17. Bestäm det värde på x där derivatan till $f(x) = x^2 + 5x$ är lika med derivatan till $g(x) = -5x^2 + 14x$ (2/0/0)

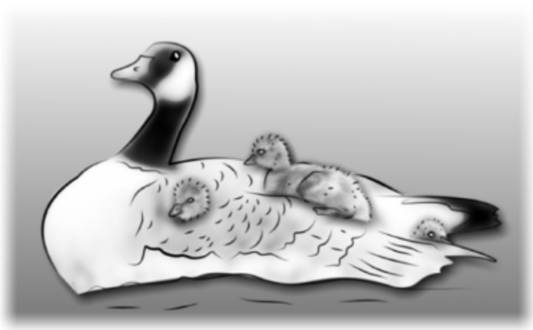
17.

$$2x + 5 = -10x + 14$$

$$12x = 9$$

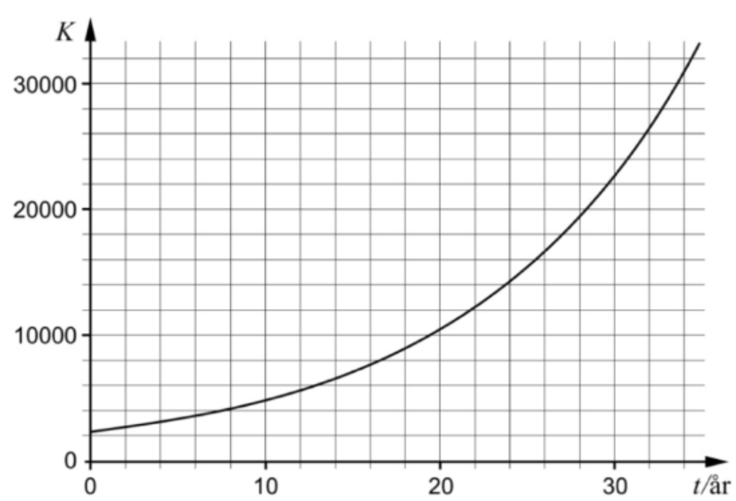
$$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

18.



Kanadagåsen infördes till Sverige på 1930-talet. Därefter har populationen ökat. Vid samma tidpunkt varje år görs en inventering av antalet kanadagäss. Populationens tillväxt kan beskrivas med en exponentiell modell.

Diagrammet nedan visar antalet kanadagäss K som funktion av tiden t år, där $t = 0$ motsvarar år 1977.



a) Bestäm ett närmevärde till $K'(30)$ med hjälp av grafen. (1/0/0)

b) Ge en tolkning av vad $K'(20) = 800$ betyder för antalet kanadagäss i detta sammanhang. (0/1/0)

18. a) $K'(30) \approx 1700$

b) År 1997 ökade antalet med 800.

19. Marcel tänker sätta in 2000 kr på ett sparkonto i slutet av varje år. Han tänker göra sin första insättning i slutet av år 2013 och den sista i slutet av år 2020. Marcel räknar med en årlig ränta på 2 %.

Hur mycket pengar kommer han att ha på sitt konto omedelbart efter den sista insättningen? (2/0/0)

19. $2000 \cdot \frac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 17166$ kr

År 1: 2000

2: $2000 + 2000 \cdot 1{,}02$

3: $2000 + (2000 + 2000 \cdot 1{,}02) \cdot 1{,}02 =$

$= 2000 + 2000 \cdot 1{,}02 + 2000 \cdot 1{,}02^2$ o.s.v $\Rightarrow$

Geometrisk summa.

$S_n = a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

---

20. Sture har ett enmansföretag som köper in färdiga trädetaljer i furu. Han tillverkar enbart två produkter, pallar och byråer. Stures arbetsuppgifter består av att montera och lacka dessa, vilket han inte kan göra samtidigt. Följande data gäller för hans produktion:

Pall

Byrå

	Arbetstimmar (h)		Tillgängliga arbetstimmar per vecka (h)
	Pall	Byrå	
Montering	0,25	0,50	15
Lackning	0,40	1,00	25
Vinst per produkt	150 kr	320 kr	

Antag att Sture tillverkar x pallar och y byråer under en vecka.

a) Sture får en order på 40 pallar och 10 byråer. Hinner han tillverka dessa under en arbetsvecka? (2/0/0)

b) Bestäm den maximala vinst som Stures företag kan göra under en arbetsvecka. (0/4/0)

20. a) Montering: $40 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}5 = 10 + 5 = 15 \leq 15$ ok!

Lackning: $40 \cdot 0{,}40 + 10 \cdot 1{,}00 = 16 + 10 = 26 > 25$ ej ok!

Nej, han hinner inte.

b)

$$\begin{array}{l} 2\cdot \\ - \end{array}\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}50y \leq 15 \\ 0{,}40x + 1{,}00y \leq 25 \end{cases}$$

$$0{,}10x \leq 5 \Rightarrow x \leq 50,\ y \leq 5$$

Maximal vinst $= 50 \cdot 150 + 5 \cdot 320 = 9100$ kr

21. Är följande påståenden korrekta? Motivera dina svar.

a) $F(x) = 3e^{x}$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{3x}$ (1/0/0)

b) Grafen till $f(x) = x^3 + ax$ har tre olika nollställen om konstanten $a \leq 0$ (0/2/1)

21. a) Nej, $F(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}$

b) $x(x^2+a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \pm\sqrt{-a}$

Nej om $a = 0 \Rightarrow$ endast 1 nollställe i origo

Ja, om $a < 0$ med nollställen i $x = 0, -\sqrt{-a}, +\sqrt{-a}$

---

22. Karolina häller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20°C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$T(t) = 95e^{-0,039t}$

där T är kaffets temperatur i °C och t är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning. (1/0/0)

b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut. (0/1/0)

c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid. (0/1/1)

22. a) $T(0) = 95\,°C$

b) Minskingen $= 1 - e^{-0,039} = 0,0382 = 3,8\,\%$

c) Modellen tar inte hänsyn till omgivningens temp och stämmer ej då temp når rumstemperaturen 20°C.

---

16. Bestäm de värden på x för vilka det gäller att grafen till $f(x) = x^3 - 0{,}88x$ har lutningen 5 (2/0/0)

16. $f'(x) = 3x^2 - 0{,}88$

$f'(x) = 5 \Rightarrow 3x^2 - 0{,}88 = 5 \Rightarrow \underline{x = \pm 1{,}4}$

---

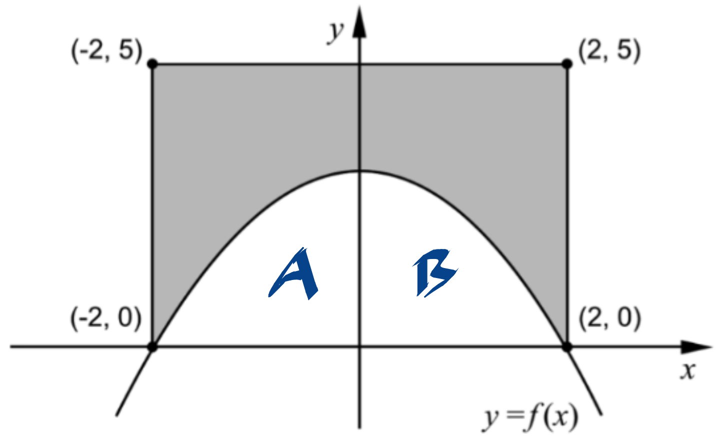
17. Lös ekvationen $x(x^2 - 5) = 5(2 - x)$ (2/0/0)

17. $x^3 - 5x = 10 - 5x$

$x^3 = 10 \Rightarrow x = 10^{1/3} \approx \underline{2.15}$

---

18. Figuren nedan visar grafen till $f(x) = -0{,}75x^2 + 3$ och en rektangel.
Rektangeln har sina hörn i punkterna (–2, 0), (–2, 5), (2, 0) och (2, 5).



a) Använd figuren och förklara med ord varför $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$ (1/1/0)

b) Bestäm arean av det skuggade området. (2/1/0)

18. a) Pga symmetri så är $A = B \Rightarrow \int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx$

b) $A = 2\left(2 \cdot 5 - \int_0^2 f(x)dx\right) =$

$= 2 \cdot \left(10 - \int_0^2 (3 - 0{,}75x^2)dx\right) =$

$= 2 \cdot \left(10 - \left[3x - 0.25x^3\right]_0^2\right) = 2(10 - (6-2)) = 2 \cdot (10-4) = \underline{12 \text{ a.e}}$

19. Andrea ska börja spara pengar på ett konto genom att i början av varje år sätta in samma belopp. Hon vill spara ihop 50 000 kr till en resa. Hon tänker göra sin första insättning i början av år 2014 och den sista i början av år 2020. Hon räknar med att årsräntan kommer att vara 2 % under hela tidsperioden.

Hur stort belopp ska hon sätta in varje gång om hon vill ha 50 000 kr på kontot omedelbart efter den sista insättningen? (0/2/0)

19. Geometrisk summa: $S_n = a_0 \dfrac{k^n - 1}{k - 1}$, $n = 7$

$$50000 = a_0 \cdot \frac{1{,}02^7 - 1}{1{,}02 - 1} \Rightarrow$$

$$a_0 = 50000 \cdot \frac{1{,}02 - 1}{1{,}02^7 - 1} = \underline{6726 \text{ kr}}$$

---

20. Idag finns det cirka 7 miljarder människor på jorden. En modell som beskriver antalet människor på jorden som funktion av tiden är

$$N(t) = \frac{11}{1 + 3{,}4e^{-0{,}03 \cdot t}}$$

där N är antalet människor i miljarder och t är tiden i år efter 1950.

a) Bestäm antalet människor på jorden år 1950. (1/0/0)

b) Enligt modellen kommer antalet människor på jorden med tiden att närma sig en övre gräns. Bestäm denna övre gräns för antalet människor med hjälp av modellen. (0/3/0)

20. a) $N(0) = \dfrac{11}{1+3{,}4} = \underline{2{,}5 \text{ miljarder}}$

b) $e^{-0{,}03t} \to 0,\ t \to \infty \Rightarrow N \to \underline{11 \text{ miljarder}}$

---

21. För en funktion f gäller att $f(x)=(x-a)(x-b)$ där a och b är konstanter. Bestäm det samband som ska gälla mellan a och b för att grafen till f ska ha en tangent med lutningen 2 då $x=4$ (0/3/0)

21. $f(x) = x^2 - ax - bx + ab$

$f'(x) = 2x - a - b$

$f'(4) = 2 \Rightarrow 2 \cdot 4 - a - b = 2 \Rightarrow \underline{a = 6 - b}$

---

17. Nyfödda barn minskar normalt i vikt under de första dygnen, därefter ökar vikten. Efter tre dygn är vikten som lägst.

Enligt en förenklad modell kan vikten för ett nyfött barn beskrivas med
$V(t)=5t^3-135t+3500$
där V är vikten i gram och t är tiden i dygn efter födseln.

a) Hur mycket minskar ett barn i genomsnitt i vikt per dygn under de tre första dygnen? (2/0/0)

b) Utvärdera hur väl modellen stämmer överens med verkligheten när barnet är några veckor gammalt. (2/0/0)

17. a) $V'(t) = 15t^2 - 135$

$V'(1) = 15 \cdot 1 - 135 = 120\text{ g}$

$V'(2) = 15 \cdot 2^2 - 135 = 90\text{ g}$

$V'(3) = 15 \cdot 3^2 - 135 = 0$

$\dfrac{120+90+0}{3} = 70\text{ g}$

b) $V(10) = 5 \cdot 1000 - 135 \cdot 10 + 3500 = 7150\text{ g}$

$V(15) = 18\,350\text{ g} = 18.4\text{ kg}$ (ej rimligt)

---

18. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ och att f är definierad i intervallet $0 \le x \le 4$. Bestäm funktionens minsta och största värde. (2/0/0)

18.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 0 , x_2 = 2$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ maximum ; $f(0) = 0 - 0 + 2 = 2$

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ minimum ; $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2$

Ändläge: $f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 = 64 - 48 + 2 = 18$

Svar: Maxvärdet = 18, Minvärdet = −2

19. För en funktion f där $y = f(x)$ gäller att $f(3) = 4$ och $f'(3) = 2{,}4$
Lotta tänker en stund och påstår:

–Om det är en rät linje måste f(100) vara exakt 244

Undersök om Lottas påstående är korrekt. (2/0/0)

19. Om Lottas påstående är korrekt går linjen genom (100,244) och (3,4) =>

$$k = \frac{244-4}{100-3} = \frac{240}{97} = 2{,}47$$

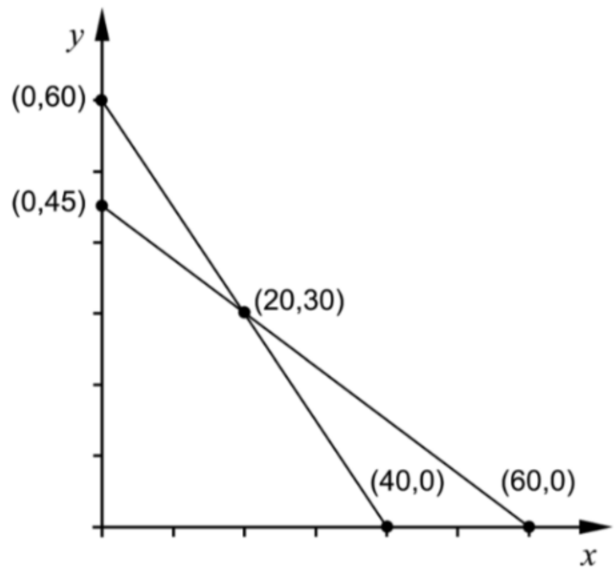
$$k \neq f'(3) \Rightarrow$$

Svar: Lottas påstående är fel.

20. En skräddare ska tillverka fodrade kostymer och fodrade jackor i ylle. Till varje kostym går det åt 1,5 m fodertyg och 3 m ylletyg. Till varje jacka går det åt 2 m av varje tygslag. Skräddaren har tillgång till 90 m fodertyg och 120 m ylletyg. Anta att skräddaren ska tillverka och sälja x kostymer och y jackor. Då gäller att:

$$\begin{cases} 1{,}5x + 2y \le 90 \\ 3x + 2y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

I figuren nedan visas graferna till linjerna $1{,}5x + 2y = 90$ och $3x + 2y = 120$ samt fem markerade punkter.



Skräddaren vill göra en så stor vinst som möjligt och tecknar vinstfunktionen $V = 300x + 250y$ där V är den totala vinsten i kronor.

a) Förklara vad talen 300 och 250 i vinstfunktionen betyder i detta sammanhang. (1/0/0)

b) Beräkna den största vinst som skräddaren kan göra. (2/1/0)

20. a) 300 kr/fodertyg , 250 kr/ylletyg

b)
$$- \begin{array}{l} 1.5x + 2y \le 90 \\ 3x + 2y \le 120 \end{array}$$

$1.5x \le 30 \Rightarrow x \le 20 \, , \, y \le 30$

Maxvinsten $= 300 \cdot 20 + 250 \cdot 30 = 13500$ kr

21. I en geometrisk summa med 10 termer är en term 40,5 och därpå följande term 121,5
Bestäm första termens värde om summan är 14762 (0/2/0)

21.

Geometrisk summa: $S_n = a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

$k = \frac{121.5}{40.5} = 3$, $n = 10 \Rightarrow$

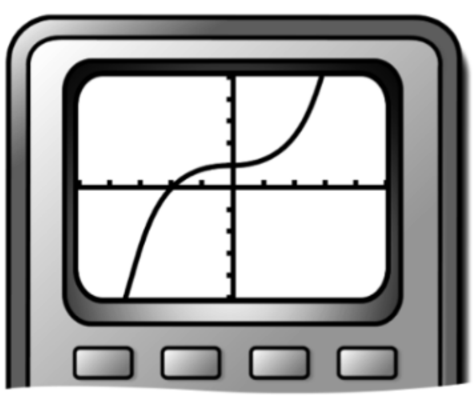
$a_0 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 14762$

$a_0 = 14762 \cdot \frac{3 - 1}{3^{10} - 1} = \underline{0.5}$

---

22. Peder ritar upp grafen till $f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$ på sin grafritande räknare och säger:

–Jag ser att grafen har en terrasspunkt.



Undersök om han har rätt. (0/2/0)

22.

$f'(x) = 3x^2 + 0.03$

$f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ funktionen saknar terasspunkt

---

17. Timo sätter regelbundet in pengar på ett konto med en årsränta på 3 %.
I början av varje år sätter han in 5 000 kr.

Hur mycket pengar har Timo på sitt konto direkt efter den tionde insättningen? (2/0/0)

17. Geometrisk summa: $S_n = a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$

$S_{10} = 5000 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1} = \underline{57\,319 \text{ kr}}$

18. Kalle säger:

- Det finns bara en primitiv funktion till $f(x) = e^x$

Har Kalle rätt? Motivera. (1/0/0)

18. Nej Kalle har fel. Det finns oändligt antal primitiva funktioner.

$F(x) = e^x + C$

19. För funktionerna f och g gäller att $f(x) = 15x^2$ och $g(x) = x^3 - 33x$
Bestäm de värden på x där funktionernas grafer har samma lutning. (2/0/0)

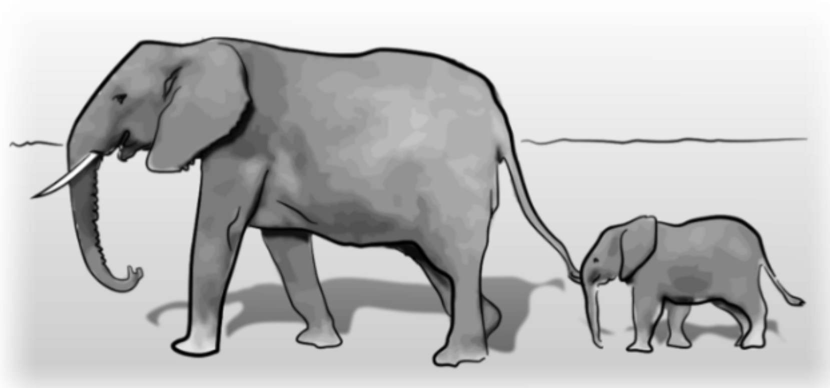
19. $f'(x) = g'(x) \Rightarrow 30x = 3x^2 - 33 \Rightarrow$

$3(x^2 - 10x - 11) = 0$

$3(x+1)(x-11) = 0$

$\underline{x_1 = -1, \; x_2 = 11}$

20. Ett elefantfosters vikt ges av sambandet $V(t) = 0{,}310 \cdot e^{0{,}271 \cdot t}$ där $t \geq 1$
V är elefantfostrets vikt i kg och t är tiden i månader efter befruktningen.
När elefantungen föds väger den 120 kg.



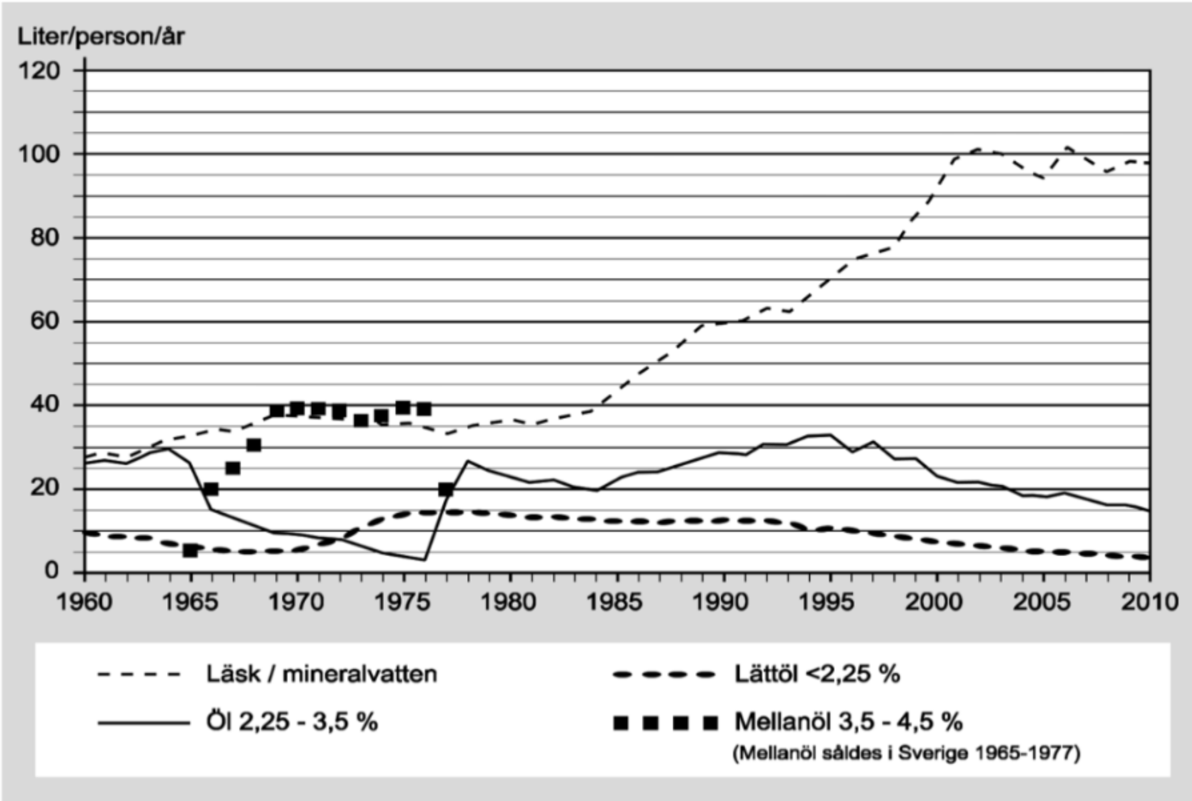
Hur lång tid efter befruktningen föds elefantungen? (2/0/0)

20. $0{,}310 \cdot e^{0{,}271 t} = 120 \Rightarrow$

$$0{,}271 t = \ln \frac{120}{0{,}310}$$

$$t = \frac{\ln \frac{120}{0{,}310}}{0{,}271} \approx 22 \text{ månader.}$$

21. I diagrammet nedan visas hur konsumtionen av läsk/mineralvatten samt öl har förändrats i Sverige sedan år 1960.



a) Bestäm den genomsnittliga förändringshastigheten i (liter/person/år)/år för konsumtionen av läsk/mineralvatten under tidsperioden 1960-2010. (2/0/0)

Den genomsnittliga förändringshastigheten för konsumtionen av mellanöl under tidsperioden 1966-1977 är 0 (liter/person/år)/år.

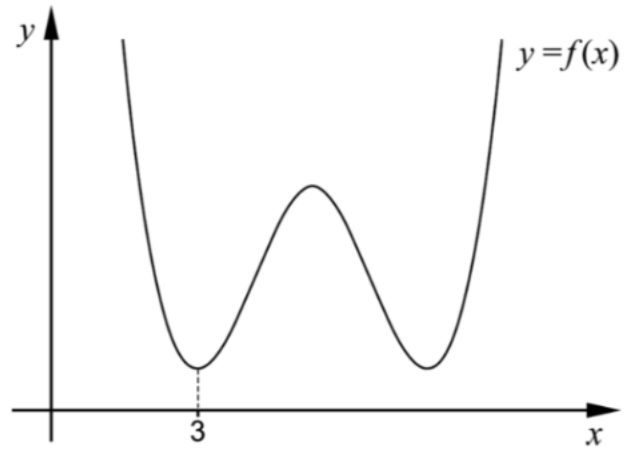
b) Förklara varför den genomsnittliga förändringshastigheten inte är ett lämpligt mått för att beskriva hur konsumtionen av mellanöl förändrats under tidsperioden 1966-1977. (0/0/1)

21.

a) 1,4 (liter/person/år)/år

b) Måttet baseras endast på start och slutvärde. Säger alltså ingenting om vad som händer däremellan.

22. Figuren visar grafen till fjärdegradsfunktionen f. En av minimipunkterna har x-koordinaten 3



Förklara med hjälp av grafens utseende varför summan $f(3) + f'(3) + f''(3)$ är större än noll. (1/1/0)

22. $f(3) > 0$ (avläses direkt ur grafen)

$f'(3) = 0$ (extrempunkt)

$f''(3) > 0$ (konvex funktionsdel)

Alla termer $\geq 0 \Rightarrow$ Summan > 0

23. I ett bageri bakas två olika sorters surdegslimpor: Hurtig och Nyttig. I recepten ingår rågmjöl och surdeg, se nedan.

8 hg rågmjöl
2,5 hg surdeg

10 hg rågmjöl
2 hg surdeg

Inför dagens bakning har bagaren 460 hg rågmjöl och 110 hg surdeg.

Bagaren gör en vinst på 14 kr för varje Hurtig och 12 kr för varje Nyttig. Han vill göra en så stor total vinst som möjligt och funderar på om han ska baka både Hurtig och Nyttig eller om det räcker med att endast baka en av sorterna. Han räknar med att sälja allt han bakar.

Hur många limpor Hurtig respektive Nyttig ska bagaren baka för att få maximal vinst? (0/4/0)

23.

$$\begin{array}{l} - \\ 5\cdot \end{array}\left\{\begin{array}{l} 8H + 10N \le 460 \\ 2{,}5H + 2N \le 110 \end{array}\right.$$

$$(12{,}5-8)H \le 550-460$$

$$4{,}5H \le 90$$

$$H \le 20 \Rightarrow N \le \frac{110-2{,}5\cdot 20}{2} = 30$$

1. $H \le 20 \Rightarrow N \le 30$ Vinst $= 14\cdot 20 + 12\cdot 30 = 640$ kr
2. $H = 0 \Rightarrow N \le 46$ Vinst $= 12\cdot 46 = 552$ kr
3. $N = 0 \Rightarrow H \le 44$ Vinst $= 14\cdot 44 = 660$ kr

Maximala vinsten 640 kr fås med 20 Hurtig och 30 Nyttig.