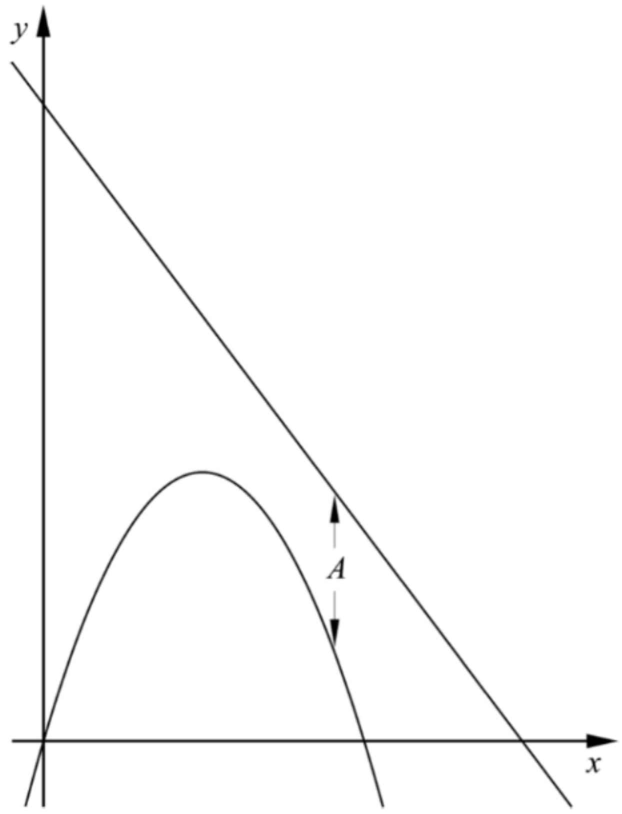
$$S_{max} = 0 + 3\cdot 6 + 6 + 4\cdot 20 + 20 + 4\cdot 31 + 31 + 3\cdot 112 + 112 = 727$$

$$\bar{x}_{min} = \frac{S_{min}}{19} = 19,3 \qquad \bar{x}_{max} = \frac{S_{max}}{19} = 38,3$$

$$19,3 < \bar{x} < 38,3$$

Svar: B, C, D

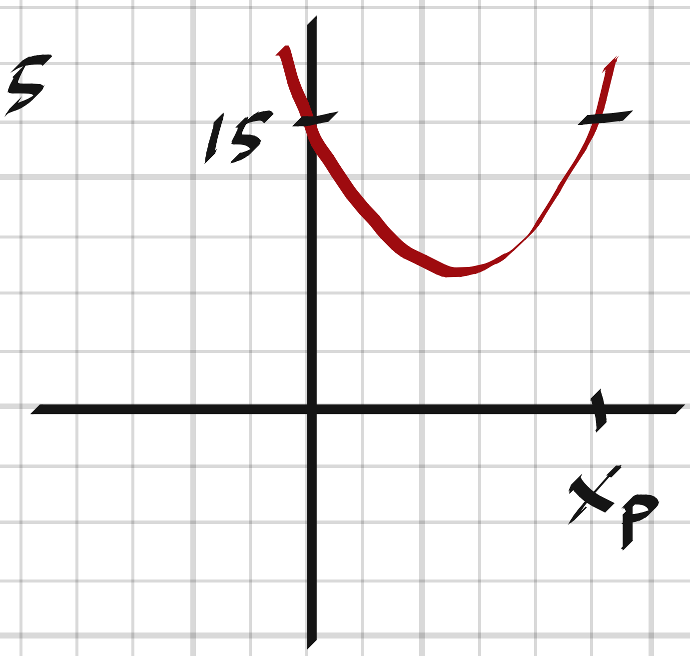
24. Figuren nedan visar graferna till två funktioner f och g där
$f(x) = -x^2 + 5x$ och $g(x) = -2x + 15$



a) Avståndet A mellan kurvorna i y-led är beroende av värdet av x.
Bestäm A som funktion av x. (0/0/1)

b) Bestäm det minsta avståndet mellan kurvorna i y-led. (0/0/2)

24. a) $A(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 7x + 15$



b) $x_p^2 - 7x_p + 15 = 15$

$x_p(x_p - 7) = 0$

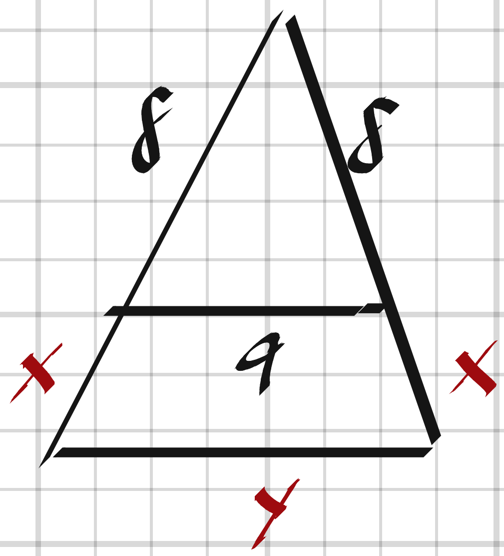
$x_{p1} = 0, \quad x_{p2} = 7$

Minvärdet ligger mittemellan x_{p1} och x_{p2},
dvs då $x = \frac{7}{2}$

$A_{min} = A\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 15 = \frac{60-49}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75$ l.e

25. I en likbent triangel dras en linje så att linjen delar triangeln i en topptriangel och ett parallelltrapets. Topptriangelns bas blir gemensam med en av sidorna i parallelltrapetset och får längden 9,0 cm. Topptriangelns andra två sidor blir då 8,0 cm vardera. Beräkna längden av parallelltrapetsets sidor om topptriangeln har lika stor omkrets som parallelltrapetset. (0/0/4)

25.



$$\begin{cases} 2x+9+y=25 \Rightarrow y=16-2x \\ \dfrac{y}{x+8}=\dfrac{9}{8} \end{cases}$$

$$8y=9(x+8)$$

$$8(16-2x)=9(x+8)$$

$$128-16x=9x+72$$

$$25x=56$$

Svar: $x=\dfrac{56}{25}=2{,}24$, $y=16-\dfrac{112}{25}=\dfrac{288}{25}=11{,}52$

23. För en funktion f där $f(x) = kx + m$ gäller att

- $f(x+2) - f(x) = 3$
- $f(4) = 2m$

Bestäm funktionen f. (0/0/2)

23.

- $k(x+2) + m - kx - m = 3$

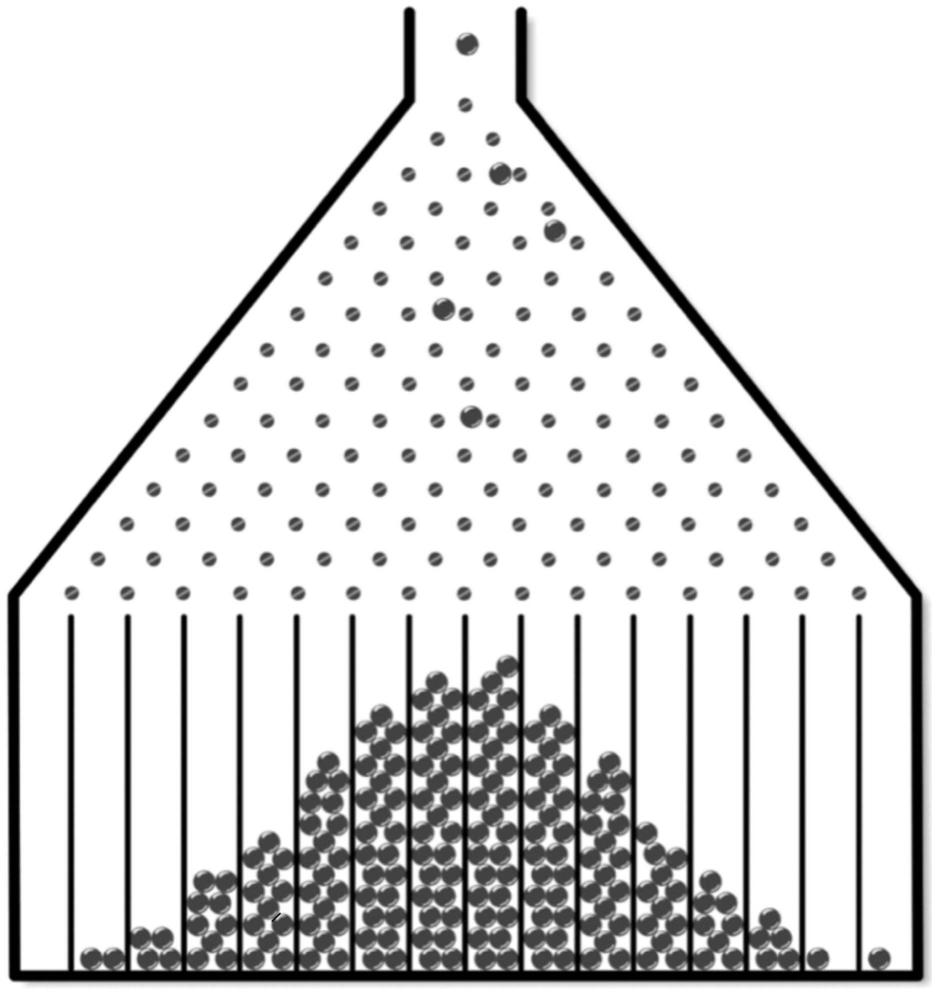
  $2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

- $k \cdot 4 + m = 2m$

  $\frac{3}{2} \cdot 4 + m = 2m \Rightarrow m = 6$

Svar: $f(x) = \frac{3}{2}x + 6$

24. En Galtonbräda är en anordning som används för att illustrera normalfördelning. Kulor släpps ner och ändrar riktning genom att passera ett antal spikar. Kulorna hamnar i olika fack och antalet kulor i facken blir ungefär normalfördelat kring mitten av brädan. Se figur.



Fack nr 1 2 3 4 5 6 7 8 ... ...

Vid ett experiment släpptes 1478 kulor ner i en Galtonbräda med 16 fack. I fack 6 hamnade 136 kulor, i fack 7 hamnade 223 kulor och i fack 8 hamnade 281 kulor.

Hur många kulor bör ha hamnat i fack 5? (0/0/2)

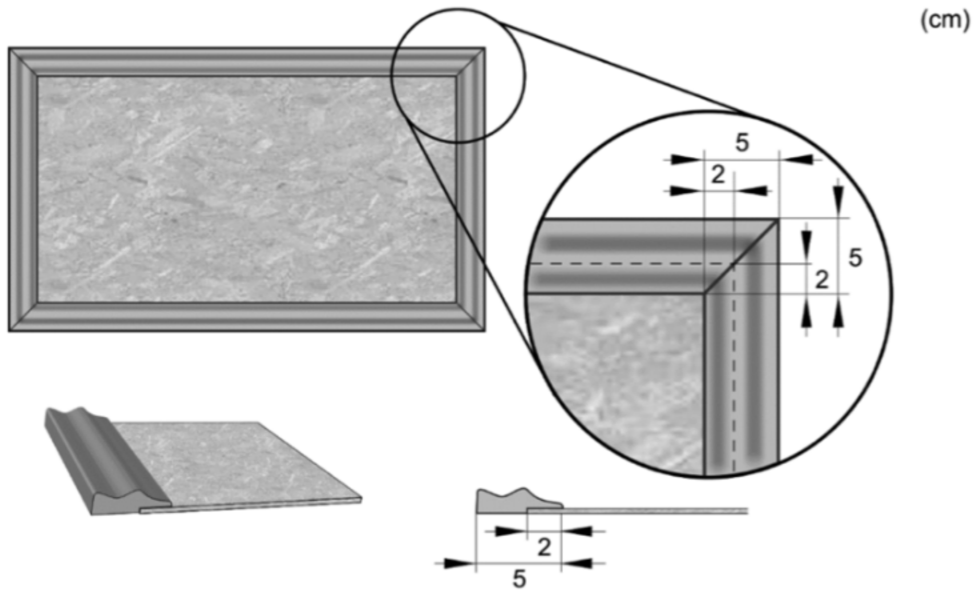
Fack 6-8: $136+223+281 = 640$

1,2 3,4 5,6 7,8 9,10 11,12 13,14 15,16

$2\sigma \approx 47{,}7\% \approx 705$ kulor

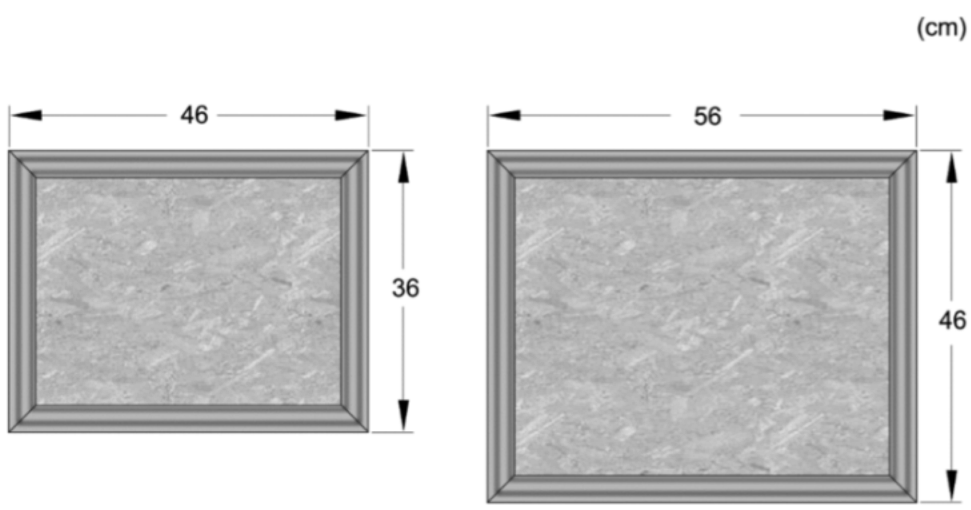
Svar: I fack 5 bör finnas $705-640 = 65$ kulor

25. Ett företag tillverkar anslagstavlor av olika storlekar. Varje anslagstavla består av en rektangulär platta omgiven av en ram. Ramen består av fyra delar som sågas till av en 5 cm bred trälist. Delarnas ändar är sågade med vinkeln $45°$ och trälistens utseende gör att delarna bara kan monteras på ett sätt. Ramen monteras så att den går 2 cm in över plattans framsida. Se figur.



Materialkostnaden för en anslagstavla beror på plattans area och trälistens längd. Priset för plattan anges i kr/m^2 och för trälisten i kr/m.

Materialkostnaden för en anslagstavla med bredden 36 cm och längden 46 cm är 59 kr. För en anslagstavla med bredden 46 cm och längden 56 cm är materialkostnaden 81 kr. Se figur.



Teckna ett generellt uttryck för den totala materialkostnaden för anslagstavlor som har bredden a m och längden b m. (0/0/4)

x = trälist kr/cm

y = platta kr/cm^2

$$\begin{cases} (2\cdot 46+2\cdot 36)\cdot x + (36-6)(46-6)\cdot y = 59 \\ (2\cdot 56+2\cdot 46)\cdot x + (46-6)(56-6)\cdot y = 81 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2000\cdot \\ -1200\cdot \end{array} \begin{cases} 164x + 1200y = 59 \\ 204x + 2000y = 81 \end{cases}$$

$$83200x = 20800$$

$$x = 0.25 \Rightarrow y = 0.015$$

$$K = (2a+2b)\cdot 25 + (a-0.06)(b-0.06)\cdot 150 =$$

$$= 50a + 50b + 150ab - 9a - 9b + 0.54$$

$$K = 150ab + 41(a+b) + 0.54$$