

4110 För ett år sedan satte Alicia in 50 000 kr på ett konto. Tack vare räntan har det beloppet nu vuxit till 52 020 kr. Hur mycket kommer det att finnas på kontot om ytterligare 5 år om hon inte gör några uttag och om räntesatsen är oförändrad hela tiden?

$$4110, \quad \text{Räntesatsen} = \frac{52020}{50000} - 1 = 4,04\%$$

$$50000 \cdot 1,04^6 = \underline{63412 \text{ kr}}$$

4111 Alarik, Bo och Jens ska åka på en utlandsresa om tre år. För att vara säker på att ha pengar binder Alarik 35 000 kr på ett konto med räntesatsen 5,2 %.

a) Bo ska först jobba ihop pengar ett år. Han får en låg räntesats, 2 %, när han sätter in pengar två år före avresan. Hur mycket pengar måste han sätta in för att ha lika mycket som Alarik vid avresan?

b) Jens sätter in 39 000 kr ett år före avresan. Hur stor måste räntesatsen på hans konto vara för att han ska ha lika mycket som de båda andra vid avresan?

$$4111, \quad a) \quad \text{Alarik har } 35000 \cdot 1,052^3 = 40749 \text{ kr}$$

$$x \cdot 1,02^2 = 40749 \Rightarrow \underline{x = 39167 \text{ kr}}$$

$$b) \quad 39000 \cdot (1+r)^1 = 40749$$

$$\Rightarrow r = \frac{40749}{39000} - 1 = \underline{4,5\%}$$

4112 Emrik och Lisa tänker låna 1 200 000 kr till ett hus. Räntesatsen är 4,75 % och de ska betala tillbaka lånet på 25 år med lika stora amorteringar varje månad. De räknar med att kunna avsätta 10 000 kr/månad till bostadslånet.

a) Räcker det? Visa med beräkningar att de har råd att betala både ränta och amorteringar.

b) Efter en tid går räntesatsen upp med 0,5 procentenheter. Undersök om de fortfarande har råd att betala lånet.

4112. a) Första månaden blir kostnaden

$$\frac{1200000}{25 \cdot 12} + \frac{0,0475}{12} \cdot 1200000 = 4000 + 4750 = \underline{8750 \text{ kr}}$$

Ja, pengarna räcker då länekostnaden blir lägre för varje månad.

b) Ny räntesats = 5,25%

$$4000 + \frac{0,0525}{12} \cdot 1200000 = 4000 + 5250 = \underline{9250 \text{ kr}}$$

Ja, 10 000 kr/mån räcker fortfarande.

4113 Anna sätter in 10 000 kr på ett bankkonto. Efter två år med ränta på ränta har hon 10 733 kr. Vilken var den genomsnittliga räntesatsen?

4113, $10000 \cdot (1+r)^2 = 10733 \Rightarrow$

$$r = \left(\frac{10733}{10000} \right)^{1/2} - 1 = \underline{3,6\%}$$

4114 Ett företag ska göra en investering. De erbjuds två betalningsvillkor.

Alternativ I: Företaget betalar 1 350 000 kr ett år efter köpet.

Alternativ II: Vid köpet betalar företaget 350 000 kr, efter 2 år betalar de 500 000 kr och 4 år efter köpet betalar de 500 000 kr.

Vilket av alternativen är mest fördelaktigt för företaget om man räknar med pengarnas värde vid tidpunkten för köpet och en årsränta på 5 %?

Uppgiften förutsätter
nuvärdesberäkning!

4114,

Alternativ 1

$$\text{Nuvärdet år } 0 = \frac{1350000}{1,05^1} = \underline{1285714 \text{ kr}}$$

Alternativ 2,

$$\text{Nuvärdet år } 0 = 350000 + \frac{500000}{1,05^2} + \frac{500000}{1,05^4} = \underline{1214865 \text{ kr}}$$

Alternativ 2 blir fördelaktigast

4120 Stina ska börja studera vid universitetet i Uppsala. Hon får 2 800 kr/mån i studiebidrag och kan sedan låna upp till totalt 9 000 kr/mån under terminstid. Hon vill undvika att låna mer än nödvändigt. Därför gör hon en budget för att se hur mycket hon måste låna. Hyran för studentrummet är 3 030 kr/mån. Övriga utgifter försöker hon uppskatta. Mat 2 500 kr, telefon, tv och internet 1 000 kr. Försäkring 100 kr, tvätt och hygienartiklar 150 kr. Dessutom ska hon betala av 400 kr/mån på sin nyinköpta dator. Hur mycket måste hon minst låna för att ha 500 kr/mån till kläder och nöjen under terminstid.

4120. Lånebehov:

$$3030 + 2500 + 1000 + 100 + 150 + 400 + 500 - 2800 = \underline{4880 \text{ kr}}$$

4121 Sima är 18 år och går sista året på gymnasiet. Hennes studiebidrag är 1 050 kr, hon jobbar extra på helgerna och tjänar efter skatt 3 800 kr/mån. Eftersom hon jobbar tycker hennes föräldrar att hon kan betala för maten. För att uppskatta vad som är rimligt att betala tittar hon på konsumentverkets budgetförslag.

Hushållskostnader kvinnor 18-30 år

Livsmedel, alla måltider i hemmet utom lunch	1 340 kr
Kläder och skor	620 kr
Fritidsaktiviteter	-
Mobiltelefon	180 kr
Personlig hygien inkl. tandvård	490 kr

Hur mycket får Simas fritidsaktiviteter kosta som mest, om hon betalar för maten enligt budgetförslaget?

Fritidsaktiviteter.

$$1050 + 3800 - 1340 -$$

$$620 - 180 - 490 = \underline{2220 \text{ kr}}$$

4125 Lisa och Johan ska överta en lunchrestaurang. De räknar med intäkter om i genomsnitt 170 000 kr/månad. De försöker att uppskatta alla kostnader under ett år:

Råvaror 750 000 kr, egna löner och lön till timanställd personal 860 000 kr, hyra, el och värme för lokalen 155 000 kr, telefon och it-kostnader 20 000 kr, disk- och rengöringsmedel samt arbetsmaterial 7 000 kr, underhållskostnader 12 000 kr.

För att kunna överta restaurangen och komma igång tar de ett lån på 300 000 kr med räntan 7,2 %.

- Gör en resultatbudget för året.
- Hur förändras resultatbudgeten för nästa år om de då amorterar 100 000 kr på lånet i början av året, ökar intäkterna med 10 000 kr/månad och om samtidigt kostnaderna för råvaror ökar med 5 %?

4125, Uppgiften löst i Excel enligt:

Resultatbudget

Intäkter	
Försäljning	2 040 000
Summa Intäkter	2 040 000
Kostnader	
Råvaror	750 000
Lön	860 000
Hyra, el	155 000
Telefon, IT	20 000
Rengöringsmedel mm.	7 000
Underhåll	12 000
Amorteringar	0
Räntekostnader	21 600
Summa Kostnader	1 825 600
Resultat	214 400

Resultatbudget

Intäkter	
Försäljning	2 160 000
Summa Intäkter	2 160 000
Kostnader	
Råvaror	787 500
Lön	860 000
Hyra, el	155 000
Telefon, IT	20 000
Rengöringsmedel mm.	7 000
Underhåll	12 000
Amorteringar	100 000
Räntekostnader	14 400
Summa Kostnader	1 955 900
Resultat	204 100

4208 I en by med 2 000 invånare minskar invånarantalet med 4,0 % varje år. Hur många kommer att bo i byn efter 10 år?

4208. $2000 \cdot 0,96^{10} \approx \underline{1300 \text{ st}}$

4209 Lös ekvationerna

a) $2^{x+1} = 2^3$

b) $3^{2x-3} = 3^{x-1}$

4209. a) $x+1=3$

$\underline{x=2}$

b) $2x-3=x-1$

$\underline{x=2}$

4210 Utveckla, förenkla om det är möjligt.

a) $5^x(5 + 5^x)$

b) $(2^x + 2)^2$

4210. a) $\underline{5^{x+1} + 5^{2x}}$

b) $2^{2x} + 2 \cdot 2 \cdot 2^x + 2^2 = \underline{2^{2x} + 2^{x+2} + 4}$

4211 Faktorisera uttrycken

a) 3^{x+2}

b) $3^{2x} + 3^{4x}$

4211. a) $3^x \cdot 3^2 = \underline{3^x \cdot 9}$

b) $\underline{3^{2x} (1 + 3^{2x})}$

4212 Förenkla

a) $\frac{x^5 - 3x^4}{x - 3}$

b) $\frac{8^{4x}}{32^x}$

4212. a) $\frac{x^4(x-3)}{x-3} = \underline{x^4}$

b) $\frac{8^{4x}}{32^x} = \frac{(2^3)^{4x}}{(2^5)^x} = \frac{2^{12x}}{2^{5x}} = \underline{2^{7x}}$

4213 Förenkla

a) $\frac{(3^x + 3^x + 3^x)^2}{9^x}$

b) $\frac{4^{2x} - 3^{4x}}{4^x + 3^{2x}}$

4213. a) $\frac{(3 \cdot 3^x)^2}{(3^2)^x} = \frac{9 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = \underline{9}$

b) $\frac{(4^x + 3^{2x})(4^x - 3^{2x})}{4^x + 3^{2x}} = \underline{4^x - 3^{2x}}$

4214 Lös ekvationen

$11 \cdot 12^x = 12^{15} - 12^{14}$

$11 \cdot 12^x = 12^{14}(12 - 1)$

$11 \cdot 12^x = 12^{14} \cdot 11 \Rightarrow$

4214.

$\underline{x = 14}$

4222 Lös ekvationen $\frac{x^{5/2}}{x^{3/2}} = 18$

4222, $x^{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = 18 \Rightarrow \underline{x = 18}$

4223 Bestäm utan att använda räknare

a) $\sqrt[3]{-8}$

b) $\sqrt{-25}$

c) $\sqrt[4]{-16}$

d) $\sqrt[5]{-32}$

4223, a) $(-8)^{1/3} = \underline{-2}$

b) Saknar reell lösning

c) - " -

d) $(-32)^{1/5} = \underline{-2}$

4224 Skriv talet $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ som en potens med basen 2.

4224, $\frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{(2^3)^{1/3}} = \frac{1}{2} = \underline{2^{-1}}$

4225 a) Visa att $a = 4$ uppfyller likheten $4^a = a^4$

b) Finns det något annat heltal a som uppfyller likheten?

4225, a) $VL = 4^4 = 4^4 = HL$

b) $a = 2$

4226 För vissa värden på heltalet $n \geq 2$ kan man tillåta $a < 0$ i uttrycket $a^{1/n}$.

a) Vilka värden på n gäller det för?

b) Förklara varför det är så.

4226, a) Alla udda n

b) Eftersom ett negativt heltal

förblir negativt med en udda potens.

ex.v $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, Alltså

måste $(-8)^{1/3} = -2$

4227 Visa med hjälp av potenslagarna att
 $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

4227,

$$VL = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = HL.$$

4235 Lös ekvationen $x^{-3} = 8$ utan att använda räknare.

4235, $x^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{8^{1/3}} = \underline{\frac{1}{2}}$

4236 Ge ett exempel på en potensekvation som har

- ö
- a) exakt två lösningar
 - b) endast en lösning

4236, a) $x^2 = 4$

b) $x^3 = 8$ (endast en reell rot,
dock två komplexa)

4237 Ge exempel på två potensekvationer som
ö endast har lösningen $x = 3$.

4237, $x^3 = 27$
 $x^5 = 243$

4238 a) Ge ett exempel på en verklig fråga som
ö kan besvaras med hjälp av potensekvationen $12\,000 = 15\,000 \cdot x^6$
b) Lös ekvationen och besvara din fråga.

4238. a) Befolkningen i en småstad minskar från 15000 till 12000 på 6 år. Beräkna den genomsnittliga procentuella minskningen per år.

b) $x = \left(\frac{12}{15}\right)^{\frac{1}{6}} = 0.963$

Den årliga minskningen är 3.65 %

4239 Värdet av Ninas och Mickes sparkapital har på 4 år minskat från 12 350 kr till 9 875 kr. En kväll roas de sig med att beräkna den genomsnittliga årliga procentuella värdeminskningen. Micke skriver följande beräkningar på en lapp:

$$\frac{12\,350 - 9\,875}{12\,350} = 0,20$$

$$\frac{0,20}{4} = 0,05$$

Värdeminskningen är 5% per år

Nina säger att Micke har räknat fel. Hjälp Nina att förklara vad Micke har gjort för fel och beräkna sedan den riktiga årliga procentuella värdeminskningen.

4239, Minskningen sker exponentiellt år från år.

$$(1-x)^4 \cdot 12350 = 9875$$

$$\text{Minskning per år, } x = 1 - \left(\frac{9875}{12350}\right)^{1/4} = 5.4\%$$

4240 Vilken genomsnittlig årlig procentuell värdeförändring motsvarar

- a) en fördubbling på 20 år
- b) en ökning med 50 % på 10 år
- c) en minskning med 25 % på 5 år

$$4240 \quad a) \quad (1+x)^{20} = 2$$

$$x = 2^{\frac{1}{20}} - 1 = \underline{3.5\%}$$

$$b) \quad (1+x)^{10} = 1.50$$

$$x = 1.5^{\frac{1}{10}} - 1 = \underline{4.1\%}$$

$$c) \quad (1-x)^5 = 0.75$$

$$x = 1 - (0.75)^{\frac{1}{5}} = \underline{5.6\%}$$

4241 Falkträsk är en kommun i tillväxt. Mellan åren 2005 och 2012 ökade antalet invånare från 23 562 till 26 089. På kommunkontorets sammanträde diskuterar man hur många invånare som kommunen kan tänkas ha år 2022. Efter sammanträdet ligger två handskrivna lappar med beräkningar kvar på bordet

$$\frac{26\,089 - 23\,562}{7} = 361$$

$$26\,089 + 10 \cdot 361 \approx 29\,700$$

$$26\,089 = 23\,562 \cdot x^7$$

$$x = (26\,089/23\,562)^{1/7} \approx 1,015$$

$$26\,089 \cdot 1,015^{10} \approx 30\,300$$

Förklara vad man kan ha räknat ut på de två lapparna. Vilken av uträkningarna tror du bäst beskriver tillväxten i kommunen? Motivera ditt svar.

4241. Den nedersta är mer korrekt då den beskriver procentuell tillväxt år från år. Den översta baseras på konstant antal.

Lös ekvationerna

4242 a) $x^{2,7} = 3,57$

b) $\sqrt[3]{x^2} = 4$

4242. a) $x^{2,7} = 3,57$; $x = 3,57^{1/2,7} = \underline{1,60}$

b) $(x^2)^{1/3} = 4$; $x = \pm 4^{3/2} = \underline{\pm 8}$

4243 a) $x^3 = -125$

b) $x^{14} + 1024 = 0$

c) $y^7 = -10^{-7}$

d) $y^3 = -\frac{1}{8}$

4243. a) $x^3 = -125$; $x = -125^{1/3} = \underline{-5}$

b) $x^{14} = -1024$ (saknar reell lösning)

c) $y^7 = -10^{-7}$; $y = (-10^{-7})^{1/7} = -10^{-1} = \underline{-\frac{1}{10}}$

d) $y^3 = -\frac{1}{8}$; $y = -\frac{1}{8^{1/3}} = \underline{-\frac{1}{2}}$

4244 Enligt Keplers tredje lag är förhållandet mellan kvadraten av planeternas omloppstid runt solen (T år) och kuben på deras medelavstånd till solen (r km) konstant, dvs.

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{konstant}$$

Enligt en formelsamling befinner sig jorden $1,496 \cdot 10^8$ km från solen. Saturnus omloppstid är 29,5 år. Hur många gånger längre är det från solen till Saturnus jämfört med avståndet från solen till jorden?

4244. $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} =$
 $= \left(\frac{29,5}{1}\right)^{2/3} = \underline{9,55 \text{ ggr.}}$

4245 Om ett lån på K kr är amorteringsfritt och växer med ränta på ränta i t år med räntesatsen p %, så anges det totala lånebeloppet av uttrycket

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Låt $K = 5\,000$ kr växa med ränta på ränta tills det totala lånebeloppet är $8\,000$ kr. Hur stor är räntesatsen om det sker när

a) $t = 14$ år

b) $t = 7$ år

4245.

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 8000$$

$$p = \left(\left(\frac{8}{5}\right)^{1/t} - 1\right) \cdot 100$$

a) $p = \left(\left(\frac{8}{5}\right)^{1/14} - 1\right) \cdot 100 = \underline{3.4\%}$

b) $p = \left(\left(\frac{8}{5}\right)^{1/7} - 1\right) \cdot 100 = \underline{6.95\%}$

4246 Herbert lånar ut 125 000 kr till sin son och de kommer överens om att sonen ska betala tillbaka lånet med 170 000 kr om 10 år. Kommer Herbert att göra någon vinst på att låna till sin son, om man räknar med att värdeminskningen i genomsnitt är 3 % per år?

4246. $125\ 000 \cdot 1,03^{10} = 167\ 990\ \text{kr}$

Ja, vinsten blir $170\ 000 - 167\ 990 \approx 2\ 000\ \text{kr}$.

4309 På 10 år växer den lottovinst på 50 000 kr som Lars har haft på banken enligt $K(x) = 50\ 000 \cdot x^{10}$ till 64 000 kr. K är kapitalet i kronor och x är förändringsfaktorn. Hur stor har den genomsnittliga årliga räntan varit?

4309. $50\ 000 \cdot x^{10} = 64\ 000$

$$x = \left(\frac{64}{50}\right)^{1/10} = 1,025$$

Den årliga räntan har varit 2,5%

$$170\ 000 \cdot 0,97^{10} = 128\ 362$$

4310 Mona investerade 30 000 kr i aktier. Efter 3 år var aktiernas värde 15 000 kr. Hur stor var den årliga minskningen i procent?

$$4310. \quad (1-x)^3 \cdot 30\,000 = 15\,000$$

$$x = 1 - \left(\frac{15}{30}\right)^{1/3} = \underline{20.6\%}$$

4311 Invånarantalet i en stad ökar exponentiellt.

År 1980 fanns det 122 000 invånare och år 2000 fanns det 199 911 invånare i staden.

- Bestäm förändringsfaktorn.
- Teckna ett funktionsuttryck som beskriver tillväxten.
- Hur många invånare finns det år 2010 om invånarantalet fortsätter att växa på samma sätt?

$$4311. \quad a) \quad x^{20} \cdot 122\,000 = 199\,911$$

$$x = \left(\frac{199\,911}{122\,000}\right)^{1/20} = \underline{1.025}$$

$$b) \quad \underline{f(x) = 122\,000 \cdot 1.025^x}$$

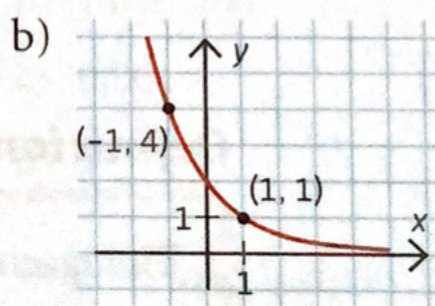
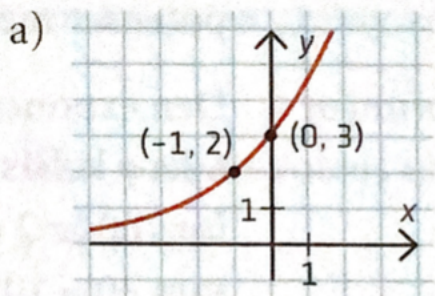
$$c) \quad f(30) = 122\,000 \cdot 1.025^{30} = \underline{256\,000}$$

4312 Du sätter in dina besparingar på ett bankkonto. Hur lång tid tar det för kapitalet att fördubblas om årsräntan är 3 %?

$$4312. \quad 1.03^x = 2$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1.03} \approx \underline{23 \text{ år}}$$

4313 Ange funktionsuttrycken till de exponentialfunktioner som är ritade i figuren.



$$4313. a) \quad f(x) = k \cdot a^x$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow k = 3$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow 3 \cdot a^{-1} = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}; \quad \underline{f(x) = 3 \cdot 1.5^x}$$

$$b) \quad f(1) = 1 \Rightarrow k \cdot a = 1; \quad f(-1) = 4 \Rightarrow k \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = 4; \quad k = 2, 2$$

$$a = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}; \quad \underline{f(x) = 2 \cdot 0.5^x}$$

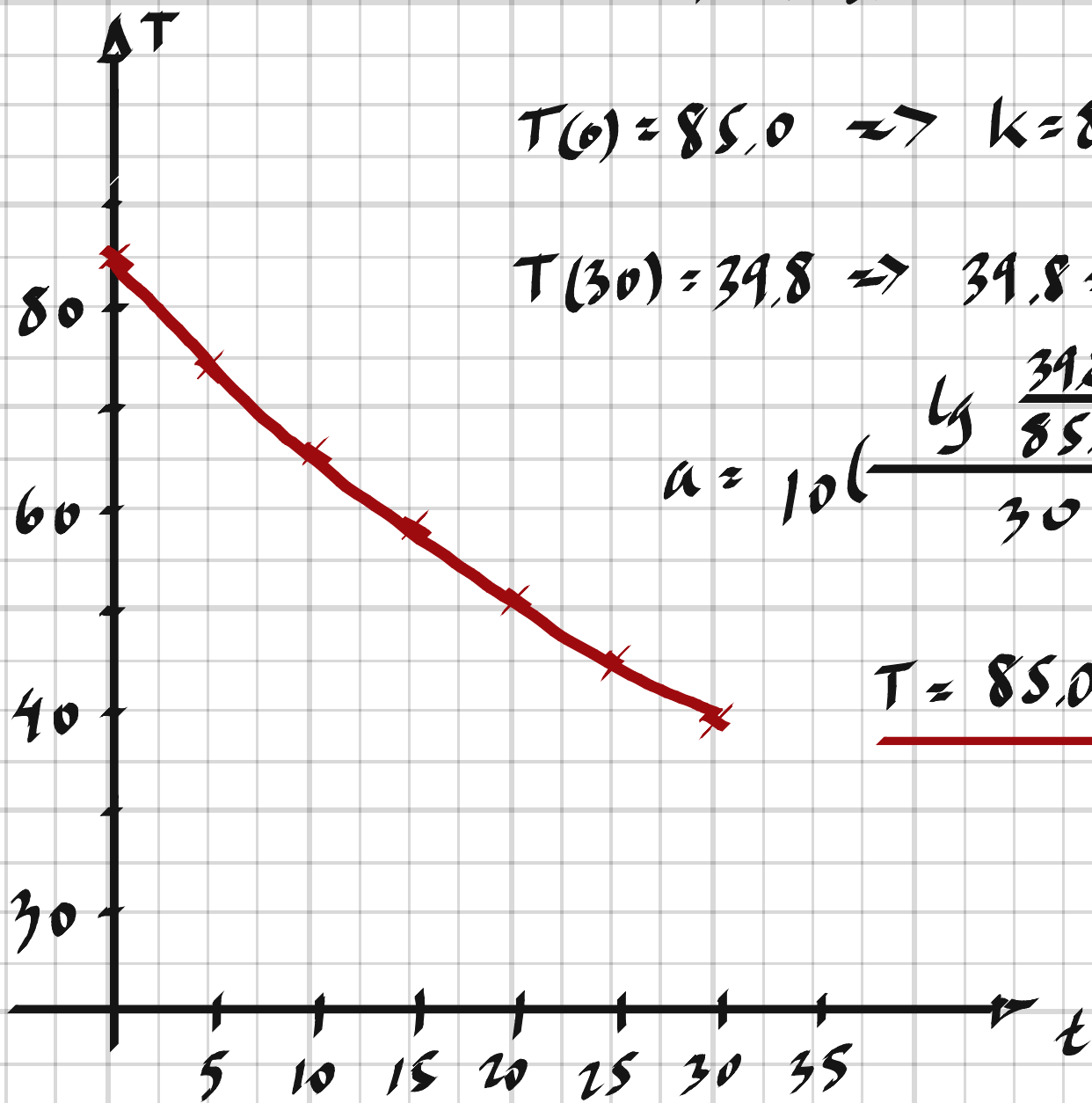
4314 Tabellen visar temperaturen hos en varm dryck vid olika tidpunkter.

Tid (min)	Temperatur (°C)
0	85,0
5	74,9
10	66,0
15	58,1
20	51,2
25	45,1
30	39,8

- Pricka in värdena i ett koordinatsystem och rita en kurva över avsvälningen.
- Beskriv avsvälningen med en exponentialfunktion.

$$T = k \cdot a^t$$

4314,



$$T(0) = 85,0 \Rightarrow k = 85,0$$

$$T(30) = 39,8 \Rightarrow 39,8 = 85,0 \cdot a^{30} \Rightarrow$$

$$a = 10^{\left(\frac{\log \frac{39,8}{85,0}}{30}\right)} = 0,975$$

$$\underline{T = 85,0 \cdot 0,975^t}$$

4325 Ordna talen i storleksordning med det minsta först.

$\lg 98$ $10^{\lg 2,1}$ 2 $\lg 982$ 2,2

4325, $\lg 98$ 2 $10^{\lg 2,1}$ 2,2 $\lg 982$

4326 a) Ge ett exempel på ett positivt tal som också har en positiv tiologaritm.

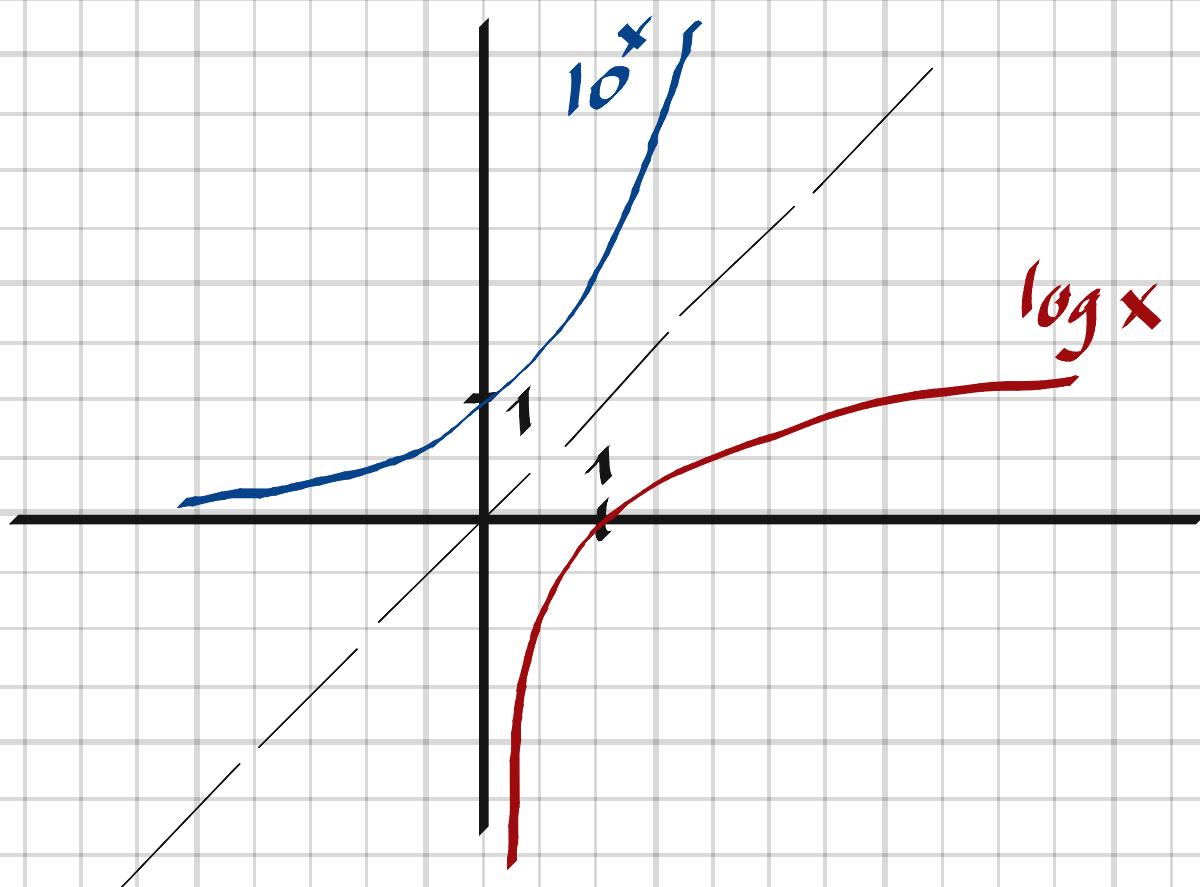
b) Ge ett exempel på ett positivt tal som har en negativ tiologaritm.

c) Förklara när tiologaritmen av ett positivt tal är positiv och när den är negativ.

4326, a) 10, $\lg 10 = 1$

b) 0,1, $\lg 0,1 = -1$

c) För $\text{tal} > 1 \Rightarrow \text{dess logaritmen} > 0$



4327 Förklara varför man inte kan beräkna $\lg(-5)$.

4327. Logaritmfunktionen "är inte
definierad för $x \leq 0$
exempelvis är $10^5 > 0$

4338 Virkesmängden i familjen Anderssons skog ökar exponentiellt och på 25 år har virkesmängden fördubblats.

- Hur stor är den årliga procentuella ökningen?
- Skriv ett funktionsuttryck som beskriver virkesmängden, $V(t) \text{ m}^3$, som funktion av antalet år t om virkesmängden från början var V_0 .
- År 2010 var virkesmängden i familjen Anderssons skog $2,4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. När virkesmängden uppgår till $4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ tänker de avverka. Vilket år kommer familjen att avverka sin skog?

4338. a) $(1+x)^{25} = 2 \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{25}} - 1 = \underline{2,8\%}$

b) $\underline{V(t) = V_0 \cdot 1,028^t}$

c) $2,4 \cdot 10^6 \cdot 1,028^t = 4 \cdot 10^6$

$$t = \frac{\lg \frac{4}{2,4}}{\lg 1,028} = 18,5 \Rightarrow \underline{\text{År 2028}}$$

4339 Antalet bakterier i en bakterieodling fördubblas varje timme. Hur lång tid tar det för odlingen att växa till 1 000 gånger sitt ursprungliga antal?

$$4339, \quad 2^t = 1000$$

$$t = \frac{\lg 1000}{\lg 2} \approx \underline{10 \text{ h}}$$

4340 Lös ekvationerna. Svara med två decimaler.

a) $2^{x+3} = 11$

b) $3 \cdot 4^{2x-3} = 15$

c) $5 - 3 \cdot 2^{3x-1} = -16$

$$4340, \text{ a) } \quad x+3 = \frac{\lg 11}{\lg 2}$$

$$x = \frac{\lg 11}{\lg 2} - 3 = \underline{0.46}$$

$$\text{b) } \quad 3 \cdot 4^{2x-3} = 15$$

$$2x-3 = \frac{\lg \frac{15}{3}}{\lg 4} ; \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{\lg \frac{15}{3}}{\lg 4} + 3 \right) = \underline{2.08}$$

$$\text{c) } \quad 3 \cdot 2^{3x-1} = 5+16$$

$$3x-1 = \frac{\lg \frac{21}{3}}{\lg 2} ; \quad x = \frac{1}{3} \left(\frac{\lg \frac{21}{3}}{\lg 2} + 1 \right) = \underline{1.27}$$

4341 Astrid sätter in en summa pengar på banken. Efter 3 år med årsräntan 2,8 % har pengarna vuxit till 7 000 kr. Hur lång tid tar det innan pengarna vuxit till 10 000 kr om årsräntan hela tiden har varit densamma?

$$4341. \quad x \cdot 1.028^3 = 7000 \Rightarrow x = 6443$$

$$6443 \cdot 1.028^t = 10000$$

$$t = \frac{\lg \frac{10000}{6443}}{\lg 1.028} \approx \underline{16 \text{ år}}$$

4342 Lös ekvationen
 $4 + 5 \cdot 7^x = 16 + 2 \cdot 7^x$

$$4342. \quad 5 \cdot 7^x - 2 \cdot 7^x = 16 - 4$$

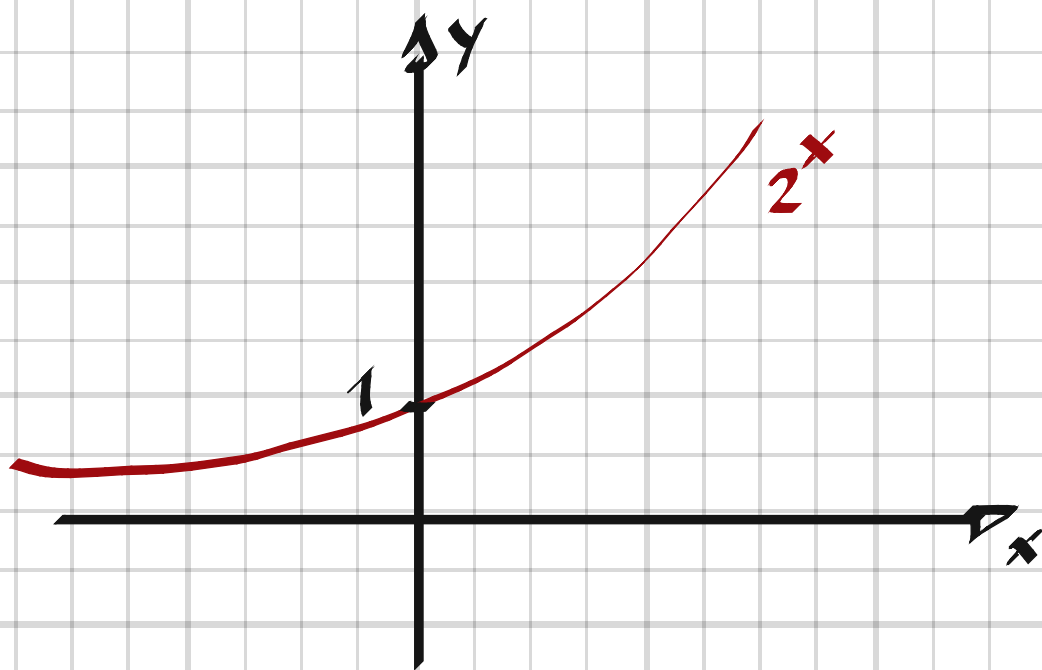
$$7^x (5 - 2) = 16 - 4$$

$$7^x = \frac{12}{3}$$

$$x = \frac{\lg 4}{\lg 7} \approx \underline{0.71}$$

4343 Förklara varför ekvationen $2^x = -5$ saknar lösning.

4343, En exponentiell funktion som 2^x "är aldrig negativ."



4344 Beräkna följande uttryck på din räknare:

$$\lg(2 \cdot 3) \text{ och } \lg 2 + \lg 3$$

$$\lg(5 \cdot 6) \text{ och } \lg 5 + \lg 6$$

$$\lg(8 \cdot 4) \text{ och } \lg 8 + \lg 4$$

Kan du dra någon slutsats av dina beräkningar?

4344, $\lg(ab) = \lg a + \lg b$

4345 Beräkna följande uttryck på din räknare:

$$\lg \frac{8}{3} \text{ och } \lg 8 - \lg 3$$

$$\lg \frac{10}{2} \text{ och } \lg 10 - \lg 2$$

$$\lg \frac{16}{4} \text{ och } \lg 16 - \lg 4$$

Kan du dra någon slutsats av dina beräkningar?

4345,

$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$

4346 Visa att ekvationen $a^x = b$, där a och b är positiva tal, har lösningen $x = \frac{\lg b}{\lg a}$

4346.

$$VL = a^x = a^{\frac{\lg b}{\lg a}} = (10^{\lg a})^{\frac{\lg b}{\lg a}} = 10^{\lg b} = b = HL.$$

4347 Värdet av tiologariterna

$\lg 7$ $\lg 70$ $\lg 700$ $\lg 7\,000$ $\lg 70\,000$

följer ett visst mönster.

- Beräkna tiologariterna och beskriv mönstret.
- Förklara varför mönstret får just det här utseendet.

4347. a) 0.8451, 1.8451, 2.8451, 3.8451, 4.3851

b) $\lg(a \cdot 10^x) = \lg a + \lg 10^x = \lg a + x$, $x = 0, 1, 2, \dots$

4348 Lös ekvationerna utan räknare

a) $\lg x^2 = \lg 49$

b) $4 + \lg 9 = \lg x^2$

4348. a) $\lg x^2 = \lg 7^2 \Rightarrow \underline{x = \pm 7}$

b) $\lg 10^4 + \lg 9 = \lg x^2$

$\lg(9 \cdot 10^4) = \lg x^2 \Rightarrow$

$x^2 = 9 \cdot 10^4$

$\underline{x = \pm 300}$

4356 Visa att $2(\lg 20 - \lg 5) = \lg 2 + \lg 8$

4356.

$VL = 2(\lg 20 - \lg 5) = 2 \cdot \lg \frac{20}{5} = \lg 4^2 = \lg 16 =$

$= \lg(2 \cdot 8) = \lg 2 + \lg 8 = HL.$

4357 Lise och Erik löser ekvationen $3 \cdot 5^x = 12$

ö korrekt, men på två olika sätt.

Lise får

$$x = \frac{\lg 4}{\lg 5}$$

och Erik får

$$x = \frac{\lg 12 - \lg 3}{\lg 5}$$

Ge förslag på hur Lise och Erik kan ha kommit fram till sina lösningar.

4357

Lise

$$3 \cdot 5^x = 12$$

$$5^x = \frac{12}{3}$$

$$\lg 5^x = \lg 4$$

$$x \cdot \lg 5 = \lg 4$$

$$x = \frac{\lg 4}{\lg 5}$$

Erik

$$3 \cdot 5^x = 12$$

$$\lg(3 \cdot 5^x) = \lg 12$$

$$\lg 3 + \lg 5^x = \lg 12$$

$$\lg 5^x = \lg 12 - \lg 3$$

$$x = \frac{\lg 12 - \lg 3}{\lg 5}$$

4358 Lös ekvationerna med hjälp av logaritmlagarna.

a) $\lg x = \lg 3 + \lg 4$

b) $3 \lg x = \lg 24 - \lg 3$

c) $\lg 5 = \lg 10 - \lg 2x$

4358. a) $\lg x = \lg(3 \cdot 4) \Rightarrow \underline{x = 12}$

b) $3 \lg x = \lg\left(\frac{24}{3}\right)$

$\lg x^3 = \lg 8 \Rightarrow \underline{x = 2}$

c) $\lg 5 = \lg \frac{10}{2x} \Rightarrow \underline{x = 1}$

4369 En sjö håller på att växa igen. Sjöns area minskar exponentiellt. Vattenytan mätte 12 km² år 1960 och 8,0 km² år 2000.

- Med hur många procent minskar arean varje år?
- Bestäm ett samband som visar hur arean minskar?
- Hur stor bör vattenytan vara år 2010?
- Vilket år är arean 4,0 km² om arean fortsätter att minska på samma sätt?

$$4369. \quad a) \quad 12 \cdot a^{40} = 8$$

$$a^{40} = \frac{8}{12}$$

$$a = \sqrt[40]{\frac{8}{12}} = 0.9899$$

Arean minskar med 1,0%

$$b) \quad \underline{12 \cdot 0.9899^t}$$

$$c) \quad 12 \cdot 0.9899^{50} = \underline{7.2 \text{ km}^2}$$

$$d) \quad 12 \cdot 0.9899^t = 4.0$$

$$t = \frac{\lg \frac{4}{12}}{\lg 0.9899} = 108 \Rightarrow \underline{\text{År } 2068}$$

4370 Minna sätter in x kr på ett bankkonto med räntesatsen p %. Pengarna finns på kontot i t år. Ställ upp ett uttryck för kapitalet K kr, t år efter insättningen av x kr till räntesatsen p %.

4370.

$$\underline{K = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t}$$

4371 En fabrik måste minska sina utsläpp i sjöar och vattendrag med sammanlagt 20 procent under de följande fyra åren.

- Hur stor bör den årliga utsläppsminskningen vara i procent, om man eftersträvar en lika stor relativ minskning under vart och ett av åren?
- Anta att samma årliga reduktionsmål tillämpas även efter fyraårsperioden. Hur många år kommer det att ta innan utsläppen minskat till mindre än hälften av de ursprungliga?

(Finländsk studentexamen år 2006)

4371. a) $a^4 = 0.8$

$$a = \sqrt[4]{0.8} = 0.946$$

Minskningen bör vara 5.4 % per år

b) $0.945^t = 0.5$

$$t = \frac{\lg 0.5}{\lg 0.945} = 12.2 \Rightarrow \underline{\text{Mer än 12 år}}$$

4372 Oljeproduktionen i ett land minskar med 7 % per år. Hur länge dröjer det tills oljeproduktionen halverats om minskningen fortsätter på samma sätt?



4372,

$$0.93^t = 0.5$$

$$t = \frac{\lg 0.5}{\lg 0.93} \approx \underline{10 \text{ år}}$$

4373 År 1960 fanns det uppskattningsvis 20 000 gräsälar i Östersjön. På grund av höga halter av miljögifter minskade sedan antalet sälar kraftigt. Minskningen var exponentiell och år 1980 fanns endast 2 000 gräsälar kvar.

- a) Vilken var den genomsnittliga årliga procentuella minskningen av antalet gräsälar mellan åren 1960 och 1980?

Efter 1980 har sälstammen delvis återhämtat sig. Uppskattningsvis fanns det år 2005 12 000 gräsälar i Östersjön. Enligt en prognos från Naturvårdsverket kommer antalet gräsälar att öka exponentiellt med 6,5 % per år under de närmaste åren.

- b) Vilket år kommer antalet gräsälar återigen att vara 20 000 om prognosen håller?

(Np MaC vt 2002)

$$4373. a) 20000 \cdot (1-x)^{20} = 2000$$

$$x = 1 - \left(\frac{2}{20}\right)^{1/20} = \underline{11\%}$$

$$b) 12000 \cdot 1.065^t = 20000$$

$$t = \frac{\lg \frac{20}{12}}{\lg 1.065} \approx 8 \Rightarrow \underline{\text{År 2013}}$$

4374 Jordbävningen vid Salomonöarna år 2007 gav upphov till en tsunami. Jordbävningen hade magnituden 8 på richterskalan. Magnituden beräknas efter formeln

$$M = \frac{2}{3} (\lg E - 4,4)$$

där E är den frigjorda energin i joule. Hur mycket energi frigjordes i jordbävningen vid Salomonöarna?

4374.

$$E = 10^{\frac{3M}{2} + 4,4} = 10^{12 + 4,4} = \underline{2,5 \cdot 10^{16} \text{ J}}$$

4375 Med kol-14 metoden kan man bestämma hur gammalt ett arkeologiskt fynd är. Metoden bygger på att mängden kol-14 är konstant i allt levande och när organismen dör och inga nya kol-14-atomer tillförs, så minskar de kol-14-atomer som då finns i organismen exponentiellt. Man vet att halveringstiden för kol-14 är 5 730 år. Det är alltså den tid det tar för att mängden av kol-14 i en organism ska halveras. Halten kol-14 är $1,2 \cdot 10^{-6}$ ppm i levande organismer. Hur gammalt är ett arkeologiskt fynd som innehåller $1,0 \cdot 10^{-7}$ ppm kol-14?

4375

$$a^{5730} = 0,5 \Rightarrow a = 0,999879$$

$$1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,999879^t = 1,0 \cdot 10^{-7}$$

$$t = \frac{\lg \frac{0,1}{1,2}}{\lg 0,999879} \approx \underline{20500 \text{ år}}$$

4376 I en sjö uppmättes vid ett tillfälle $\text{pH} = 6$. Tre år senare visade nya mätningar att sjön hade försurats och pH uppmättes till 4,5. Hur många gånger högre var vätejonkoncentrationen vid den andra mätningen?

4376.

$$\text{pH} = -\lg H^+ \Rightarrow H^+ = 10^{-\text{pH}}$$

$$\frac{H_2^+}{H_1^+} = \frac{10^{-4.5}}{10^{-6}} = 10^{1.5} \approx \underline{\underline{32 \text{ ggr.}}}$$
