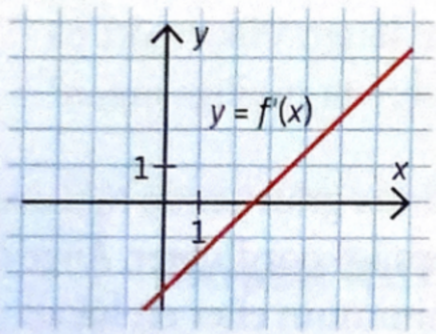
17 Figuren visar grafen till $f'(x)$ som är derivatan av $f(x)$.



a) För vilket värde på x är $f'(x) = 0$?

b) För vilka värden på x är funktionen f strängt växande respektive strängt avtagande?

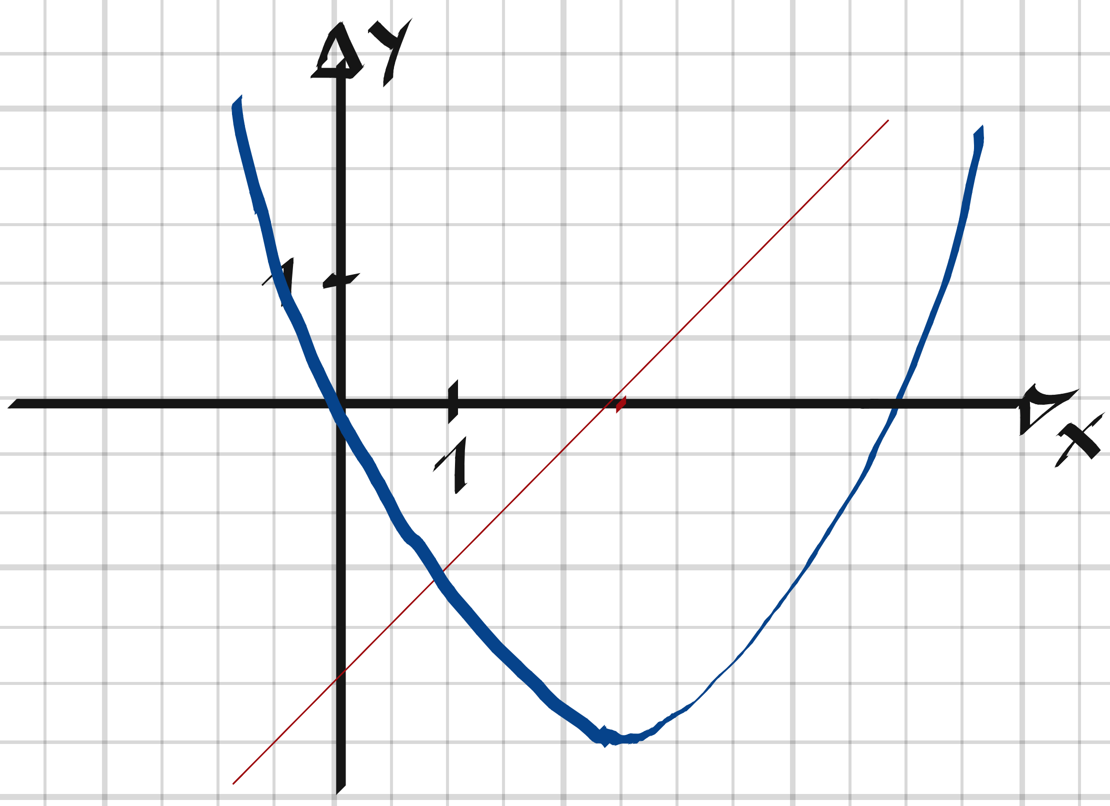
c) Skissa grafen till f om $f(0) = 0$.

17. a) 2.5

b) Strängt växande för $x \geq 2.5$

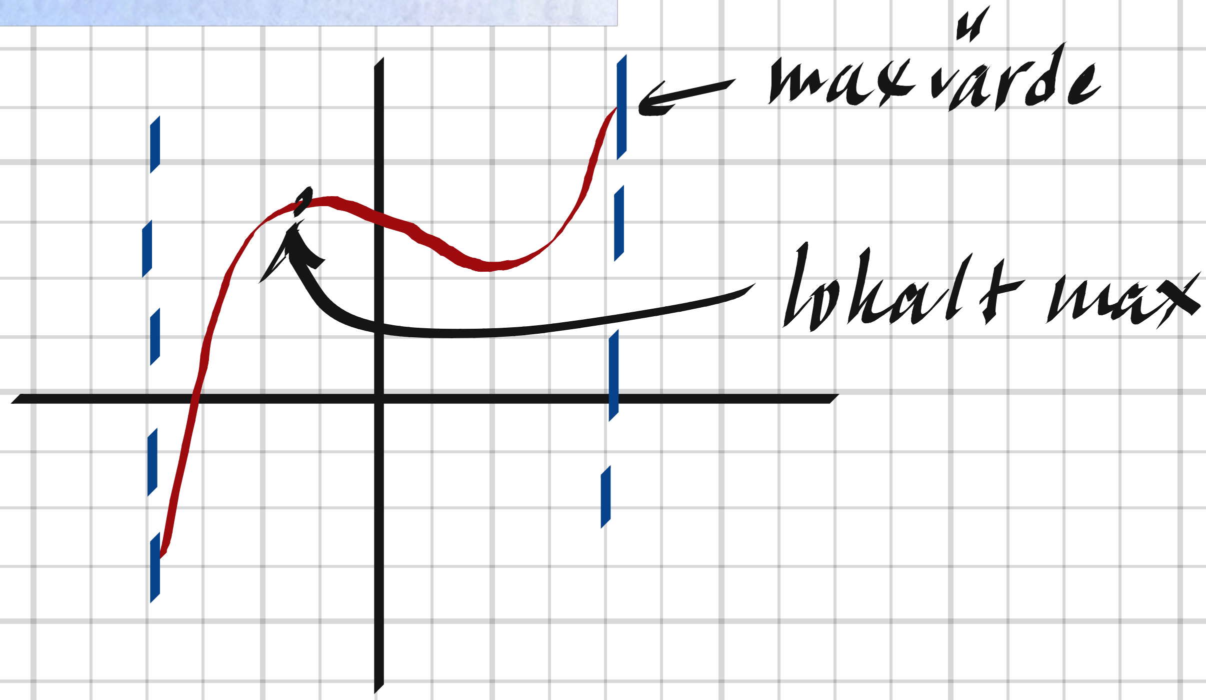
Strängt avtagande för $x \leq 2.5$

c)



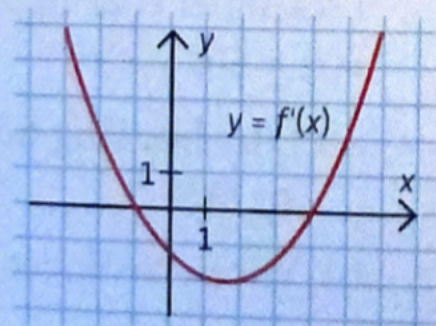
18 Vad kan vara skillnaden mellan funktionens största värde i ett intervall och ett lokalt maximum i intervallet?

18.

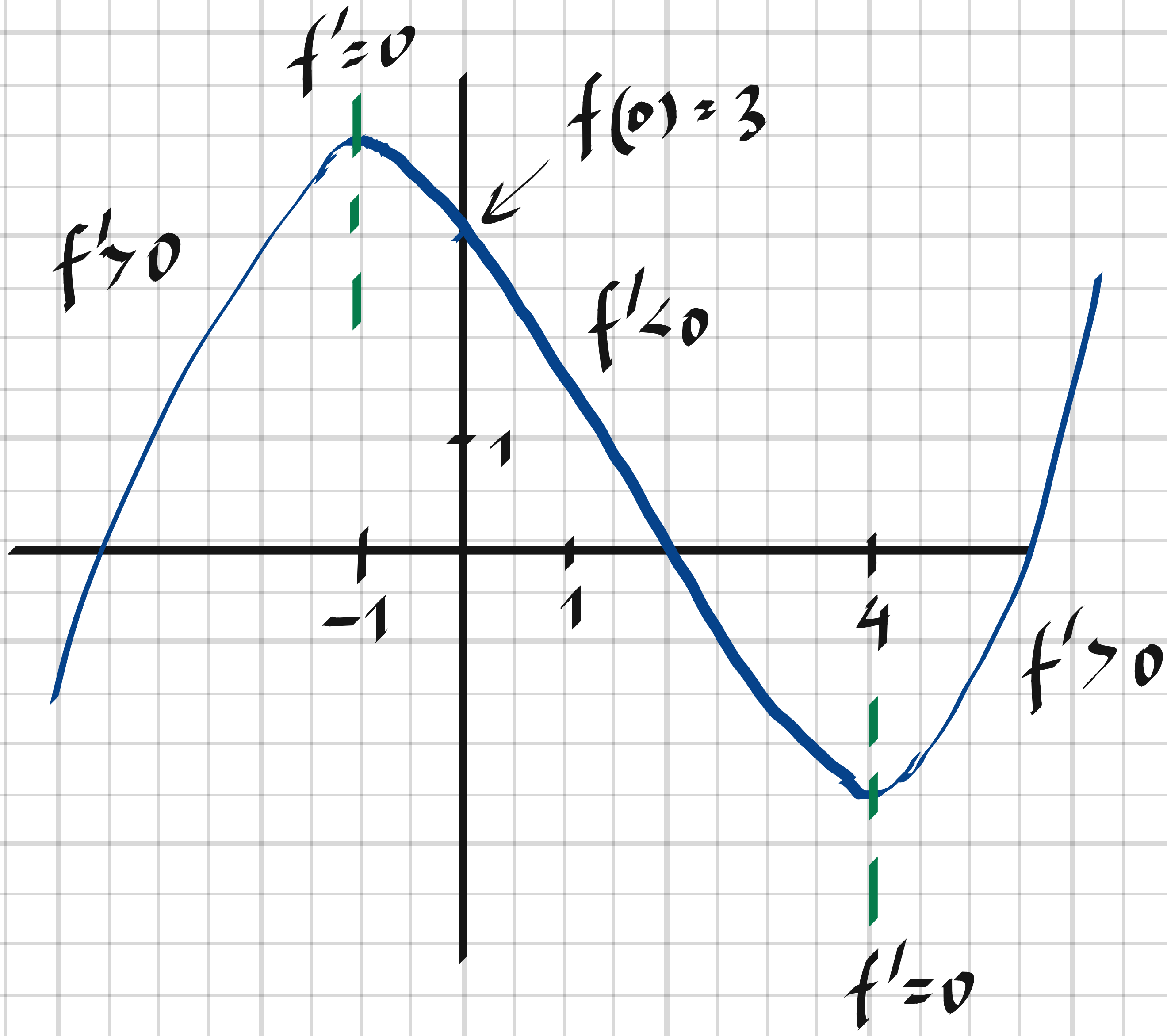


---

19 **ö** Figuren visar grafen till $f'(x)$ som är derivatan av $f(x)$. Skissa grafen till $f(x)$ om $f(0) = 3$.



19.



---

20 Ange en tredjegradsfunktion f, som har
ö $f''(2) = 4$.

20.

$$f''(x) = 2x$$

$$f'(x) = x^2 + C_1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

ex. $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3}$

---

21 Bestäm de punkter där derivatan till
$f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 + 3$ har värdet -6.

21.

$$f'(x) = 3x^2 - 9x$$

$$f'(x) = -6 \Rightarrow 3x^2 - 9x = -6 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

Punkterna är $(1, f(1)) = (1, -0{,}5)$ och $(2, f(2)) = (2, -7)$

---

22 I vilken punkt på kurvan $y = -2x^3 + 4x - 1$ har funktionens derivata sitt största värde?

22. $y' = -6x^2 + 4$

$y'' = -12x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$

Derivatan är max i $(0, y(0)) = \underline{(0, -1)}$

---

23 En rät linje bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel i den tredje kvadranten. Bestäm triangelns största area om summan av *x*- och *y*-koordinaterna för linjens skärningspunkter med axlarna är –32.

23. $x + y = -32 \quad , \quad x < 0 \,, \; y < 0$

$A = \dfrac{x \cdot y}{2}$

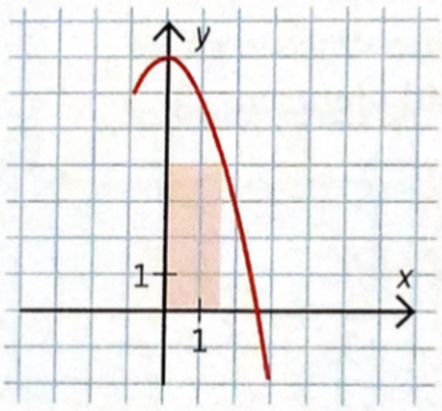
$A(x) = \dfrac{x(-32-x)}{2} = -\dfrac{x^2}{2} - 16x$

$A'(x) = -x - 16$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = -16 \Rightarrow y = -32-(-16) = 16$

Arean har största värdet $\dfrac{16 \cdot 16}{2} = \underline{128 \text{ a.e}}$

24 I figuren är kurvan $y = 7 - x^2$ ritad i första kvadranten. En rektangel ritas under kurvan enligt figuren. Bestäm det största värdet som rektangelns area kan anta.



24. $A = x \cdot y = x \cdot (7 - x^2) = 7x - x^3$

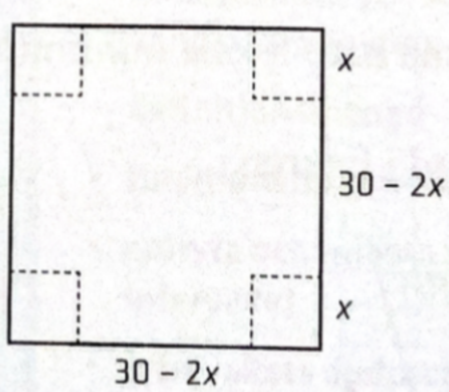
$A' = 7 - 3x^2$

$A' = 0 \Rightarrow 7 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$A_{max} = A\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = 7\sqrt{\frac{7}{3}} - \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2} = \underline{7,1 \text{ a.e}}$

---

25 Ildi vill vika en kvadratisk pappskiva med sidan 30 cm till en låda. För att kunna vika den, så klipper hon bort fyra kvadratiska bitar enligt figuren. Vilken höjd på lådan ger maximal volym?



$V(x) = x(30 - 2x)^2 =$

$900x - 120x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 900 - 240x + 12x^2$

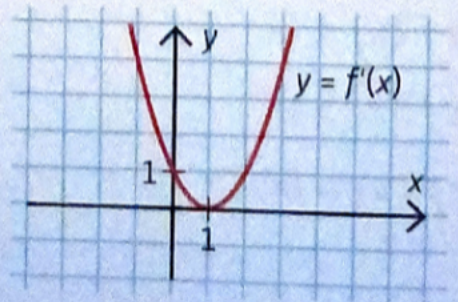
25.

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0$

$x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow x = 10 \pm 5$

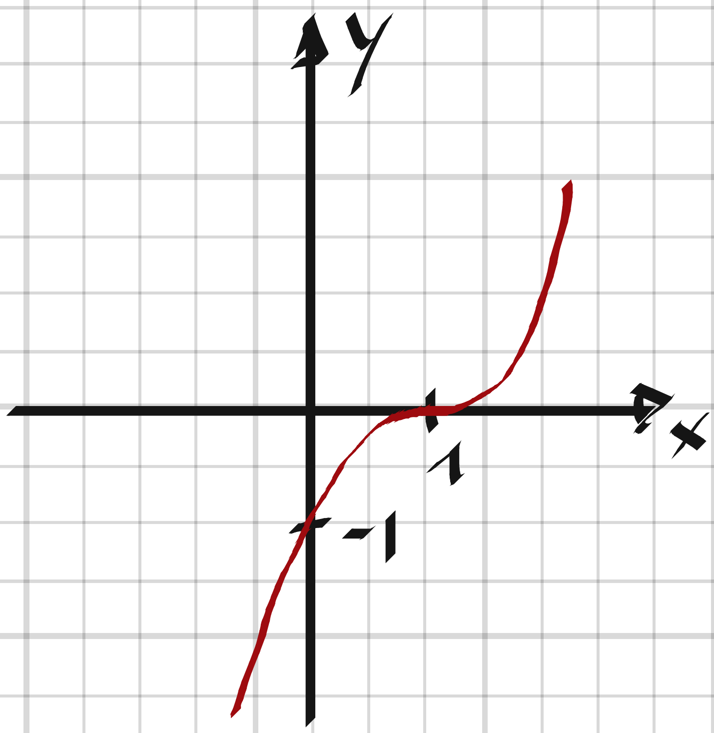
$V(15) = 0 \; ; \; V(5) = 2000 \Rightarrow$ <u>Höjden x = 5 cm</u>

26 Figuren visar grafen till $f'(x)$, som är derivatan av
ö $f(x)$. Skissa $f(x)$ om $f(0) = -1$.



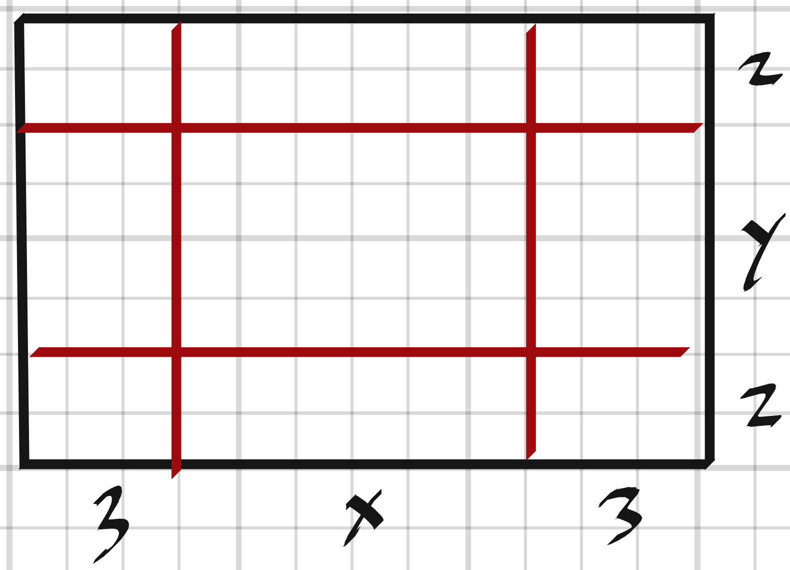
26. $f'(1) = 0 \Rightarrow f$ har terasspunkt i $x = 1$

$f'(x) \geq 0$ för alla $x \Rightarrow f(x)$ stigande



27 Anna ska skära till rektangulära skrivpapper. Hon vill att skrivytan ska vara 216 cm² och att marginalen upptill och nedtill ska vara 2 cm breda samt att båda sidomarginalerna ska vara 3 cm. Bestäm längsta sidan på det minsta möjliga pappersark som uppfyller kraven.

27. $x \cdot y = 216$



$$A = (x+6)(y+4) = (x+6)\left(\frac{216}{x}+4\right) = 4x + \frac{1296}{x} + 240$$

$$A'(x) = 4 - \frac{1296}{x^2} \;;\; A'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1296}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x = \overset{+}{(-)}\sqrt{324} = 18 \Rightarrow y = \frac{216}{18} = 12$$

$$A''(x) = \frac{2592}{x^3} \;;\; A''(18) > 0 \Rightarrow (x,y) = (18,12) = \text{minpunkt}$$

Längsta sidan $= x + 6 = \underline{24 \text{ cm}}$

28 Låt $f(x) = x^3 + ax + b$.

a) Hur många nollställen kan $f'(x)$ ha? Motivera ditt svar.

b) För vilket värde på a har grafen $y = f(x)$ en terrasspunkt? Motivera ditt svar.

28. a)

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

$a > 0$: Inga nollställen

$a < 0$: 2 nollställen $x_1 = -\sqrt{\frac{-a}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{-a}{3}}$

$a = 0$: 1 nollställe $x = 0$

b)

$a < 0$:

x		$-\sqrt{\frac{-a}{3}}$		$\sqrt{\frac{-a}{3}}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$a = 0$

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	terass	↗

Terasspunkt erhålls då $a = 0$

29 Funktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ har en inflexionspunkt i $(-1, 8)$ och en minimipunkt i $(0, 6)$. Bestäm konstanterna a, b och c.

29. Minpunkt i $(0,6) \Rightarrow c = 6$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{2b}{6a}$

$x = -1 \Rightarrow \frac{2b}{6a} = 1 \;;\; b = 3a$

$f(-1) = 8 \Rightarrow -a + b + 6 = 8 \Rightarrow$

$-a + 3a = 2 \Rightarrow a = 1 \;,\; b = 3$

Kontroll om inflexionspunkt:

x		-1	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$

$f''(-1) = 0$
f'' växlar tecken
för $x > -1$ och $x < -1$
} Inflexionspunkt

$(a, b, c) = (1, 3, 6)$

30 Vinsten V kronor vid ett företag kan beskrivas med $V(x) = x^3 - 8x^2 + 20x$, där x är antalet tillverkade produkter i tusental.

a) Vid vilket antal tillverkade produkter börjar vinsten minska första gången?

b) Vid vilket antal vänder vinsten återigen uppåt?

30. $V'(x) = 3x^2 - 16x + 20 = 3\left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{20}{3}\right)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{6} \pm \sqrt{\frac{16^2 - 240}{36}} = \frac{16}{6} \pm \frac{4}{6}$

$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{10}{3}$

$V''(x) = 6x - 16$

$V''(2) < 0 \Rightarrow$ maxpunkt i $(2, V(2))$

$V''\left(\frac{10}{3}\right) > 0 \Rightarrow$ minpunkt i $\left(\frac{10}{3}, V\left(\frac{10}{3}\right)\right)$

a) Vinsten börjar minska vid 2000 produkter

b) — " — öka igen vid 3333 — " —

31 Arvid ska skicka ett paket med posten. Paketet ska ha en kvadratisk basarea och postens bestämmelser är att längd + bredd + höjd inte får vara större än 900 mm. Vilka mått ska han välja om han vill att paketet ska ha så stor volym som möjligt?

31. $V = l \cdot b \cdot h = b^2 \cdot h$

$l + b + h = 2b + h \leq 900 \Rightarrow h \leq 900 - 2b$

$V(b) = b^2(900 - 2b) = 900b^2 - 2b^3$

$V'(b) = 1800b - 6b^2 = b(1800 - 6b)$

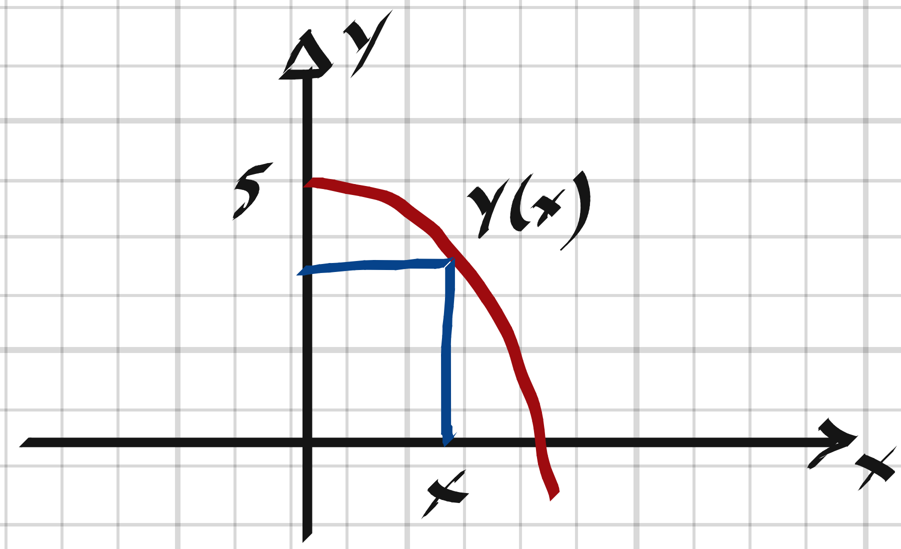
$V'(b) = 0 \Rightarrow 1800 - 6b = 0;\ b = 300 \Rightarrow h \leq 300$

$V''(b) = 1800 - 12b$

$V''(300) < 0 \Rightarrow$ maxpunkt i $(b, V(b)) = (300, V(300))$

Alla sidorna ska ha längden 300 mm

32 En rektangel ritad i den första kvadranten har ett hörn på kurvan $y = -5x^2 + 4x + 5$ och det motsatta hörnet i origo. Beräkna rektangelns maximala area.



32.

$$A = x \cdot y = -5x^3 + 4x^2 + 5x$$

$$A'(x) = -15x^2 + 8x + 5 = -15\left(x^2 - \frac{8}{15}x - \frac{1}{3}\right)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \quad x^2 - \frac{8}{15}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$x = \frac{4}{15} \pm \sqrt{\frac{16+75}{225}} = \frac{4}{15} \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{91}}{15} \approx 0{,}9026$$

$$A''(x) = -30x + 8 \; ; A''(0{,}9026) < 0 \Rightarrow \text{maxpunkt}$$

$$A_{max} = A(0{,}9026) = \underline{4{,}1 \text{ ae}}$$

33 Ge exempel på en polynomfunktion av tredje
ö graden vars derivata

a) har två nollställen

b) har ett nollställe

c) saknar nollställen

33.

a) $f'(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^3 + 2x$$

b) $f'(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

c) $f'(x) = x^2 - 2x + 4$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x$$

34 En funktion $f(x)$ har derivatan $f'(x) = 4 + \frac{kx}{2}$ och man vet att $f'(-1) = 0$. Har funktionen lokalt maximum eller lokalt minimum i $x = -1$? Motivera ditt svar.

34. $f'(-1) = 0 \Rightarrow 4 + \frac{-k}{2} = 0 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow$

$f'(x) = 4 + 4x$

$f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow$ minimum

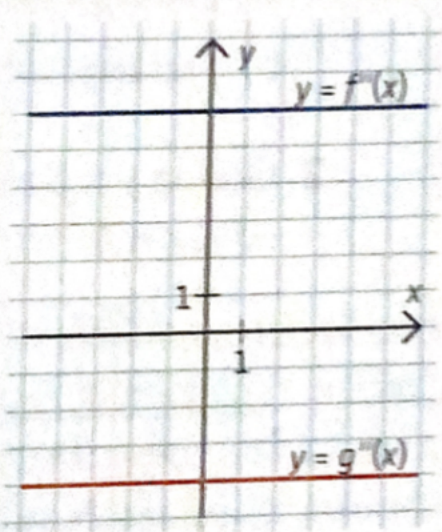
---

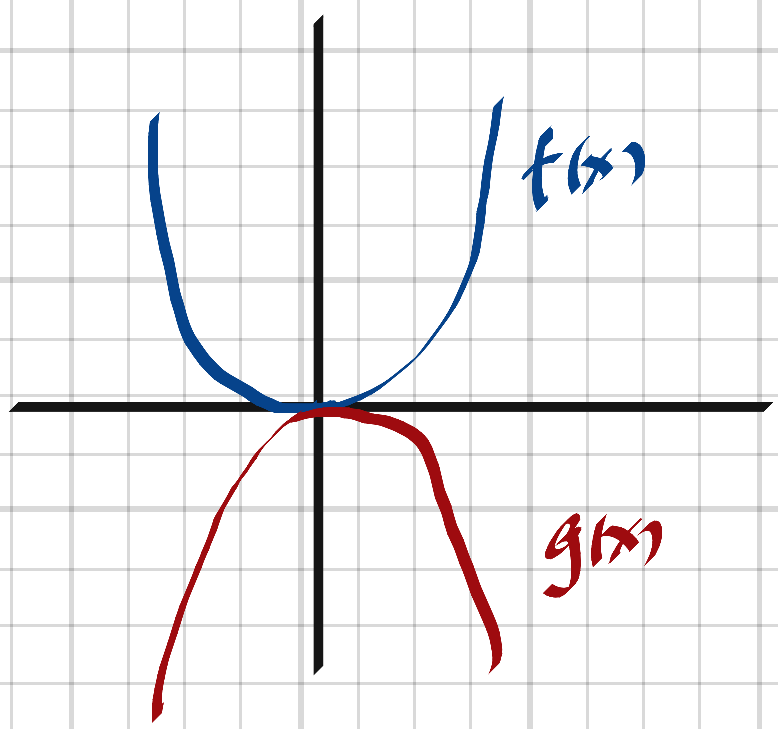
35 Vilka villkor måste förstaderivatan till en funktion uppfylla, för att funktionen ska vara konvex för alla x?

35. Förstaderivatan måste vara växande för alla x

---

36 Graferna visar andraderivatan till två funktioner. Skissa grafen till $f(x)$ och $g(x)$.

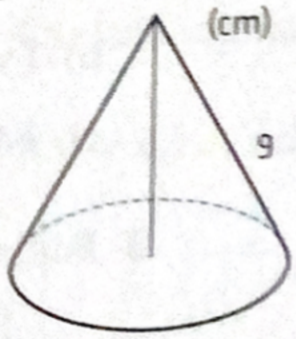


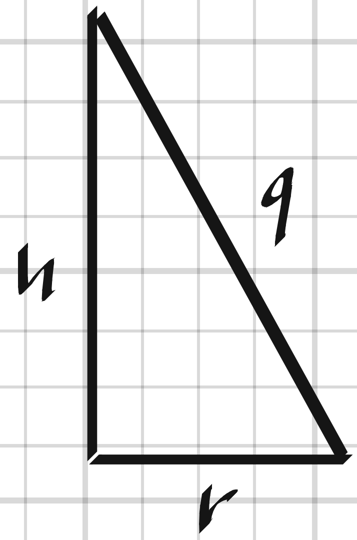


36. $f''(x) > 0$, $f'' =$ konstant $\Rightarrow$ f(x) parabel med minimum

$g''(x) < 0$, $g''(x) =$ konstant $\Rightarrow$ g(x) parabel med maximum

37 Sidan av en kon är 9 cm. Beräkna konens maximala volym.





37. $V = \dfrac{b \cdot h}{3}$

$r^2 + h^2 = 9^2 \quad ; \quad b = \pi r^2 = \pi(81 - h^2)$

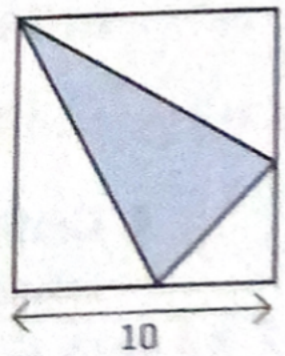
$V(h) = \dfrac{\pi h}{3}(81 - h^2) = \pi\left(27h - \dfrac{h^3}{3}\right)$

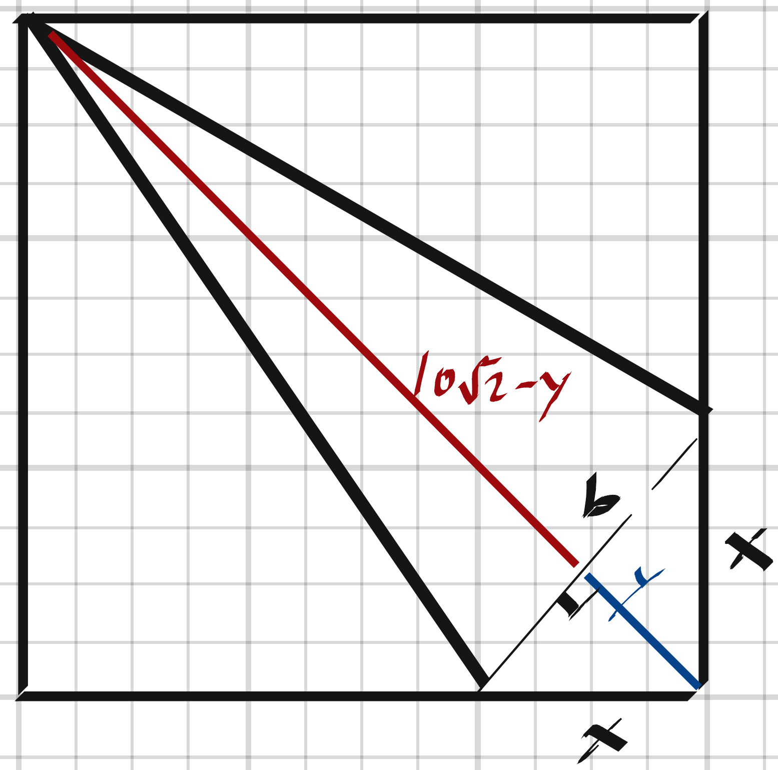
$V'(h) = \pi(27 - h^2)$

$V'(h) = 0 \Rightarrow \pi(27 - h^2) = 0 \Rightarrow h = \pm\sqrt{27}$

$V_{max} = V(\sqrt{27}) = \dfrac{\pi \cdot \sqrt{27}}{3}(81 - 27) \approx \underline{294 \text{ cm}^3}$

38 I en kvadrat med sidan 10 cm har vi ritat en likbent triangel. Triangelns hörn är i kvadratens ena hörn, respektive på kvadratens sidor. Beräkna triangelns maximala area.





38.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$b = x\sqrt{2} \quad ; \quad h = 10\sqrt{2} - y \quad ; \quad y = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$A(x) = \frac{x\sqrt{2}\left(10\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2} = 10x - \frac{x^2}{2} = x\left(10 - \frac{x}{2}\right)$$

$$A'(x) = 10 - x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$A_{max} = A(10) = 10(10-5) = \underline{50\ cm^2}$$

39 För funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ gäller att $f(a) = f'(a) = 0$, där p, q och a är reella tal.

a) Uttryck p och q med hjälp av a.

b) Välj ett a-värde och skissa en graf till funktionen i intervallet $-1 \le x \le 8$.

39. a) $f'(x) = 2x + p$

$f'(a) = 0 \Rightarrow 2a + p = 0 \Rightarrow p = \underline{-2a}$

$f(a) = 0 \Rightarrow a^2 + pa + q = 0 \Rightarrow q = \underline{a^2}$

$$f(x) = x^2 - 2ax + a^2$$

ex. $a = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$